

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

58. Band, Heft 2

23. Mai 1958

S. 241–480

## Allgemeines. Didaktik. Bibliographisches.

● **Zweites Symposium über einige mathematische Probleme, die in Südamerika bearbeitet werden, Villavicencio-Mendoza vom 21. bis 25. Juli 1954.** Montevideo, Uruguay: Centro de Cooperación Científica de la UNESCO para America Latina 1954. 330 S. [Spanisch].

Die Arbeiten werden in diesem Zbl. einzeln angezeigt.

**Rey Pastor, Julio:** Die moderne Mathematik in Lateinamerika. 2. Sympos. probl. mat. Latino América, Villavicencio-Mendoza 21, 25 Julio 1954, 9–20 (1954) [Spanisch].

● **Carathéodory, Constantin:** Gesammelte Mathematische Schriften. Herausgegeben im Auftrag und mit Unterstützung der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Bd. I–III. München: Becksche Verlagsbuchhandlung 1954, XII, 426 S., 48 Abb. — 1955, XI, 457 S., 90 Abb. — 1955, IX, 464 S., 118 Abb.

Le premier volume des Oeuvres de Carathéodory comprend exclusivement des travaux relatifs au Calcul des Variations. En principe, les Ouvrages parus en librairie ne figurent pas dans cette édition; toutefois l'on y trouve reproduit l'Article „Variationsrechnung“ paru dans Frank-Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, 2. Aufl., 5. Kap., S. 227–279 (Braunschweig 1930). Le Volume comprend trois sections: A. Diskontinuierliche Lösungen. B. Allgemeine Theorie. C. Mehrfache Integrale. — Le second volume comporte tout d'abord deux nouvelles sections intéressant les travaux sur le Calcul des Variations: D. Geometrische Methoden. E. Historisches. Les nombreux comptes-rendus d'Ouvrages et d'Articles consacrés à cette discipline sont réservés pour le cinquième volume. Le second volume comprend, en outre, tous les travaux de Thermodynamique, d'Optique Géométrique et de Mécanique. A côté des articles qui ont paru du vivant de l'A., l'on trouve trois articles: Der B. Schmidtsche Projektionsapparat, Nachgelassenes Manuskript aus dem Jahre 1949; für den Druck bearbeitet von Frank Löbell. — Berechnung der Diffraktionskurven aus dem Eikonal, zwei Manuskriptfragmente aus dem Nachlaß; mit einführenden Bemerkungen von Max Herzberger. — Integration des Zweikörperproblems, Herrn G. Faber zum 70. Geburtstag, 5. April 1947, gewidmet, Manuskript im Besitz von Herrn G. Faber, München. — Contenu du 3<sup>e</sup> volume: Funktionentheorie: A. Picardsches Problem. B. Koeffizientenprobleme. C. Schwarzes Lemma. D. Konforme Abbildung: Existenztheoreme. E. Konforme Abbildung: Veränderliche Gebiete.

*Th. Lepage.*

● **Waerden, B. L. v. d.:** Einfall und Überlegung in der Mathematik. Basel: Birkhäuser-Verlag 1954. 28 S. Sfr. 4,15.

Zusammenstellung der in dies. Zbl. 51, 1; 55, 1, 38 besprochenen Arbeiten.

● **Karlson, Paul:** Vom Zauber der Zahlen. Eine unterhaltsame Mathematik für jedermann. („Unterhaltsame Wissenschaft.“) Berlin: Im Deutschen Verlag der Ullstein A. G. 1954. 325 Abb. im Text u. 1 farbige Ausschlagtafel. 654 S.

Dies inhaltreiche und in der Tat unterhaltsame Buch führt jeden Leser, der guten Willens ist und vor dem Umfang nicht zurückschrickt, fast auf einem Königsweg zu tiefen Einsichten in mancherlei Gebiete der Mathematik. Mit bewundernswerter Darstellungskunst flicht der Verf. allenthalben Historisches, Anekdotisches und phantasievolle Szenen ein und gönnt dem nach schwierigerem Anstieg vielleicht ermüdeten Wanderer die erfrischende Fernsicht von der Höhe. Gute Zeichnungen erleichtern das Verständnis. Auf Lücken in der Strenge wird des öfteren humorvoll



hingewiesen. Einige den Laien störende Druckfehler haben sich — auch auf dem Umschlag! — eingeschlichen, z. B. auf S. 445 [ $\sqrt{1/x}$  statt  $1/f(x)$ ], S. 530 (Reihe für  $\arctg x$ ), und auf S. 533 (mitten) ist mit „Reihe“ die Folge der Flächeninhalte gemeint. — Dem Buch ist weite Verbreitung zu wünschen. *R. Sprague.*

● **Degrazia, Joseph:** *Math is fun.* New York: Emerson Books Inc. 1954. XVII, 159 p. \$ 2,75.

Dieses Buch gehört in die Reihe der wissenschaftlichen Unterhaltungsliteratur. Es enthält eine große Zahl neuer und wirklich interessanter mathematischer „Denksportaufgaben“ verschiedener Art für Fachleute wie für Laien. *St. Schottlaender.*

● **Behnke, Heinrich, Walter Lietzmann und Wilhelm Süß** (herausgegeben von): *Mathematisch-physikalische Semesterberichte zur Pflege des Zusammenhangs von Schule und Universität.* Bd. 4, Heft 1/2. (S. 1—159). Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht 1954.

Diese Semesterberichte dienen der wissenschaftlichen Weiterbildung von Mathematikern und Physikern, vorwiegend der Lehrer an höheren Schulen. Die Beiträge werden lediglich danach ausgewählt, wieweit sie diesem Gesichtspunkt gerecht werden. So grenzen sich die Semesterberichte gegenüber den Organen für die Forschung wie auch denen für mathematisch-physikalische Didaktik ab. Das vorliegende Heft enthält folgende Beiträge: **Heinrich Behnke**, Von der mathematischen Ausbildung an den deutschen Universitäten (S. 1). — **Hans Hermes**, Die Universalität programmgesteuerter Rechenmaschinen (S. 42). — **Wilhelm Süß**, Eine charakteristische Eigenschaft der Ellipse (S. 54). — **U. Viet**, Über die ebenen Eibereichen umschriebenen Dreiecke (S. 57). — **Ludwig Bieberbach**, Mathematische Fragen im Bereich der magischen Quadrate (S. 59). — **R. Lauffer**, Winkel von Geraden in der orientierten, euklidischen Ebene (S. 82). — **Herman Athen**, Vektorrechnung auf der Kugelfläche (S. 90). — **Erwin Kreyszig**, Ein elementarer Beweis des Satzes, daß sich kein Teil der Kugeloberfläche längentreu in die Ebene abbilden läßt (S. 101). — **E. J. Dijksterhuis**, Ziel und Methode der Geschichte der exakten Wissenschaften (S. 106). — **H. Kurt Vogel**, Griechische Algebra in Rechenbüchern der Mittelalters (S. 122). — **Johannes Blume**, Von der geometrischen Optik zur Wellenoptik (S. 131). — **Heinz Rau**, Übersicht über den Lehrstoff des mathematischen Unterrichts der Oberstufe an den höheren Schulen der Bundesrepublik (S. 138). — **Paul Buchner**, Die Mathematik-Lehrbücher des Vereins Schweizerischer Mathematiklehrer (S. 146). — Tagungsberichte (S. 152). Bücherschau (S. 157). — Der Beitrag von **H. Behnke** bringt den Bericht über die Universitäten, den Verf. im Auftrag des deutschen Unterausschusses der Internationalen Unterrichtskommission (IMUK) als 13. Kap. des neuen IMUK-Bandes (vgl. nachstehendes Referat) erstattet hat. Ausgehend von der Idee der deutschen Universität schildert Verf. auf Grund seiner reichen Erfahrungen die Lage von Dozenten, Studenten und mathematischen Instituten (nach dem Stande von 1954), behandelt eingehend Anfängervorlesungen, Vorlesungen für mittlere Semester und Randvorlesungen, untersucht die Studienreformvorschläge, insbesondere für mittlere Semester, und schließt seine lebendigen und ausgewogenen Darlegungen mit einem Ausblick auf den Studienabschluß und die Examina. — **H. Hermes** zeigt, daß jede Funktion, die sich überhaupt berechnen läßt, mit einer programmgesteuerten Rechenmaschine vollautomatisch berechnet werden kann, und nennt solche Rechenmaschinen in diesem Sinne universal. Der Begriff der berechenbaren Funktion wird dabei nach einer Definition von A. M. Turing gefaßt [vgl. A. M. Turing, dies. Zbl. 16, 97; 18, 193 (1)]. — **W. Süß** beweist: Hat die Menge aller zueinander affin-verwandten Eilinen die Eigenschaft, daß zwei ihrer Elemente stets dann zusammenfallen, wenn sie mehr als vier Punkte gemein haben, so sind die Eilinen Ellipsen. — **U. Viet** gibt für einen Satz von D. Gale (dies. Zbl. 51, 134) einen einfachen Beweis und eine Verallgemeinerung. Diese lautet (für die Ebene): Legt man einen Mittelpunktseibereich als Eich-



figur einer Minkowskischen Geometrie zugrunde, so ist das Dreieck kleinsten Flächeninhaltes, das jeden Eibereich mit dem Minkowski-Durchmesser 1 umschließt, das flächenkleinste Umdreieck der Eichfigur. — **L. Bieberbach** behandelt in seinem interessanten Bericht insbesondere die Fragen nach der Existenz und der Konstruktion magischer Quadrate, stellt alle 5-reihigen panmagischen Quadrate auf, untersucht die Beziehungen zu den lateinischen Quadraten Eulers und geht schließlich auf sein Verfahren zur Konstruktion aller Stifelschen Quadrate ein (dies. Zbl. 55, 36). — **R. Lauffer** zeigt die Bedeutung des Möbiusschen Winkelbegriffs für Geraden und Speere in der orientierten euklidischen Ebene, durch den langwierige — meist nicht durchgeführte, d. h. dem Leser überlassene — Fallunterscheidungen, insbesondere in der Planimetrie, vermieden werden können. — **H. Athen** untersucht, wie weit sich die Vektoralgebra der Ebene auf die Kugeloberfläche übertragen läßt, und gewinnt als Anwendung die Sätze der sphärischen Trigonometrie und ein Verfahren zur Berechnung sphärischer Polygone. — **E. Kreyszig** gibt für den im Titel angegebenen Satz neben einem Beweis, der sich auf das theorema egregium stützt, einen elementaren — jedoch für die Schule noch zu hohen — Beweis und beleuchtet die praktische Bedeutung des Satzes für die Kartographie im Schulunterricht. — Der Beitrag von **E. J. Dijksterhuis** ist eine Übersetzung seiner Antrittsvorlesung bei Übernahme eines Lehrstuhls für Geschichte der Mathematik und der exakten Naturwissenschaften an der Universität Utrecht. — **K. Vogel** bringt einige Beispiele (z. T. aus noch nicht edierten Texten) von linearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten griechischer Mathematiker, vor allem des Iamblichos, die in Rechenbücher des Mittelalters Eingang gefunden haben. — **J. Blume** erklärt die Begriffe Lichtkohärenz, Huyghensches Prinzip, Huyghens-Fresnelsches Prinzip und zeigt, wie man mit Hilfe der Wasserwellen einer Wellenwanne als Modellwellenbewegung die Interferenz des Lichts, die Beugungserscheinungen und das Verhältnis der geometrischen Optik zur Wellenoptik in der Oberstufe der höheren Schule einwandfrei darstellen kann. — **H. Rau** gibt eine Übersicht, was nach dem Stande von 1953 an mathematischem Lehrstoff in der Oberstufe (11.—13. Schuljahr) der höheren Schule in den einzelnen Ländern der Bundesrepublik noch geboten wird. — **P. Buchner** erwähnt die Schwierigkeiten, für die sehr eigenständigen, von Kanton zu Kanton Unterschiede in den Lehrplänen aufweisenden höheren Schulen des deutschsprachigen Teils der Schweiz einheitliche Lehrbücher herauszugeben, und schildert ihre Überwindung hinsichtlich der Mathematik-Lehrbücher durch den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer.

*H. Rohrbach.*

• **Behnke, Heinrich** (herausgegeben von): **Der mathematische Unterricht für die sechzehn- bis einundzwanzigjährige Jugend in der Bundesrepublik Deutschland.** Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1954. 332 S. DM 18,—.

Der vorliegende Band stellt einen umfassenden Bericht über das gesamte mathematische Unterrichtswesen für Jugendliche vom 16. bis 21. Altersjahr in der Bundesrepublik Deutschland dar. Veranlaßt wurde diese Zusammenstellung durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission (IUMK), deren erster Präsident Felix Klein war. Unter der initiativen Leitung von H. Behnke, dem ein großer und sachkundiger Mitarbeiterstab zur Seite stand, wurde diese Aufgabe rasch und in vorzüglicher Weise gelöst. Das Werk gliedert sich in vier Hauptteile, die den höheren Schulen, den besonderen Schulformen, den Hochschulen und den Lehrbüchern und Lernmitteln gewidmet sind. Im ersten Abschnitt gibt **K. Wigand** einen statistischen Überblick über den Mittelschulunterricht in Mathematik (Verteilung der Schüler auf die Klassen, Wochenstundenzahlen, Schriftliche Arbeiten usw.). Anschließend folgt ein Bericht von **H. Rüping** über die Entwicklung des höheren Schulwesens und des mathematischen Unterrichtes seit 1911. **H. Rau** beschäftigt sich nachher mit dem Problem: Weg und Ziel der mathematischen Ausbildung. Über die Arbeiten im mathematischen Unterricht, sowie über die Beziehungen des



mathematischen Unterrichtes zu anderen Lehrfächern referiert abschließend zum 1. Teil wiederum **H. Rüping**. Im 2. Abschnitt sind es zuerst die technischen Schulen (Ingenieurschulen, technische Fachschulen und gewerbliche Berufsschulen), über die **F. Westrich**, **E. Zimmermann**, **P. Kaminski**, **H. Stüdemann**, **H. Winkelhausen** und **Fr. Wolff** berichten. Mit kaufmännischen Schulen befassen sich sodann **G. C. Hönig** und **E. Sternel**. Zum Schluß erwähnt **K. G. Brauer** auch die mathematischen Verhältnisse an einigen weiteren Schulgruppen (Seefahrtsschulen, bergmännische Schulen, Bundesbahn- und Postfachschulen). Eine eingehende Würdigung erhält im 3. Teil die Hochschule, in welchem einleitend **H. Behnke** von einem allgemeinen Standpunkt aus über die Universitäten spricht. Über den speziellen Unterricht in angewandter Mathematik an den Universitäten berichtet uns **L. Colatz** und anschließend unterhält sich **H. Hermes** über das philosophische Studium der Studierenden der Mathematik. **H. Peter** und **E. Schneider** skizzieren die mathematischen Belange für Nationalökonomien, während **H. Cremer** und **F. Reutter** eingehend die technischen Hochschulen beleuchten. In den beiden letzten Kapiteln dieses Abschnittes vernehmen wir noch **A. Walther**, der über Unterricht und Forschung im Institut für praktische Mathematik an der TH Darmstadt orientiert, sowie **W. Breidenbach** und **W. Ness**, die den mathematischen Unterricht von der pädagogischen Seite her beurteilen. Eine besondere Erwähnung verdient auch der vierte und letzte Teil des Werkes, in welchem **F. G. Brauer**, **H. Lohmeyer** und **G. Wolff** eine umfassende Zusammenstellung des Schrifttums in Richtung des mathematischen Unterrichtes sowohl für Gymnasien, spezielle Mittelschulen und für Hochschulen wiedergeben. Das tiefgreifende Buch schließt mit einem Kapitel von **K. Wigand** und **G. Wolff** über Modelle und andere Hilfsmittel für den mathematischen Unterricht. Jedem Mathematiker, der in irgendeiner Weise sich mit speziellen oder allgemeinen Unterrichtsfragen zu beschäftigen hat, wird dieses hervorragende Kompendium Nutzen und Anregung bieten.

*H. P. Künzi.*

• **Schmidt, Rudolf und Richard Stender**: *Aus der Welt der Zahlen*. (Schriftenreihe zur Gestaltung des mathematischen Unterrichts, Heft 7.) Frankfurt a. Main: Otto Salle Verlag 1954. 47 S. DM 3,60.

Die Verf. setzen sich zum Ziel, eine zweckmäßige Darstellung der Zahlentheorie zu schaffen, so wie diese auf den verschiedenen Schulstufen, vorwiegend aber auf der Mittelschule, zur Anwendung gelangen kann. In der, vom didaktischen Standpunkt aus sehr geschickt aufgebauten Übersicht wird von einer Dreiteilung ausgegangen: 1. Welche Fragen muß ich im Klassenunterricht besprechen? 2. Welche Fragen kann ich — je nach Gelegenheit — im Klassenunterricht heranziehen? 3. Welche Themen kann ich in einer Arbeitsgemeinschaft behandeln? Von diesen Überlegungen aus ergibt sich ein Aufbau des Zahlensystems, eine Behandlung der Moduln im Ring der ganzen Zahlen mit Anwendungen auf das Rechnen mit Restklassen, sowie eine Darstellung der Diophantischen Gleichungen mit Anwendungen. Möge dieses kleine Werk weiter dazu dienen, daß die in Gymnasien bis vor kurzer Zeit recht stiefmütterlich behandelte Zahlentheorie in vermehrtem Maße Eingang in den Mathematikunterricht der Mittelschulen findet.

*H. P. Künzi.*

**Hofmann, J. E.**: *Zur elementaren Berechnung von zyklometrischen Funktionen und Logarithmen*. Math. naturw. Unterricht 6, 368—372 (1954).

Ausgehend vom Subtraktionstheorem der Tangens-Funktion konstruiert Verf. eine Berechnungsmethode, welche den Winkel zu einem gegebenen Tangens-Wert durch eine Reihe von rationalen Näherungswerten bestimmt, wobei der Winkel in Einheiten des Grundwinkels  $\frac{1}{4}\pi$  ausgedrückt ist. Ähnlich wird das Subtraktionstheorem der logarithmischen Funktion für eine entsprechende Berechnung der dekadischen Logarithmen im Näherungsverfahren benutzt. Die Methoden sind von didaktischem Interesse, wahrscheinlich aber weniger für die rechnerische Praxis geeignet.

*E. Rabe.*



● Martin, Colette: État des périodiques figurant à la Bibliothèque des Sciences Mathématiques de l'École Normale Supérieure. (Documentation mathématique. Fasc. 15—16.) 3° éd. Paris: Secrétariat Mathématique 1954. 11 p.

## Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

● Dantzig, T.: Henri Poincaré, critic of crisis. Reflections on his universe of discourse. New York: Charles Scribner's Sons 1954. 149 p. \$ 3,—.

Destouches-Février, P.: La logique des propositions expérimentales. Collection de Logique mathématique, Sér. A V.: Appl. sci. Logique math. 1952, 115—118 (1954).

Verf. führt aus, daß man in der Physik Sprachen von verschiedenem Niveau unterscheiden soll, beginnend mit einer Sprache, in welcher die empirischen Aussagen formuliert werden, welche besagen, daß sich zu einer bestimmten Zeit der Zeiger eines Instrumentes in einem bestimmten Intervall befindet. *H. Hermes.*

Destouches, Jean-Louis: La logique et les théories physiques. Collection de Logique mathématique, Sér. A V.: Appl. sci. Logique math. 1952, 119—128 (1954).

Allgemeine Bemerkungen zur Formulierung physikalischer Theorien, u. a. über den Zusammenhang mit der Erfahrung (adéquation), den Übergang zu einer verbesserten Theorie und den Unterschied zwischen objektivistischen (klassischen) und subjektivistischen (Quanten-) Theorien. Diskussionsbeiträge von Reichenbach, M. Meyer und Kurepa. *H. Hermes.*

Reichenbach, Hans: Über die erkenntnistheoretische Problemlage und den Gebrauch einer dreiwertigen Logik in der Quantenmechanik. Z. Naturforsch. 6a, 569—575 (1951).

The author argues that a three-valued logic, with truth values true, false, and undetermined, is necessary, or at least convenient and desirable, for a complete description of the facts of quantum mechanics. He cites well-known paradoxes and anomalies to show that in quantum mechanics, unlike classical mechanics, none of the distinct but equivalent descriptions which will account for „interphenomena“ obey the principle of causality. By interphenomena he means what takes place between observations. Among his illustrations are the wave-corpuscle dualism and the interpretation of the positron as an electron running backwards in time. The failure of causality is connected with the need for a third truth value. Objections of Bohr, Born, and Pauli to the use of three-valued logic in quantum mechanics are answered. *O. Frink (Math. Rev. 13, 716).*

Koreik, Antoni: A contribution to the history of propositional calculus. Studia logica 1, 247—252, russ. und engl. Zusammenfassg. 252—253 (1954) [Polnisch].

Rose, Alan: Caractérisation, au moyen de la théorie des treillis du calcul de propositions à foncteurs variables. Collection de Logique mathématique, Sér. A V.: Appl. sci. Logique math. 1952, 87—88 (1954).

Ein Entscheidungsverfahren für den 2-wertigen Aussagenkalkül mit einstelligen variablen Funktoren nach Lukasiewicz (dies. Zbl. 42, 244), formuliert in der Booleschen Algebra für die Matrix, effektiv durch die Reduktion von  $\delta p$  auf  $(p \wedge \delta_1) \vee (\sim p \wedge \delta_2)$ , d. h.: die Funktorvariable  $\delta$  wird durch die „neuen“ Aussagenvariablen  $\delta_1, \delta_2$  umschrieben. *G. Hasenjaeger.*

Rose, Alan: Sur les fonctions définissables dans une logique à un nombre infini de valeurs. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 1462—1463 (1954).

Das Theorem von McNaughton (dies. Zbl. 43, 9) wird auf den durch Quantoren erweiterten unendlichwertigen Aussagenkalkül übertragen. Definierbar sind genau diejenigen stetigen Funktionen mit Argumenten und Werten im Intervall  $\langle 0, 1 \rangle$ , die sich aus endlich vielen ganz-linearen Funktionen mit rationalen Koeffizienten zusammensetzen lassen. *G. Hasenjaeger.*



**Klimovski, Gregorio:** Probleme bezüglich der Definition von „logische Wahrheit“ in den semantischen und syntaktischen Systemen. 2° Sympos. Probl. mat. Latino América, Villavicencio-Mendoza 21—25 Julio 1954, 299—318 (1954) [Spanisch].

Verf. erörtert die Tragweite und Schwierigkeiten der verschiedenen Definitionen von „logischer Wahrheit“ und „logischer Deduktion“ auf syntaktischer und auf semantischer Grundlage, hauptsächlich gestützt auf die Arbeiten von Carnap.

*H. Gericke.*

**Anderson, Alan Ross:** On the interpretation of a modal system of Łukasiewicz. J. comput. Systems 1, 209—210 (1954).

Für das „System of modal logic“ von J. Łukasiewicz (dies. Zbl. 53, 6) wird eine Art von semantischer Unvollständigkeit aufgezeigt, durch welche die von Łukasiewicz vorgeschlagene Interpretation des Systems in Frage gestellt wird.

*H. Scholz.*

**Lorenzen, Paul:** Zur Begründung der Modallogik. Arch. math. Logik Grundlagenforsch. 2, 15—28 (1954).

Die metasprachliche Deutung der Modaloperatoren  $\Delta$  (notwendig) und  $\nabla$  (möglich) durch „ableitbar bzw. unwiderlegbar aus einem gegebenen Gesetz  $W$ “ wird durch Einführung von metasprachlichen Quantoren  $\overline{\wedge}, \overline{\vee}$  auf eine Form gebracht, die erlaubt, ohne (Meta)<sup>n</sup>-Sprache auch iterierte Modalitäten einzuführen. Dabei wird „ableitbar“ im Sinne der operativen Logik des Verf. verstanden. Die „effektiv“ bzw. „fiktiv“ ableitbaren Modaloperatorengleichungen werden an O. Beckers Modalkalkül (dies. Zbl. 46, 5) gespiegelt. Für ein „vollkommenes“ Gesetz  $W$  (d. i.: entweder  $W \vdash U$  oder  $W \vdash \neg U$  für alle Aussagen  $U$ ) erhält man formal algebraisch als Extensionen von Aussagen die klassischen Wahrheitswerte zurück.

*G. Hasenjaeger.*

**Beth, E. W.:** Observations métamathématiques sur les structures simplement ordonnées. Collection de Logique mathématique, Sér. A V.: Appl. sci. Logique math. 1952, 29—35 (1954).

The author first considers a (simply) ordered set as an algebra with one binary operation, which maps every pair of elements onto its minimum. He shows that this algebraic structure is not equational, because it is not closed under direct union (= cardinal product of the ordered sets). An eudoxian statement is defined to be a statement of first order predicate calculus with atoms of the form  $x = y$  and  $x < y$ . The eudoxian type of an ordered set is the class of all ordered sets which satisfy the same eudoxian statements as the given ordered set. The decision problem is said to be solved for an ordered set if for every eudoxian statement it may be decided if it is satisfied by the ordered set. It is proved that if the decision problem is solved for two ordered sets, it may be solved also for their ordinal sum. Furthermore, the eudoxian type of an ordinal sum of ordered sets is determined uniquely by the eudoxian type of the summands. The author sketches the parallelism between the classification of ordered sets into eudoxian types and the classification of Boolean algebras into boolean types (defined similarly with partial order instead of order). Finally some theorems about eudoxian classes, consisting of all ordered sets which satisfy one eudoxian statement, are given.

*W. Peremans.*

**Quine, W. V.:** Interpretations of sets of conditions. J. symbolic Logic 19, 97—102 (1954).

Ein Beweis für Gödels Satz über die Erfüllbarkeit von widerspruchsfreien Mengen  $M$  von (abgeschlossenen pränexen) Ausdrücken des Prädikatenkalküls mit dem Ziel, durch geeignete Anordnung von im wesentlichen bekannten Methoden, die Beweisschritte möglichst einsichtig zu machen. Für endliche  $M$  ergeben sich zusätzliche Vereinfachungen.

*G. Hasenjaeger.*

**Kalicki, Jan:** An undecidable problem in the algebra of truth-tables. J. symbolic Logic 19, 172—176 (1954).



Es gibt keine (rekursive) Methode zur Entscheidung der Frage, ob zwei beliebige Matrizen dieselbe Menge von Sätzen bestimmen (im Gegensatz zum Falle endlicher Matrizen, vgl. Verf.: dies. Zbl. 49, 147); Beweis durch Rückführung auf Linial und Post's Arbeit: Bull. Amer. math. Soc. 55, 50 (1949). Das Problem bleibt sogar unentscheidbar bei Beschränkung auf Matrizen mit rekursiven Satzmengen; der Beweis verläuft über die Unentscheidbarkeit der Frage, ob eine beliebige rekursive Menge leer ist.

G. Hasenjaeger.

**Vaught, Robert L.:** Remarks on universal classes of relational systems. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 57, 589—591 (1954).

Weiterverfolgung Tarskischer Gedanken, insbesondere Anwendung eines Satzes von Tarski (Teil I und II der nachstehend besprochenen Arbeit) ergibt: Eine Klasse  $K$  ähnlicher Relationensysteme endlicher Ordnung ist dann und nur dann eine universale Klasse, wenn gilt: (i) Teilsysteme von Elementen von  $K$  gehören zu  $K$ ; (ii) Relationensysteme isomorph zu Elementen von  $K$  gehören zu  $K$ ; (iii) es gibt ein  $n$  ( $= 1, 2, 3, \dots$ ) so, daß ein Relationensystem zu  $K$  gehört, wenn alle seine Teilsysteme mit höchstens  $n$  Elementen zu  $K$  gehören. — Ein Beispiel zeigt, daß die Beschränkung auf endliche Systeme hier, wie auch für einige schwächere Aussagen von Tarski, wesentlich ist. [Siehe auch A. Tarski und R. L. Vaught, Bull. Amer. math. Soc. 59, 391 (1953).]

D. Tamari.

**Tarski, Alfred:** Contributions to the theory of models. I—III. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 57, 572—581, 582—588 (1954); 58, 56—64 (1955).

Ziel dieser Arbeit ist es (1) eine Reihe von Begriffen zur Behandlung von Fragen in der Theorie der Modelle von Postulatensystemen einzuführen und (2) einige z. T. einfache Sätze zu beweisen, die Zusammenhänge stiften zwischen mathematischen Eigenschaften von Klassen von Modellen einerseits und syntaktischen Eigenschaften der diese Modelle bestimmenden Axiomensysteme andererseits. Zu diesen Fragen vgl. hauptsächlich G. Birkhoff, dies. Zbl. 13, 1; L. Henkin, dies. Zbl. 50, 6; A. Robinson, dies. Zbl. 43, 247; A. Tarski, dies. Zbl. 49, 7, deren Ergebnisse z. T. verwendet werden. — Unter einem relationalen System ( $r$ . Syst.)  $\mathfrak{R}^{(\alpha)} = \langle M, R_1^{(r_1)} \dots R_\nu^{(r_\nu)} \dots \rangle$  versteht Verf. eine Menge  $M$ , in der eine Folge vom Typus  $\alpha$  von  $r_\nu$ -stelligen ( $r_\nu < \omega$ ) Relationen  $R_\nu$  erklärt ist. Die Klasse aller  $\mathfrak{R}$  mit gemeinsamen  $\alpha$  („von der Ordnung  $\alpha$ “) und übereinstimmenden  $r_\nu$  bildet eine Gattung  $G^{(\alpha)}$  (similarity class).  $\mathfrak{E}^{(\beta)} = \langle N, S_1^{(s_1)} \dots S_\nu^{(s_\nu)} \dots \rangle$  heißt ein  $r$ . Untersyst. von  $\mathfrak{R}^{(\alpha)}$ , wenn  $\beta = \alpha$ ,  $s_\nu = r_\nu$  für alle  $\nu$ ,  $N \subseteq M$  und  $S_\nu^{(r_\nu)}$  die auf  $N$  beschränkte Relation  $R_\nu^{(r_\nu)}$  ist. Durchschnitt, Vereinigung und cartesisches Produkt von  $r$ . Systemen einer Gattung werden sinngemäß erklärt. Zu einem  $r$ . Syst.  $\mathfrak{R}^{(\alpha)}$  wird für jede Folge  $\langle \xi_0 \dots \xi_\nu \dots \rangle$  des Typus  $\beta \leq \alpha$  (im folgenden als  $\langle \xi_0 \dots \xi_\nu \dots \rangle \in \alpha^\beta$  angegeben) ein  $r$ . Syst.  $\mathfrak{R}_{\xi_0 \dots \xi_\nu \dots}^{(\beta)} = \langle M, R_{\xi_0}^{(r_{\xi_0})} \dots R_{\xi_\nu}^{(r_{\xi_\nu})} \dots \rangle$ , genannt ein Reduktum der Ordnung  $\beta$  von  $\mathfrak{R}$ , erklärt. Sei  $K^{(\alpha)}$  eine Klasse von  $r$ . Systemen einer Gattung, dann wird bezeichnet mit  $S(K)$ ,  $H(K)$ ,  $I(K)$ ,  $P(K)$  die Gesamtheit der Untersysteme, der homomorphen Bilder, der isomorphen Bilder, aller cartesischen Produkte von Elementen von  $K$ . Speziell möge  $S_\omega(K)$ ,  $P_3(K)$  bzw.  $P_\gamma(K)$  ( $\gamma$  eine Kardinalzahl) die Gesamtheit der endlichen Untersysteme, der cartesischen Produkte mit zwei bzw. mit  $\delta$ ,  $\delta < \gamma$ , ( $\delta$  eine Kardinalzahl) Elementen aus  $K$  als Faktoren bedeuten. Mit  $K_{\xi_0 \dots \xi_\nu \dots}^{(\beta)}$  wird die Gesamtheit der Redukta der Ordnung  $\beta$  einer Klasse  $K^{(\alpha)}$  bezeichnet. Um mengentheoretische Schwierigkeiten zu vermeiden, kann für alles Vorangehende eine Grundmenge, von der aus alle Klassenbildungen erfolgen, als festgelegt angenommen werden. Für jede Gattung  $G^{(\alpha)}$  wird als formalisierte Theorie  $\mathfrak{T}(G^{(\alpha)})$  der Prädikatenkalkül der ersten Stufe mit Identität für  $\alpha$  Prädikate der durch  $G$  festgelegten Stellenzahl angesetzt. Die semantischen Begriffe der Erfüllbarkeit usw. werden wie üblich erklärt. Eine Klasse  $K^{(\alpha)}$  von  $r$ . Systemen heißt arithmetisch ( $\in AC$ ), universal



( $\in UC$ ) bzw. arithmetisch im weiteren Sinne (i. w. S.) ( $\in AC_d$ ), universal i. w. S. ( $\in UC_d$ ), wenn  $K^{(\alpha)}$  aus allen Modellen eines Satzes, eines reinen Allsatzes, bzw. einer Menge von Sätzen, einer Menge von reinen Allsätzen besteht.  $K^{(\alpha)}$  heißt pseudoarithmetisch ( $\in PC$ ) bzw. pseudoarithmetisch i. w. S. ( $\in PC_d$ ), wenn es eine Klasse von  $r$  Systemen  $L$  einer Ordnung  $\beta$  und eine Folge  $\langle \xi_0 \dots \xi_r \dots \rangle \in \beta^\alpha$  gibt, so daß  $K = L_{\xi_0 \dots \xi_r \dots}$  und  $L \in AC$  bzw.  $L \in AC_d$  ist.  $\mathfrak{R}^{(\alpha)}$  und  $\mathfrak{S}^{(\alpha)}$  heißen universal äquivalent, ( $\mathfrak{R}^{(\alpha)} \approx \mathfrak{S}^{(\alpha)}$ ), wenn jeder reine Allsatz, der in  $\mathfrak{R}^{(\alpha)}$  gilt, auch in  $\mathfrak{S}^{(\alpha)}$  gilt und umgekehrt. — Theoreme: I. Sei  $\mathfrak{S}^{(\alpha)} = \langle N, S_0 \dots S_r \dots \rangle$  mit endlichem  $N$  und eine endliche Folge  $\langle \xi_0 \dots \xi_{n-1} \rangle \in \alpha^n$  gegeben, dann gilt für die Klasse  $K$  der Systeme  $\mathfrak{R}^{(\alpha)}$ , so daß  $\mathfrak{S}_{\xi_0 \dots \xi_{n-1}} \notin I(S(\mathfrak{R}_{\xi_0 \dots \xi_{n-1}}))$  (d. h. nicht isomorph in  $\mathfrak{R}_{\xi_0 \dots \xi_{n-1}}$  einbettbar ist):  $K \in UC$ . Der Beweis erfolgt unter Ausnützung der Endlichkeit von  $N$  durch Aufstellung eines Postulatensystems für  $K$ . II.  $K^{(\alpha)} \in UC_d$  dann und nur dann, wenn (1)  $S(K) \subseteq K$ , (2)  $I(K) \subseteq K$  und (3) für jedes  $\mathfrak{R} \in G^{(\alpha)}$ , wenn  $S_\omega(\mathfrak{R}_{\xi_0 \dots \xi_{n-1}}) \subseteq K_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}}$  für jede endliche Folge  $\langle \xi_0 \dots \xi_{n-1} \rangle \in \alpha^n$ , dann  $\mathfrak{R} \in K$ . Vaught hat (lt. Verf.) gezeigt, daß für endliches  $\alpha$   $K^{(\alpha)} \in UC$  genau dann gilt, wenn (1), (2) und an Stelle von (3) die Bedingung (3') gilt: es gibt eine natürliche Zahl  $k$ , so daß für jedes  $\mathfrak{R}$  aus  $G^{(\alpha)}$ , wenn  $S_k(\mathfrak{R}) \subseteq K$ , dann  $\mathfrak{R} \in K$ . III.  $\mathfrak{R}^{(\alpha)} \approx \mathfrak{S}^{(\alpha)}$  genau dann, wenn für jede endliche Folge  $\langle \xi_0 \dots \xi_{n-1} \rangle \in \alpha^n$   $S_\omega(\mathfrak{R}_{\xi_0 \dots \xi_{n-1}}) \subseteq I(S(\mathfrak{S}_{\xi_0 \dots \xi_{n-1}}))$  und  $S_\omega(\mathfrak{S}_{\xi_0 \dots \xi_{n-1}}) \subseteq I(S(\mathfrak{R}_{\xi_0 \dots \xi_{n-1}}))$  gilt. Die Theoreme I, II, III enthalten die Spezialfälle, in denen die Ordnung  $\alpha$  endlich ist; statt der Redukta treten dann die entsprechenden  $r$  Syst. selbst auf. IV. Sei  $K^{(\alpha)} \in AC_d$ , dann gilt für jedes  $\mathfrak{R}^{(\alpha)}$  derart, daß für jede endliche Folge  $\langle \xi_0 \dots \xi_{n-1} \rangle \in \alpha^n$   $S_\omega(\mathfrak{R}_{\xi_0 \dots \xi_{n-1}}) \subseteq S(K_{\xi_0 \dots \xi_{n-1}})$  ist,  $\mathfrak{R}^{(\alpha)} \in S(K)$ . Beweis dafür, sowie für eine Verallgemeinerung, in der  $AC_d$  durch  $PC_d$  ersetzt wird, nach L. Henkin, l. c. p. 414—415 und 425. V.  $K^{(\alpha)} \in AC_d$  ( $PC_d$ ), dann  $S(K) \in UC_d$ ; dies gilt nicht für  $AC$ , bzw.  $UC$  an Stelle von  $AC_d$  bzw.  $UC_d$ . VI.  $K^{(\alpha)} \in UC_d$  ( $UC$ ) genau dann, wenn  $K^{(\alpha)} \in AC_d$  ( $AC$ ) und  $S(K) \subseteq K$ .  $AC_d$  kann hier durch  $PC_d$ , nicht aber durch  $PC$  ersetzt werden. VII.  $K^{(\alpha)} \in UC_d$  und  $\langle \xi_0 \dots \xi_r \dots \rangle \in \alpha^\beta$ , dann  $K_{\xi_0 \dots \xi_r \dots} \in UC_d$ . — Es folgen noch einige naheliegende Verallgemeinerungen der angegebenen Theoreme für den Fall, daß die Begriffe  $AC$ ,  $AC_d$ ,  $UC$ ,  $UC_d$  relativ bezüglich vorgegebener Klassen aufgefaßt werden. — Im Teil III wird der Begriff des „algebraischen Systems“ eingeführt; er unterscheidet sich von dem eines  $r$ . Syst. dadurch, daß an die Stelle der Relationen, Funktionen  $F^{(r)}$  treten, deren Vor- bzw. Nachbereich in  $M^{(r)}$  bzw.  $M$  liegt. Die einzige verbleibende Relation ist die Identität. An Stelle von  $\mathfrak{T}(G^{(\alpha)})$  wird die Theorie  $\mathfrak{T}(A^{(\alpha)}) - A^{(\alpha)}$  ist die Klasse der algebraischen Systeme aus  $G^{(\alpha)}$  — eingeführt, in der als Formeln nur Gleichheiten zwischen Termen, zusammengesetzt mit den logischen Operatoren vorkommen. Eine Klasse  $K^{(\alpha)} \subseteq A^{(\alpha)}$  heißt eine Identitätsklasse ( $\in EC$ ) bzw. eine Identitätsklasse i. w. S. ( $\in EC_d$ ), wenn sie aus allen Modellen einer Identität [d. i. eines reinen Allsatzes aus  $\mathfrak{T}(A^{(\alpha)})$ ] bzw. einer Menge solcher Identitäten besteht. Dafür, daß  $K^{(\alpha)} \in EC_d$  gilt, wird ein ganz analoges Kriterium angegeben wie in Theorem II für  $K \in UC_d$ ; es ist mit dem von G. Birkhoff l. c. angegebenen verwandt; vgl. das folgende Referat. — Von der allgemeinen Theorie wird eine wesentliche Anwendung gemacht, in der gezeigt wird, daß die Klasse der repräsentierbaren Relationenalgebren  $\in EC_d$  ist. Dies ist eine teilweise Widerlegung der Ergebnisse von Lyndon, dies. Zbl. 37, 293. Vgl. dazu auch den zweiten Teil der genannten Arbeit: Lyndon, dies. Zbl. 70, 246, woselbst nach entsprechenden Berichtigungen eine Menge von Identitäten effektiv angegeben wird, die die repräsentierbaren Relationenalgebren charakterisieren.

Gert H. Müller.

Chang, Chen-Chung: Some general theorems on direct products and their applications in the theory of models. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 57, 592—598 (1954).

(Für die Terminologie vgl. vorstehendes Referat). Als Hauptlemma wird be-



wiesen: I. Sei  $K^{(\alpha)}$  eine Klasse von  $r$  Syst. und  $\gamma$  eine unendliche Kardinalzahl, so daß  $\alpha < \gamma$ . Dann gilt  $S_\gamma(P(K)) \subset I(S(P_\gamma(K)))$  [ $P(K)$  Klasse aller kardinalen Produkte, gebildet aus Elementen aus  $K$ ]. Beweis unter wesentlicher Verwendung des Auswahlaxioms. II. Sei  $K^{(\alpha)}$  eine Klasse algebraischer Systeme (d. h.  $K^{(\alpha)} \subset A^{(\alpha)}$ ) und  $\gamma > \alpha$  wie oben:  $K^{(\alpha)} \in EC_A$  dann und nur dann, wenn (1)  $H(K) \cap A^{(\alpha)} \subset K^{(\alpha)}$ , (2)  $P_\gamma(K) \subset K^{(\alpha)}$  und (3) für jedes algebraische System  $\mathfrak{A}^{(\alpha)} \in A^{(\alpha)}$  mit  $S_\gamma(\mathfrak{A}^{(\alpha)}) \subset S(K^{(\alpha)})$  folgt  $\mathfrak{A}^{(\alpha)} \in K^{(\alpha)}$ . Ist  $\alpha$  endlich und  $\gamma = \omega$ , so erhält man das oben erwähnte auf anderem Wege von Tarski gefundene Ergebnis. Ist  $\alpha \geq \omega$  und  $\gamma$  eine Kardinalzahl  $> \max(\alpha, \omega)$ , dann kann in Theorem II Bedingung (3) durch (3') ersetzt werden: (3') Für jedes  $\mathfrak{A}^{(\alpha)} \in A^{(\alpha)}$ , für das die Klasse aller endlich generierbaren Subalgebren  $\subset S(K^{(\alpha)})$  ist, folgt  $\mathfrak{A}^{(\alpha)} \in K^{(\alpha)}$ . Einige Verallgemeinerungen für den Fall, daß die betrachteten Algebren auch unendlichstellige Funktionen (d. h. deren Rang  $\geq \omega$  ist) haben, werden abschließend angegeben. *Gert H. Müller.*

Nelson, David: Recursive functions and intuitionistic number theory. Trans. Amer. math. Soc. **61**, 307—368 (1947).

This paper contains detailed proofs of several results mentioned in a paper by S. C. Kleene [J. symbolic Logic **10**, 109—124 (1945)]. Using the notation  $\mathfrak{R}A$  for the formula representing „ $A$  is realizable“ we mention the following results. If  $A$  is a formula of  $S_3$ , then  $\neg \mathfrak{R}A \rightarrow \mathfrak{R} \neg A$  and  $\neg \mathfrak{R}A \rightarrow \mathfrak{R} \neg \neg A$  are provable in  $S_3$ . For the special primitive recursive function  $T_1(x, y, z)$  the formula

$$\neg \mathfrak{R}(\forall x (\forall z \neg T_1(x, x, z) \vee \exists z T_1(x, x, z)))$$

is provable in  $S_3$ . The latter is an incompleteness result. Here  $S_3$  denotes a certain formal system of intuitionistic number theory. *A. Heyting* (Math. Rev. **10**, 3).

Goodstein, R. L.: Logic-free formalisations of recursive arithmetic. Math. Scandinav. **2**, 247—261 (1954).

Verf. stellt ein System der rekursiven Arithmetik in der (logikfreien) Form eines Gleichungskalküls auf, das abgesehen von expliziten und rekursiven Definitionen von Funktionen die folgenden Beweisschemata benutzt:

$$1. \frac{F(x) = G(x)}{F(t) = G(t)} \quad 2. \frac{t = \tilde{s}}{F(t) = F(\tilde{s})} \quad 3. \frac{t = \tilde{s}, \tilde{s} = r}{t = r} \quad 4. \frac{F(x) = H(x, F(x))}{F(x) = H^x(F(0))},$$

wobei  $F(x)$ ,  $G(x)$  rekursive Funktionen und  $t, \tilde{s}, r$  rekursive Terme sind, und  $H^0(y) = y$ ,  $H^x(y) = H(x, H^x(y))$  ist. Danach werden in gut überlegter Weise die rekursive Arithmetik von Anfang an entwickelt und unter anderem die folgenden

$$\text{Schemata und Sätze bewiesen: } \frac{F(x) = F(x)}{F(x) = F(0)}, \quad 5. x + (y \dot{-} x) = y + (x \dot{-} y),$$

das übliche Induktionsschema, das allgemeine Gleichheitsaxiom und eine entsprechende Fassung des Deduktionstheorems. Abschließend werden Varianten zu dem obigen System betrachtet, insbesondere eine solche, die durch Ersetzung von 4. durch

$$\frac{F(0) = 0, F(n) = F(n')}{F(n) = 0} \quad \text{und Hinzunahme von 5. und } a' \dot{-} b' = a \dot{-} b \text{ als Axiome}$$

entsteht. Dieses neue System erweist sich als dem obigen System gleichwertig.

*G. H. Müller.*

Goodstein, R. L.: The recursive irrationality of  $\pi$ . J. symbolic Logic **19**, 267—274 (1954).

Verf. nennt eine Folge rationaler Zahlen  $s_n$  primitiv rekursiv irrational, wenn es primitiv rekursive Funktionen  $n(k)$ ,  $i(p, q) > 0$  und  $N(p, q)$  so gibt, daß

$$1. \quad A_k(n \geq n(k) \rightarrow |s_n - s_{n(k)}| < 2^{-k})$$

$$2. \quad A_p A_q (q > 0 \text{ \& } n \geq N(p, q) \rightarrow |s_n \pm p/q| > 1/i(p, q)).$$

Er gibt eine solche Folge von rationalen Zahlen, die nach  $\pi$  konvergiert, an und gewinnt aus dem Beweis eine primitiv rekursive Abschätzung dafür, wie oft eine Gruppe von Ziffern in der Dezimalbruchentwicklung von  $\pi$  sich wiederholen kann. — Abschließend wird unter Benutzung eines Ergebnisses von Hilbert-Bernays II, S. 279 gezeigt, daß für jedes widerspruchsfreie System der rekursiven Arithmetik



eine beschränkte monotone Folge  $s_n$  angegeben werden kann, derart, daß weder die primitiv-rekursive Irrationalität dieser Folge noch  $\lim s_n = p/q$  in diesem System bewiesen werden kann.

**Goodstein, R. L.:** The relatively exponential, logarithmic and circular functions in recursive function theory. Acta math. 92, 171—190 (1954).

Verf. entwickelt hier [im Anschluß vor allem an seine Arbeit Proc. London Math. Soc. 48, 401—434 (1945), jedoch unabhängig lesbar] einen erheblichen Teil der üblichen Analysis, wie sie im allgemeinen vor allem in der Technik gebraucht wird, im Rahmen der rekursiven Arithmetik, erweitert durch Hinzunahme der rationalen Zahlen und Funktionen von diesen. Es werden eine große Anzahl von den in der Analysis verwendeten Begriffen z. B. Konvergenz, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit in der durch die Beschränkung auf die Genauigkeit bis zur  $k$ -Dezimalstelle gebotenen Verfeinerung definiert und dann die zu erwartenden Sätze in durchsichtiger Weise hergeleitet. Daran schließt sich eine Diskussion der im Titel genannten Funktionen, die im Sinne der genannten Beschränkung rekursiv eingeführt werden; z. B. lautet die Definition der Exponentialfunktion  $E(0, x) = 1$ ,  $E(n+1, x) = E(n, x) + x^{n+1}/(n+1)!$ , worin  $x$  rational ist.

G. H. Müller.

## Algebra und Zahlentheorie.

### Allgemeines. Kombinatorik:

• **Lietzmann, W.:** Sonderlinge im Reich der Zahlen. 2. durchgesehene und vermehrte Aufl. Bonn: Ferdinand Dümmler Verlag 1954. 216 S. 12 Fig.

Vgl. die Besprechung der 1. Aufl. (dies. Zbl. 33, 341). Die 2. Aufl. liegt in erweiterter Gestalt vor, die Einteilung des Buches in 13 Kapitel und die Kapitelüberschriften sind jedoch geblieben. Der Umfang hat sich gegenüber der 1. Auflage um 41 Seiten und 7 Figuren vermehrt. Auch dieser Aufl. wird eine freundliche Aufnahme im Kreis der Liebhaber der Zahlen (und an diese wendet sich das Büchlein) beschieden sein, zumal es dem Verf. gelungen ist, mit seinem bekannten didaktischem Geschick, von einzelnen Beispielen und Besonderheiten der Zifferndarstellung ausgehend, immer wieder auf mathematische Gesetzmäßigkeiten hinzuweisen und so den Leser zum eigenen Nachdenken anzuregen.

H. J. Kanold.

**Riordan, John:** Discordant permutations. Scripta math. 20, 14—23 (1954).

Zwei Permutationen heißen diskordant auf einem Platze, wenn in ihnen auf diesem Platze verschiedene Elemente stehen. Verf. löst die Aufgabe, die Anzahl  $N_{n,k}$  der Permutationen der Zahlen  $1, \dots, n$  zu bestimmen, die zu drei gegeneinander zyklisch um einen Platz verschobenen Permutationen an  $n-k$  Stellen diskordant sind. Es werden Rekursionsformeln für die  $N_{n,k}$  und Näherungswerte für große  $n$  angegeben sowie eine Tabelle der  $N_{n,k}$  für  $n=3, \dots, 10$  und  $k=0, \dots, 10$ . Die Beweise werden sehr durchsichtig und anschaulich gemacht durch die Zurückführung des Problems auf die Frage nach der Anzahl der Möglichkeiten zur Aufstellung sich nicht angreifender Türme auf Schachbrettern geeigneter Größe.

Th. Kaluza.

**Khan, Nisar A.:** On incidence matrices. Ganita 5, Nr. 2, 117—122 (1954).

Es wird hier  $(n, k, \lambda)$ -Problem folgende Aufgabe genannt: es sollen aus einem System von  $n$  gegebenen Elementen  $x_1, x_2, \dots, x_n$   $n$  Teilsysteme  $s_1, s_2, \dots, s_n$  derart ausgewählt werden, daß jedes Teilsystem  $k$  Elemente enthält und daß zwei beliebige Teilsysteme immer  $\lambda = k(k-1)/(n-1)$  Elemente gemein haben ( $0 < \lambda < k < n$ ). Für jede Lösung dieses Problems kann man eine entsprechende Inzidenzmatrix  $A = [a_{ij}]$  der Ordnung  $n$  bilden, so daß  $a_{ij}$  gleich 1 oder 0 gesetzt wird, je nachdem das System  $s_i$  das Element  $x_j$  enthält oder nicht. Man hat  $AA' = A'A = B$ , wo

$A'$  die Transponierte von  $A$  bedeutet und  $B = \begin{bmatrix} k & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & k & \dots & \lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda & \lambda & \dots & k \end{bmatrix}$  ist. Verf. beweist zu-



nächst, daß die charakteristischen Wurzeln von  $B$  die Werte  $k - \lambda$  (mit der Multiplizität  $n - 1$ ) und  $k^2$  haben; es folgt, daß jede charakteristische Wurzel  $z$  von  $A$  die Ungleichungen  $\sqrt{k - \lambda} \leq z \leq k$  befriedigt. Es wird dann  $A$ , verschiedenartig, in ein Produkt von Matrizen zerlegt. Wenn schließlich  $A$  einer Lösung des  $(n, k, \lambda)$ -Problems entspricht, so gilt dasselbe für alle Matrizen  $E_{ij} A$ , wo  $E_{ij}$  aus der Matrix  $I$  durch Vertauschung der Zeilen  $i$  und  $j$  entsteht; man hat so  $\frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$  linear unabhängige Lösungen des gestellten Problems.  
*E. G. Togliatti.*

## Lineare Algebra. Polynome. Formen. Invariantentheorie:

● **Beaumont, R. A. and R. W. Ball:** *Introduction to modern algebra and matrix theory.* New York: Rinehart & Co., 1954. XII, 331 p. \$ 6.—

Das vorliegende Buch ist ein einführendes modernes Lehrbuch der Algebra sowie der Matrixtheorie, das sich, wegen seines elementaren Charakters, an den Anfänger wendet. Die Verff. bemühen sich, den Stoff in der für den Anfänger geeigneten Form darzustellen. Sie legen Wert auf die anschauliche Komponente der Mathematik. Die abstrakten Grundbegriffe werden zuerst an konkreten Gegenständen verständlich gemacht. Man findet ausführlich durchgeführte, numerische, erläuternde Beispiele und zahlreiche Aufgaben durch das ganze Buch hindurch, die dem Leser Gelegenheit geben, die allgemeine Theorie auf konkrete Probleme anzuwenden. Inhalt des Buches: Kapitel I enthält die Algebra der Matrizen und die Determinantentheorie einschließlich der Laplaceschen Entwicklung. (Die Elemente der Matrizen sind gewöhnliche Zahlen.) Mittels Gruppen von Transformationen wird in Kapitel II der Gruppenbegriff (von Transformationen) eingeführt und die Äquivalenz von Matrizen behandelt. Es sei  $M$  die Menge aller  $(m, n)$ -reihigen Matrizen. Eine durch  $T(A) = P A Q$  ( $A \in M$ ) definierte Abbildung von  $M$  auf sich, wo  $P$  bzw.  $Q$   $m$ - bzw.  $n$ -reihige quadratische Matrizen mit nichtverschwindender Determinante sind, heißt äquivalente Transformation von  $M$ . Die durch die Gruppe der äquivalenten Transformationen induzierte Äquivalenzrelation von Matrizen aus  $M$  wird durch die Übereinstimmung ihrer Ränge charakterisiert. Die Resultate werden auf die Lösung der linearen Gleichungen angewandt. Vektorräume werden behandelt in Kapitel III. Eine Einleitung zur abstrakten Gruppentheorie wird im Kapitel IV gegeben. In Kapitel V werden Ringe, Integritätsbereiche und Körper eingeführt und systematisch entwickelt. In Kapitel VI werden der Begriff der algebraischen bzw. transzendenten Körpererweiterungen erklärt und Polynome sowie die algebraische Theorie der Körper behandelt. Matrizen, deren Elemente Polynome sind, befinden sich in Kapitel VII, und der Elementarteilersatz, der Cayley-Hamiltonsche Satz und das Minimalpolynom einer quadratischen Matrix im Körper werden aufgestellt. In Kapitel VIII werden schließlich Normalformen der Matrizen für verschiedene Gruppen von äquivalenten Transformationen, d. h. Normalformen von bilinearen Formen, quadratischen Formen und Hermiteschen Formen durch lineare Transformationen, sowie Normalformen von reell-quadratischen bzw. Hermiteschen Formen durch orthogonale bzw. unitäre Transformationen aufgestellt. Das Buch ist für den Anfänger gut lesbar und den Studierenden soll mit diesem Buch die Möglichkeit geboten werden, sich mit den Anfangsgründen der modernen Algebra vertraut zu machen und das Verständnis für genaue mathematische Formulierungen und Beweisführungen zu erwerben. Die Verf. haben so einen wertvollen Beitrag zur Lehrbuchliteratur über moderne Algebra geliefert.  
*K. Asano.*

● **Myller-Lebedev, Vera:** *Vorlesungen über Algebra.* Bucureşti: Editura Academiei Republicii Populare Române 1953. 395 S. [Rumänisch].

Introduction: Opérations rationnelles avec des entiers et quelques notions qui découlent de la discussion des opérations (groupe, anneau, corps). Première partie; Algèbre générale: I. Combinaisons, II. Déterminants, III. Relations et équations



linéaires, IV. Substitutions linéaires, formes linéaires, matrices, V. Formes bilinéaires, VI. Formes quadratiques et hermitiennes, VII. Notions de nombre complexe et réel, VIII. Fonctions continues, racines d'un polynôme. IX. Racines réelles d'un polynôme, X. Fonctions symétriques, XI. Divisibilité des polynômes en une ou plusieurs variables, XII. Élimination d'une variable de deux polynômes et résolution d'un système de deux équations en deux inconnues, XIII. Éliminations de plusieurs équations. Résolution d'un système en plusieurs inconnues. Théorème de Bézout, XIV. Transformation des équations, XV. Résolution des équations du 3<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup> degré, XVI. Equation binôme, XVII. Impossibilité de résoudre par radicaux l'équation générale de degré  $> 4$ , XVIII. Existence des racines d'une équation. Deuxième partie; Théorie des groupes et ses applications aux équations algébriques (Théorie de Galois): I. Substitutions à  $n$  lettres, II. Groupes de substitutions à  $n$  lettres. III. Applications de la théorie des groupes à la résolution des équations (Théorie de Galois). IV. Quelques problèmes classiques résolubles géométriquement à l'aide de la règle et du compas. Une troisième partie contient un recueil d'exercices relatifs à la matière traitée dans les leçons ci-dessus. — *M. Haimovici.*

**Davis, Chandler:** *Theory of positive linear dependence.* Amer. J. Math. **76**, 733—746 (1954).

A set of vectors in real euclidean  $n$ -space  $E^n$  is said to be positively independent if there exists no linear relation between them having only non-negative coefficients. As part of a larger theory of positive linear dependence (the central ideas of which go back to Minkowski), the author attempts to classify those sets of positively independent vectors whose positive linear combinations yield all of  $E^n$ . Numerical examples for low values of  $n$  are given in the last section of the paper.

*M. Gerstenhaber.*

**Stojaković, Mirko:** *Sur une propriété des matrices quasiinverses.* Bull. Soc. Math. Phys. Serbie **6**, 154—157 u. serb. Zusammenfassg. 157 (1954).

Zu einer Matrix  $a$  vom Rang  $r$  mit  $r$  Zeilen und  $s$  Spalten ( $r \leq s$ ) sei eine rechtsinverse Matrix  $b$  konstruiert, so daß also  $ab$  die  $r$ -reihige Einheitsmatrix ergibt. Die Matrix  $ba = e$  ist dann zwar im allgemeinen keine Einheitsmatrix, jedoch hat Verf. schon früher (dies. Zbl. **50**, 10) festgestellt, daß sie gewisse Eigenschaften einer solchen besitzt. Er hat sie deshalb auch Quasi-Einheitsmatrix und  $b$  eine linke Quasi-Inverse von  $a$  genannt. Unter anderem ist  $\lambda^{s-r}(\lambda - 1)^r$  das charakteristische Polynom von  $e$ . Dafür wird hier ein Beweis nebst einem Zahlenbeispiel gegeben. — In letzterem muß es bei  $b$ , 1. Zeile, — 5 statt 5, letzte Zeile 5 statt 3, bei  $e$ , letzte Zeile, 6, — 13 und 12 statt 0, — 15 und 10 heißen. Im Titel und in der ersten Zeile des Textes sollte quasiunité statt quasiinverse stehen.

*E. Schönhardt.*

**Gyires, Béla:** *Über die Grenzwerte von Matrizen, die der Cauchyschen Funktionalgleichung genügen.* Acta Univ. Debrecen. Ludovico Kossuth **1**, 136—144 (1954) [Ungarisch], deutsche Zusammenfg. ibid., Addit. ad **1**, 19 (1955).

Es sei  $A(t)$  eine quadratische Matrix von der Ordnung  $n$  mit Elementen  $a_{ik}(t)$ , die im Intervall  $[0, \infty)$  erklärte, überall stetige und im Punkt 0 differenzierbare Funktionen von  $t$  sind. Außerdem genüge  $A(t)$  den Bedingungen: 1.  $A(t_1 + t_2) = A(t_1)A(t_2)$  für alle  $t_1, t_2$ ; 2.  $A(0)$  ist die Einheitsmatrix. Verf. gibt notwendige und hinreichende Bedingungen, damit der Grenzwert  $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = A$  existiere.

Dies sind: a) jeder Eigenwert von  $A(1)$  ist entweder gleich 1, oder dem Betrag nach kleiner als 1; b) die zum Eigenwert 1 gehörigen Elementarteiler von  $A(1)$  sind linear. In diesem Falle kann die Grenzmatrix  $A$  durch  $A = PDP^{-1}$  gegeben werden, wo  $D$  eine Diagonalmatrix mit Elementen  $1, \dots, 1, 0, \dots, 0$  bedeutet (1 tritt so oft auf, wie die Vielfachheit des Eigenwertes 1 von  $A(1)$  beträgt) und  $P$  eine Matrix ist, die  $[A'(t)]_{t=0}$  in Jordansche Normalform transformiert.

*L. Fuchs.*



**Marathe, C. R.:**  $\mu$ -matrices. Capita 5, Nr. 2, 153—173 (1954).

In Verallgemeinerung eines von Jackson (dies. Zbl. 51, 39) stammenden Begriffs wird eine Matrix  $(p_{mn})$  ( $m = 1, \dots, M; n = 1, \dots, N$ ) mit reellen  $p_{mn}$  als Pseudo- $\mu$ -Matrix bezeichnet, wenn aus  $p_{m_1 n_1} < \mu < p_{m_{k+1} n_{k+1}}$  ( $i = 1, \dots, k$ ) stets  $m_{k+1} = m_1$  folgt. Durch Umordnen der Zeilen und Spalten kann eine Pseudo- $\mu$ -Matrix in eine Matrix  $(r_{st})$  ( $m = 1, \dots, M; n = 1, \dots, N$ ) mit den folgenden Eigenschaften übergeführt werden: Wenn  $r_{st} > \mu$ , so  $r_{mn} > \mu$  für  $m = s, n = t$ ; wenn  $r_{st} < \mu$ , so  $r_{mn} < \mu$  für  $m = s, n = t$ . Ferner kann man so umordnen, daß diese Eigenschaften unter Vertauschen von  $> \mu, < \mu$  mit  $< \mu, > \mu$  gelten. Stimmen beide so umgeordneten Formen der Matrix überein, so wird die Matrix als  $\mu$ -Matrix bezeichnet. Eine solche liegt genau dann vor, wenn keine Zeile und keine Spalte sowohl ein Element  $< \mu$  wie ein Element  $> \mu$  enthält. In einer quadratischen nicht-singulären  $\mu$ -Matrix gibt es gleichviel Zeilen und Spalten, die ein Element  $> \mu (< \mu)$  enthalten. Zum Schluß werden einige Sätze über orthogonale und pseudo-orthogonale  $\mu$ -Matrizen hergeleitet.

G. Pickert.

**Sostak, R. Ja.:** Über ein Kriterium für die bedingte Definitheit einer quadratischen Form von  $n$  Veränderlichen, die linearen Bindungen unterworfen sind, und über ein hinreichendes Kriterium für ein bedingtes Extremum einer Funktion von  $n$  Veränderlichen. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 2, 199—206 (1954) [Russisch].

Es sei  $A = (a_{ij})$  eine reelle symmetrische  $(n \times n)$ -Matrix. Zwischen den Variablen  $x_1, \dots, x_k$  mögen  $k$  lineare homogene unabhängige Bedingungsgleichungen  $\sum_{j=1}^n b_{ij} x_j = 0$  ( $i = 1, \dots, k$ ) mit der Matrix  $B = (b_{ij})$  ( $i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, n$ ) bestehen. Es wird nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür gefragt,

daß die quadratische Form  $U(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$  positiv definit unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen bleibt. Hierzu betrachte man die quadratische Matrix der Ordnung  $k+n$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & B \\ B & A \end{pmatrix}$ , wo 0 eine aus Nullen bestehende  $(k \times k)$ -Matrix ist. Dann besteht die gesuchte Bedingung darin, daß alle Hauptminoren dieser Matrix von den Ordnungen  $\geq 2k$  positiv sind. Das damit gewonnene Kriterium läßt sich auf das Problem der Aufstellung hinreichender Bedingungen für das Extremum einer Funktion von  $n$  Variablen mit  $k$  Nebenbedingungen anwenden. Der Fall von  $k$  linearen inhomogenen Bedingungen wird auf den homogenen Fall durch Einführung einer homogenisierenden Variablen zurückgeführt. Zum Schluß sagt der Verf., daß auf analoge Weise auch die Frage nach der Definitheit der quadratischen Form  $U$  unter Zugrundelegung von  $k$  linearen, homogenen Ungleichungen erledigt werden kann. Leider wird diese Andeutung weiter nicht ausgeführt.

A. Ostrowski.

**Ostrowski, A. M.:** On the spectrum of a one-parametric family of matrices. J. reine angew. Math. 193, 143—160 (1954).

Es sei  $A$  eine quadratische Matrix. Bei numerischer Rechnung muß man oft die Verhältnisse  $\lambda_1(A) = \max |A x|, \lambda_2(A) = \min |A x|, |x| = 1$ , berechnen. Offenbar ist  $\lambda_1(A)$  die größte,  $\lambda_2(A)$  die kleinste positive Quadratwurzel der Eigenwerte von  $A^* A$ . Der Verf. betrachtet den nicht trivialen Fall  $A = D_x^{(n)}$ , wobei alle Elemente der Diagonale gleich  $x$ , alle Elemente darüber gleich 0, alle Elemente darunter gleich 1 sind. Verf. berechnet die Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  von  $A^* A$ . Diese sind alle verschieden. Setzt man  $\hat{\lambda}_x = \lambda^2 = x + r_x(x)$ , so findet Verf. einen expliziten Ausdruck (mittels Tschebyschev'scher Polynome) für ein Polynom, dem  $r_x(x)$  genügt. Verf. findet auch asymptotische Formeln, z. B.

$$\lambda(A) = \alpha - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \alpha^{-1} \tan^2 \frac{1}{2} \pi n^{-1} + O(\alpha^{-2}), \alpha \rightarrow \infty;$$

$$\lambda(A) = \alpha + \frac{1}{2} (n-1) + \frac{1}{24} (n^2-1) \alpha^{-1} + O(\alpha^{-2}), \alpha \rightarrow \infty;$$



auch Formeln für  $\lambda(A)$ ,  $\lambda(A)$  bei  $\alpha = 0, \frac{1}{2}, 1$ :  $\lambda(A) = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4n+2}$ ,  $\lambda(A) = \frac{1}{2} \sec \frac{\pi}{2n+1}$  ( $\alpha = 1$ ). Bei  $\alpha > 0$  nimmt  $\lambda(A)$  monoton zu; bei  $\alpha < 0$  nimmt  $\lambda(A)$  monoton ab. Die beiden anderen Fälle bleiben unentschieden. *J. L. Brenner.*

**Brenner, J. L.:** Orthogonal matrices of modular polynomials. *Duke math. J.* **21**, 225—231 (1954).

Gegenstand dieser Untersuchungen ist die Gruppe  $O(n, p)$  aller  $n$ -reihigen Orthogonalmatrizen, deren Elemente dem Polynomring über dem Primkörper  $P_p$  von Primzahlcharakteristik  $p$  angehören. Eine Matrix  $M$  heißt dabei orthogonal, wenn ihre Inverse mit der Transponierten  $M'$  übereinstimmt; eine  $n$ -reihige Orthogonalmatrix  $M$  besitzt die Dimension  $m \leq n$ , wenn in ihrer Hauptdiagonalen  $n - m$  Einsen auftreten. — Im Falle  $p = 2$  läßt sich die (abelsche) Gruppe  $O(2, 2)$  genau bestimmen. In der Gruppe  $O(4, 2)$  erzeugen die Matrizen der Dimension 2 einen echten Normalteiler. Die anderen Gruppen  $O(n, 2)$  lassen sich durch die  $n$ -reihigen Orthogonalmatrizen der Dimensionen 2 und 4 erzeugen. — Verallgemeinerung dieser Aussagen auf einen beliebigen Koeffizientenkörper  $K_2$  der Charakteristik  $p = 2$ . — Im Falle  $p > 2$  existieren keine nichtkonstanten 2-reihigen Orthogonalmatrizen; es lassen sich aber für jeden Grad  $n > 2$  nichtkonstante Orthogonalmatrizen aus  $O(n, p)$  angeben. Nur die konstanten  $n$ -reihigen Orthogonalmatrizen sind bisher vollständig bekannt. *W. Specht.*

**Finzel, Lothar:** Untersuchungen über die wahrscheinliche Lage der Wurzeln reeller algebraischer Gleichungen. *Math. Nachr.* **11**, 85—104 (1954).

Im Anschluß an Untersuchungen des Ref. (dies. Zbl. **42**, 14) für Klassen komplexer Polynome beschäftigt sich Verf. mit der gleichen Fragestellung für Klassen reeller Polynome. Ordnet man jedem reellen Polynom  $f(x) = x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots \pm a_n$  den Punkt  $(a) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  des  $n$ -dimensionalen euklidischen Raumes  $\mathbb{E}_n$  zu, so entspricht jeder abgeschlossenen beschränkten Teilmenge  $\mathfrak{K} \subset \mathbb{E}_n$  mit positivem Jordan-Maß  $J_n(\mathfrak{K})$  eine Klasse  $\mathfrak{K}$  reeller Polynome. Wählt man nun aus  $\mathfrak{K}$  die Menge  $\mathfrak{K}(B)$  aller Polynome  $f(x)$  aus, deren Nullstellen gewissen Bedingungen  $(B)$  unterliegen, und existiert das Jordan-Maß  $J_n(\mathfrak{K}(B))$  der zugeordneten Teilmenge  $\mathfrak{K}(B) \subset \mathbb{E}_n$ , so kann der Quotient

$$\mu(B) = J_n(\mathfrak{K}(B))/J_n(\mathfrak{K})$$

als Maß für die Wahrscheinlichkeit angegeben werden, daß ein Polynom  $f(x) \in \mathfrak{K}$  den Bedingungen  $(B)$  genügt. In diesem Gedankenkreis werden Wahrscheinlichkeitsmaße dafür bestimmt, daß ein Polynom  $f(x) \in \mathfrak{K}$  genau  $l$  reelle Nullstellen besitzt, daß bestimmte Zahlen zugleich Nullstellen eines Polynoms  $f(x) \in \mathfrak{K}$  sind, und dergleichen mehr. Die Beschränkung auf Klassen reeller Polynome erschwert die Untersuchung sehr, im Gegensatz zu den vergleichsweise einfacheren Verhältnissen bei Klassen komplexer Polynome. *W. Specht.*

**Kochler, Fulton:** Bounds for the moduli of the zeros of a polynomial. *Proc. Amer. math. Soc.* **5**, 414—419 (1954).

Besitzt das komplexe Polynom  $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$  (mit  $a_0 a_n \neq 0$ ) die der Größe  $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_n|$  nach geordneten Nullstellen  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , so bestehen nach Ostrowski (dies. Zbl. **23**, 334) Abschätzungen  $b_k^n R_k \leq |z_k| \leq B_k^n R_k$  (für  $1 \leq k \leq n$ ) mit gewissen nur von  $k, n$  abhängigen positiven Konstanten  $b_k^n$ ,  $B_k^n$  und positiven, aus dem Newton-Diagramm von  $f(z)$  erhältlichen Größen  $R_k$ . Es bestehen die Gleichungen  $B_k^n b_{n-k+1}^n = 1$ . In Ergänzung zu den Untersuchungen von Ostrowski zeigt Verf., daß die Konstante  $b_k^n$  die positive Nullstelle des Polynoms  $1 = \binom{k}{1} x + \binom{k+1}{2} x^2 + \dots + \binom{n}{n-k+1} x^{n-k+1}$  ist. *W. Specht.*



**Chamberlin, E. and J. Wolfe:** Note on a converse of Lucas's theorem. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 203—205 (1954).

Die Nullstellen eines Polynoms  $p(z)$  vom Grade  $n > 0$  bestimmen durch ihre konvexe Hülle (in der komplexen Zahlenebene) das Lucas-Polygon  $\pi$  des Polynoms  $p(z)$ ; das Lucas-Polygon  $\pi'$  der Ableitung  $p'(z)$  gehört nach einem Satze von Gauß-Lucas dem Polygon  $\pi$  an. Bestimmt man andererseits zu einem Polynom  $p'(z)$  mit dem Lucas-Polygon  $\pi'$  sämtliche Stammpolynome  $p(z) + c$  und ihre Lucas-Polygone  $\pi(c)$ , so ist der Durchschnitt  $\pi_0$  aller Polygone  $\pi(c)$  ein kompakter konvexer Bereich, der  $\pi'$  einschließt, aber nicht immer mit  $\pi'$  übereinstimmt. Jeder Randpunkt von  $\pi_0$  ist Randpunkt eines Polygons  $\pi(c)$ . Es lassen sich Bedingungen angeben dafür, daß ein Polygon  $\pi(c)$  einen Randpunkt mit  $\pi_0$  gemeinhat. W. Specht.

**Hörmander, Lars:** On a theorem of Grace. Math. Scandinav. **2**, 55—64 (1954).

Verf. gibt dem berühmten Satz von J. H. Grace aus der Theorie der komplexen Polynome eine allgemeine abstrakte Fassung. Bezeichnet  $\mathfrak{B}$  einen Vektorraum über einem Körper  $K$  der Charakteristik 0, so heißt eine in  $\mathfrak{B}$  erklärte Funktion  $P(x)$  mit Werten aus  $K$  homogenes Polynom vom Grade  $n$ , wenn für beliebige  $x, y \in \mathfrak{B}$  und  $s, t \in K$  die Funktion  $P(sx + ty)$  in  $s, t$  homogenes Polynom vom Grade  $n$  (im üblichen Sinne) ist. Zu jedem homogenen Polynom  $P(x)$  in  $\mathfrak{B}$  vom Grade  $n$  existiert genau eine Polarform  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , d. h. eine Funktion von Argumenten  $x_v \in \mathfrak{B}$  mit Werten aus  $K$  und folgenden Eigenschaften:  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ist symmetrisch in allen Argumenten und linear in jedem einzelnen Argument; für jedes  $x \in \mathfrak{B}$  gilt  $P(x, x, \dots, x) = P(x)$ . Ist  $K$  algebraisch abgeschlossen, so kann in  $K$  ein reellabgeschlossener Körper  $K_0$  ausgezeichnet und  $K = K_0(i)$  gesetzt werden. Als hermitesche Form werde dann eine Funktion  $H(x, y)$  in Argumenten  $x, y \in \mathfrak{B}$  mit Werten aus  $K$  bezeichnet, die bei festem  $y$  in  $x$  linear ist und der Gleichung  $H(x, y) = \overline{H(y, x)}$  genügt. Die allgemeine Fassung des Graceschen Satzes hat dann folgenden Wortlaut: Es sei  $\mathfrak{B}$  ein Vektorraum über dem algebraisch-abgeschlossenen Körper  $K$ . Es sei  $P(x)$  ein homogenes Polynom vom Grade  $n$  und  $H(x, y)$  eine hermitesche Form in  $\mathfrak{B}$  mit Werten aus  $K$ . Es sei  $P(x)$  von Null verschieden für jedes (von Null verschiedene)  $x \in \mathfrak{B}$ , dessen Wert  $H(x, x)$  nichtnegativ ist. Dann ist auch  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  von Null verschieden, wenn die Argumente  $x_v$  von Null verschieden sind und nichtnegative Werte  $H(x_v, x_v)$  besitzen. — Die Realisierung der Voraussetzung ist genau dann möglich, wenn kein zweidimensionaler Teilraum von  $\mathfrak{B}$  existiert, in dem  $H(x, x)$  nichtnegativ ist, und wenn ein  $x \in \mathfrak{B}$  mit positivem Wert  $H(x, x)$  existiert, d. h. wenn die Form  $H(x, y)$  Lorentz-Signatur besitzt. — Dieser Satz kann noch weiter verallgemeinert werden auf homogene Polynome im Vektorraum  $\mathfrak{B}$  über  $K$ , deren Werte einem anderen Vektorraum  $\mathfrak{B}$  über  $K$  angehören. — Für weitere Einzelheiten und Anwendungen muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. W. Specht.

**Geronimus, Ja. L.:** Über einige asymptotische Eigenschaften der Polynome. Mat. Sbornik, n. Ser. **23** (65), 77—88 (1948) [Russisch].

The author gives various conditions on the set of polynomials (1)  $P_n(z) = \prod_{i=1}^n [z - z_i^{(n)}]$  that are necessary and sufficient for the quantity  $\lim_{n \rightarrow \infty} |P_n(z)|^{1/n}$  to exist uniformly in certain sets. His work is based on a theorem by Walsh (this Zbl. **13**, 59) to the effect that if  $C$  is a bounded closed set containing all limit points of the set  $F$  of zeros of the polynomials (1), and having a connected regular complement, the condition  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n^{1/n} = d$  is necessary and sufficient for the relation  $\lim_{n \rightarrow \infty} |P_n(z)|^{1/n} = d|q(z)|$  to hold uniformly on any bounded closed set exterior to  $C$ ; here  $M_n = \max |P_n(z)|$  ( $z$  on  $C$ ),  $d$  is the transfinite diameter of the set  $F$ , and  $q(z)$  is the complex Green's function of the complement of  $C$ , with pole at infinity. The principal results are the following. Let  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$ , where  $\mathcal{C}_0$  is a discrete denumerable



set; where  $\mathcal{E}_1$  consists of analytic arcs whose lengths are bounded away from zero; and where  $\mathcal{E}_2$  consists of closed regions exterior to  $\mathcal{E}_1$ , of area bounded away from zero, and with boundaries that consist of a smooth Jordan curve or several smooth Jordan arcs intersecting at nonzero angles. Let  $C$  be the boundary of the set  $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ ; let  $\sigma(e)$  be a completely additive nonnegative mass function of sets on  $\mathcal{E}$ ; let  $m(z_0, \delta)$  denote the mass in the intersection of the circle  $|z - z_0| \leq \delta$  with the set  $\mathcal{E}$ , and let  $a(\delta) = \inf m(z_0, \delta)$  ( $z_0$  on  $C$ ). Finally, let  $P_n(z)$  be the polynomial that minimizes the integral over  $\delta$ ,  $\int |z^n + \dots + 1|^k d\sigma$  ( $k \geq 1$ ). A necessary and sufficient condition for the equation (2)  $\lim_{\delta \rightarrow 0} M_n^{1/n} = d(C) = d(\mathcal{E})$  to hold is that  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \{\delta^{1/2} \log a(\delta)\} = 0$ .

If the mass distribution on the set  $\mathcal{E}$  described above is normal, equation (2) is satisfied.

G. Piranian (Math. Rev. 10, 190).

Obrechhoff, N.: Sur les zéros de quelques fonctions rationnelles et réelles. C. r. Acad. Bulgare Sci. 7, Nr. 2 1–4 u. französ. Zusammenfassg. 4 (1954) [Russisch].

On considère

$$(1) \quad R(z) = A_1/(z - a_1) + \dots + A_m/(z - a_m) - B_1(1/(z - c_1) - 1/(\bar{c}_1)) - \dots - B_p(1/(z - c_p) + 1/(\bar{c}_p)),$$

où  $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_p$  sont des nombres positifs,  $a_1, a_2, \dots, a_m$  sont réels et  $c_1, \bar{c}_1, c_2, \bar{c}_2, \dots, c_p, \bar{c}_p$  sont des nombres complexes,  $\bar{c}$  désignant le nombre conjugué de  $c$ . On démontre quelques résultats concernant les zéros de (1). Par exemple: Supposons que  $a_1, \dots, a_m$  sont des pôles réels simples, tels que  $a_i < a_{i+1}$  pour  $1 \leq i < m$ . Posons

$$\eta = a_k + \frac{A'_k}{A' + A_{k+1}}(a_{k+1} - a_k), \quad \text{où } A' = \sum_{s=1}^k A_s + 2 \sum_{r=1}^p B_r$$

et supposons que sur le disque  $K$  ayant pour diamètre le segment  $[a_j, \eta]$  la fonction  $R(z)$  donnée par (1) n'a aucun pôle imaginaire. Alors,  $R(z)$  possède au moins un zéro réel, situé sur l'intervalle  $(a_k, \eta)$ .

S. Marcus.

## Gruppentheorie:

Rédei, L. und O. Steinfeld: Gegenseitige Schreiersche Gruppenerweiterungen. Acta Sci. math. 15, 243–250 (1954).

Unter einer gegenseitigen Erweiterung zweier gegebener Gruppen  $G$  und  $F$  wird eine Gruppe  $B$  verstanden, die gleichzeitig als Erweiterung von  $G$  mit  $F$  und als Erweiterung von  $F$  mit  $G$  aufgefaßt werden kann. Damit man nicht nur den trivialen Fall des direkten Produktes erhält, wird von vornherein angenommen, daß der Durchschnitt der zu  $G$  und  $F$  isomorphen Normalteiler nicht nur aus dem Einselement besteht. Es wird ein vollständiges System von Bestimmungsstücken für die gegenseitigen Erweiterungen angegeben. Neben den Automorphismen und Faktorensystemen der beiden Erweiterungen treten weitere vier Funktionen der Elemente von  $G$  bzw.  $F$  auf, die untereinander durch mehrere Relationen verknüpft sind.

R. Kochendörffer.

Chen, Kuo-Tsai: Iterated integrals and exponential homomorphisms. Proc. London math. Soc., III. Ser. 4, 502–512 (1954).

Es sei  $E$  ein Euklidischer Raum mit Koordinaten  $x_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) und  $\alpha$  eine orientierte Kurve, gegeben durch  $x_i = x_i(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ ; die Ableitungen  $\dot{x}_i(t) = dx_i/dt$  sollen fast überall stetig, beschränkt und  $\neq 0$  sein. Für  $a \leq c \leq u \leq b$  sei  $\alpha^c$  der Teil von  $\alpha$  zwischen  $t = a$  und  $t = c$  und  $\alpha_c^u$  der Teil zwischen  $t = c$  und  $t = u$ . Es sei  $I_i(\alpha) = \int_a^b dx_i = x_i(b) - x_i(a)$  und, rekursiv, für  $p \geq 2$ :  $I_{i_1, \dots, i_p}(\alpha)$

$= \int_a^b I_{i_1, \dots, i_{p-1}}(\alpha^t) dx_{i_p}$ . Die im Ursprung des Koordinatensystems beginnenden Kurven



können durch Parallelverschiebung der Anfangsparameter aneinander gesetzt werden und bilden dann eine Halbgruppe. Aus dieser entsteht eine Gruppe  $\mathfrak{P}$ , indem eine Kurve zusammengesetzt mit der entgegengesetzt orientierten Kurve als äquivalent mit der Nullkurve betrachtet wird und damit Äquivalenzklassen in der Halbgruppe eingeführt werden. Verf. zeigt, daß die Kurvenklassen  $\langle \lambda \rangle$ , für die  $I_{i_1, \dots, i_q}(\langle \lambda \rangle) = 0$  für alle  $i_1, \dots, i_q$  mit  $q \leq p$  gilt, einen Normalteiler  $\mathfrak{P}_p$  von  $\mathfrak{P}$  bilden. Nun seien  $X_\mu$  ( $\mu = 1, \dots, m$ ) freie Erzeugende einer freien assoziativen Algebra  $W$  mit Einheits- element und den reellen Zahlen als Koeffizientenbereich. Dann definiert die Ab- bildung

$$\theta(\langle \lambda \rangle) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \sum I_{i_1, \dots, i_p}(\lambda) X_{i_1} \cdots X_{i_p}$$

einen (multiplikativen) Homomorphismus von  $\mathfrak{P}$  in die multiplikative Gruppe der Elemente  $1 + \sum_{p=1}^{\infty} \sum \mu_{i_1, \dots, i_p} X_{i_1} \cdots X_{i_p}$  aus  $W$ . Der Verf. vermutet, daß dieser Homomorphismus eine isomorphe Abbildung ist. Verf. verallgemeinert seine Konstruktion und definiert eine homomorphe Abbildung des freien Produktes  $H$  von Gruppen  $H_\mu$  ( $\mu = 1, \dots, m$ ) auf eine multiplikative Gruppe von Elementen in einer Algebra  $W(K)$  mit Einselement, freien Erzeugenden  $X_\mu$  und Koeffizienten aus einem Ring  $K$ . Hierbei sind die  $H_\mu$  Untergruppen der additiven Gruppe von  $K$ , und  $K$  ist ein Ring, der den Körper der rationalen Zahlen enthält. Für diese Ab- bildungen wird eine Reihe von Resultaten bewiesen; insbesondere wird ein Zu- sammenhang mit der absteigenden Zentralreihe in freien Gruppen nachgewiesen.  
*W. Magnus.*

**Plotkin, B. I.:** Über einige Kriterien für lokal nilpotente Gruppen. Uspechi mat. Nauk **9**, Nr. 3 (61), 181–186 (1954) [Russisch].

Let  $a$  and  $g$  be elements of a group  $G$ . If for a given  $a$  and for every  $g \in G$  the repeated commutator  $[g, a, a, \dots, a] = 1$  for sufficiently many terms  $a$ , then  $a$  is called a weakly central element (Schenkman) or an Engel element (Gruenberg) or a nilelement (Plotkin). A group in which all the elements are nilelements is called a nilgroup. Baer uses this term in a slightly narrower sense (this Zbl. **66**, 13.) A locally nilpotent group is, obviously, a nilgroup, and the central outstanding problem, in group theory as well as in the analogous situation in Lie algebras, is to prove or disprove the converse statement. The object of the present paper is to give some additional conditions which will make a nilgroup locally nilpotent. The first main result is the theorem: A nilgroup with an ascending soluble series (of finite or infinite length) is locally nilpotent. As a corollary the author obtains a new and elegant proof of the well known fact that a finite nilgroup is nilpotent. The theorem also includes Gruenberg's result (this Zbl. **50**, 19) that a finitely generated soluble nilgroup (Engel group) is nilpotent. Next the author proves that every group with a category is locally nilpotent. Here a group with a category is defined (P. G. Kon- torovič; this Zbl. **42**, 17) as belonging to one of the classes  $A^{(n)}$ , where  $A^{(0)}$  is the class of all abelian groups, and  $A^{(n-1)}$  the class of groups that can be covered by normal subgroups belonging to classes  $A^{(i)}$  with  $j \leq i$ . The next theorem shows that a nilgroup  $G$  whose abelian subgroups are all finite is itself finite and nilpotent. The proof makes use of the lemma that in a nilgroup every finite subgroup differs from its normalizer. A similar proof yields the theorem that a torsion-free nilgroup in which all the abelian subgroups have finite rank is itself nilpotent and has finite special rank (in the sense of A. I. Mal'cev; this Zbl. **37**, 150). In particular, a torsion-free nilgroup is nilpotent if it satisfies the maximal or the minimal condition for sub- groups or if it is locally of finite special rank. The latter condition is also necessary. Next the author proves an important theorem that has become the starting point of many further investigations: In every group the product of two locally nilpotent normal subgroups is itself locally nilpotent. Hence every group  $G$  has a unique

maximal locally nilpotent normal subgroup  $R(G)$  which the author calls in later papers the nil-radical of  $G$ . This leads to a proof of the theorem that a group in which every proper subgroup differs from its normalizer is locally nilpotent. [A different proof of the theorem on the product of two locally nilpotent normal subgroups, with the same conclusion that the normalizer condition implies local nilpotence, is contained in a paper by the reviewer (this Zbl. 65, 9).]

K. A. Hirsch.

**Plotkin, B. I.:** Über das Nilradikal einer Gruppe. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 98, 341—343 (1954) [Russisch].

Let  $G$  be a group and  $R(G)$  its nil-radical. (For the definition of this and other terms see the preceding review.) Clearly, every element of  $R(G)$  is a nilelement, and the problem arises whether the converse is true. That this is the case in finite soluble groups has been proved by Schenkman (this Zbl. 50, 255). The author gives some more general cases in which  $R(G)$  consists of all the nilelements of  $G$ . A nilseries of  $G$  is an ascending series of normal subgroups  $1 = N_0 < N_1 < \dots < N_\alpha < N_{\alpha+1} < \dots < N_\gamma = G$  in which the factorgroups are locally nilpotent with the obvious provision for limit subscripts. In particular if for every  $\lambda$   $N_{\alpha+1}/N_\alpha = R(G/N_\alpha)$ , we have the nilradical series which is of the shortest possible length. The author proves that  $R(G)$  coincides with the set of all nilelements if  $G$  has a nilradical series; or if  $G$  has an ascending normal soluble series (possibly of transfinite length); or if  $G$  is locally soluble.

K. A. Hirsch.

**Krull, Wolfgang:** Über die Hauptreihen gewisser endlicher Gruppen. Acta Salmantic., Ci., Sec. Mat. 5, 13 S. (1954).

Verf. beweist einige bedeutende Sätze über überauflösbare Gruppen unter Heranziehung der Theorie linearer Vektorräume und gibt weittragende Erweiterungen eines vom Ref. aufgestellten Satzes (dies. Zbl. 43, 254) an. Die wichtigsten Sätze, zu denen der Verf. gelangt, sind die folgenden: Eine Gruppe der Ordnung  $p^n \cdot r$  ( $p-1 \equiv 0(r)$ ) ist stets überauflösbar, wenn die Faktorgruppe nach ihrer  $p$ -Sylowgruppe zyklisch ist. Besitzt eine Gruppe  $G_{p^n q^m}$  der Ordnung  $p^n q^m$  ( $p, q$  teilerfremde Primzahlen) eine einzige  $p$ -Sylowgruppe  $G_{p^n}$  und ist der kleinste positive Exponent  $s$ , für den  $p^s \equiv 1(q)$  wird, größer als  $n$ , so ist  $G_{p^n q^m}$  stets überauflösbar und es ist jede Untergruppe  $p$ -ter Ordnung des Zentrums von  $G_{p^n}$  auch Untergruppe des Zentrums von  $G_{p^n q^m}$ . Ist  $G_{p^n}$  invariante Untergruppe von  $G_{p^n r}$  ( $r, p$  teilerfremd), und ist für jeden Primfaktor  $q_i$  von  $r$  der kleinste positive Exponent  $s_i$ , für den  $p^{s_i} \equiv 1(q_i)$  wird, größer als  $n$ , so liegt jede Untergruppe  $p$ -ten Grades des Zentrums von  $G_{p^n}$  auch im Zentrum von  $G_{p^n r}$ . Besitzt die Gruppe  $G_{p^n r}$  ( $p, r$  teilerfremd) eine einzige  $p$ -Sylowgruppe  $G_{p^n}$  mit zyklischer Faktorgruppe, so sind die Hauptreihen-Zahleninvarianten von  $G_{p^n r}$ , abgesehen von den (nicht notwendig verschiedenen) Primfaktoren  $q_k$  von  $r = q_1 \cdot \dots \cdot q_r$  gewisse Potenzen  $p^{n_i}$  von  $p$ , deren Exponenten  $n_i$  sämtlich Gradzahlen von über dem Primkörper  $K_p$  irreduziblen Faktoren des Polynoms  $x^r - 1$  darstellen. Die weitestgehende Verschärfung des vom Ref. abgeleiteten Satzes ist schließlich durch den folgenden gegeben: Besitzt eine Gruppe  $G_{p^n r}$  der Ordnung  $p^n \cdot r$  ( $p-1 \equiv 0(r)$ ) eine invariante  $p$ -Sylowgruppe  $G_{p^n}$  mit abelscher Faktorgruppe, so ist  $G_{p^n r}$  stets überauflösbar.

R. Permutti.

**Huppert, Bertram:** Über Produkte von endlichen Gruppen. Wiss. Z. Humboldt-Universität Berlin 3 (1953/54), 363—364 (1954).

Man nennt eine Gruppe  $G$  faktorisierbar, wenn  $G = H K$  gilt, wo  $H, K$  Untergruppen von  $G$  sind. Verf. gibt einen kurzen Überblick über die bisherigen Ergebnisse, die in Verbindung mit den faktorisierbaren Gruppen ans Tageslicht gefördert worden sind. So werden die Ergebnisse bekannt gemacht, die aus der Kenntnis der Struktur von  $H$  und  $K$  Aussagen über die Struktur von  $G$  bieten. Die diesbezüglichen Arbeiten sind vor allem in den letzten zwei Jahrzehnten erschienen (Casadio, Hall, Huppert, Ito, Rédei, Szép, Wielandt, Zappa). J. Szép.



**Sekino, Kaoru:** Über die Zerlegung der Gruppencharaktere. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I. **7**, 255—263 (1954).

Es sei eine endliche Gruppe  $\mathfrak{G}$  gegeben. Ferner sei  $\mathfrak{H}$  ein Normalteiler in  $\mathfrak{G}$  derart, daß die Faktorgruppe  $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  eine lineare Gruppe modulo einer Primzahlpotenz  $p^n$  ist. Für eine ungerade Primzahl  $p$  hat Z. Suetuna [Zur Theorie der Gruppencharaktere, Jap. J. Math. **18**, 729—744 (1943)] angegeben, wie sich die auf den Argumentbereich  $\mathfrak{H}$  eingeschränkten Charaktere von  $\mathfrak{G}$  in einfache Charaktere von  $\mathfrak{H}$  zerlegen. Verf. gibt diese Zerlegung für den Fall  $p = 2$  an. P. Wolf.

**Nöbauer, Wilfried:** Über eine Gruppe der Zahlentheorie. Monatsh. Math. **58**, 181—192 (1954).

**Nöbauer, Wilfried:** Gruppen von Restpolynomidealrestklassen nach Primzahlpotenzen. Monatsh. Math. **59**, 194—202 (1955).

**Nöbauer, Wilfried:** Eine Verallgemeinerung der eindimensionalen linearen Gruppe mod  $n$ . Monatsh. Math. **60**, 249—256 (1956).

I. Diejenigen Abbildungen des Restklassenringes nach einem (natürlichen) Modul  $n$ , die durch Zuordnungen der Gestalt  $v \rightarrow v^k$  (für  $1 \leq v \leq n$ ) beschrieben werden, bilden eine Halbgruppe, die umkehrbar eindeutigen Abbildungen unter ihnen eine Gruppe  $\mathfrak{P}_n$ . Verf. untersucht diese Gruppe. Für eine nichtquadratfreie Zahl  $n$  ist  $\mathfrak{P}_n$  die Einheit, für eine quadratfreie Zahl  $n = p_1 p_2 \cdots p_r$  isomorphes Bild der primen Restklassengruppe nach dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen  $m = [p_1 - 1, p_2 - 1, \dots, p_r - 1]$ . — Weitere Einzelheiten und zahlentheoretische Folgerungen. (Vgl. Verf., dies. Zbl. **53**, 205.) — II. Für jeden Modul  $m > 1$  bestimmt jedes ganzzahlige Polynom  $f(x)$  eine Abbildung  $x \rightarrow f(x)$  des Restklassenringes mod  $m$  in sich. Die Menge dieser Abbildungen, die die Permutationen dieses Ringes bestimmen, ist eine Gruppe  $\mathfrak{G}_m$ , deren Struktur Verf. bereits früher näher untersucht hat (s. oben und loc. cit.). Für teilerfremde Moduln  $m, n$  ist  $\mathfrak{G}_{mn}$  dem direkten Produkte  $\mathfrak{G}_m \times \mathfrak{G}_n$ , für Primzahlmoduln  $p$  ist  $\mathfrak{G}_p$  der symmetrischen Gruppe  $\mathfrak{S}_p$  isomorph. Für Primzahlpotenzmoduln  $m = p^f > p$  zeigt Verf. in der vorliegenden Arbeit, daß  $\mathfrak{G}_m$  der verallgemeinerten symmetrischen Gruppe oder (in der Bezeichnung von O. Ore) der Symmetrie  $\mathfrak{S}_p(\mathfrak{I}_f)$  isomorph ist nach der Untergruppe  $\mathfrak{I}_f \subseteq \mathfrak{G}_m$  derjenigen Abbildungen  $x \rightarrow f(x)$ , die Repräsentanten  $f(x) = a_0 + a_1 x + p a_2 x^2 + \cdots + p^{f-1} a_f x^f$  besitzen. Die Ordnung der (stets auflösbaren) Gruppe  $\mathfrak{I}_f$  kann angegeben werden; überdies besitzt  $\mathfrak{I}_f$  einen  $p$ -Normalteiler  $\mathfrak{N}$ , dessen Faktorgruppe  $\mathfrak{I}_f/\mathfrak{N}$  der linearen Gruppe  $\mathfrak{I}_1 \subseteq \mathfrak{G}_p$  isomorph ist. — III. Die Untersuchung der im vorstehenden Referat angeführten Untergruppen  $\mathfrak{I}$  läßt eine Verallgemeinerung zu: Die Menge aller Abbildungen von  $\mathfrak{G}_m$ , die ein Repräsentantenpolynom  $f(x) = a_0 + a_1 x + t a_2 x^2 + \cdots + t^{k-1} a_k x^k$  mit festem natürlichem Parameter  $t$  zulassen, bilden eine Untergruppe  $\mathfrak{G}(m, t) \subseteq \mathfrak{G}_m$ . Insbesondere ist  $\mathfrak{G}_m = \mathfrak{G}(m, 1)$  und  $\mathfrak{I}_{f-1} = \mathfrak{G}(p^{f-1}, p)$ . Die Untersuchungen des Verf. ergeben folgende Zusammenhänge: Für teilerfremde Moduln  $m, n$  gilt  $\mathfrak{G}(mn, t) = \mathfrak{G}(m, t) \times \mathfrak{G}(n, t)$ . Im Falle  $m|n$  ist  $\mathfrak{G}(m, t)$  homomorphes Bild von  $\mathfrak{G}(n, t)$ , im Falle  $s|t$  ist  $\mathfrak{G}(m, t) \subseteq \mathfrak{G}(m, s)$ . Wenn  $(p^f, t) = p^k$ , so gilt  $\mathfrak{G}(p^f, t) = \mathfrak{G}(p^f, p^k)$ , wenn  $(m, s) = (m, t)$ , so gilt  $\mathfrak{G}(m, s) = \mathfrak{G}(m, t)$ . Danach lassen sich die Gruppen  $\mathfrak{G}(m, t)$  aus den Gruppen  $\mathfrak{G}(p^f, p^k)$  mit  $k \leq f$  aufbauen. Die Struktur dieser Gruppen scheint schwer bestimmbar zu sein; ihre Ordnung läßt sich angeben. W. Specht.

**Farahat, H.:** On the representations of the symmetric group. Proc. London math. Soc., III. Ser. **4**, 303—316 (1954).

The author gives new proofs of known results on the modular representations of the symmetric group, such as the conjecture of Chung (see Chung, this Zbl. **44**, 258; Nakayama and Osima, this Zbl. **42**, 24; Osima, this Zbl. **52**, 23; Brauer-Robinson, this Zbl. **29**, 199). The methods used are along the lines of Farahat, this Zbl. **50**, 25 and Littlewood, this Zbl. **44**, 257 (see especially p. 339 of the paper quoted). J. Verhoeff.

**Osima, Masaru:** Some remarks on the characters of the symmetric group. II. Canadian J. Math. **6**, 511—521 (1954).

The author gives a simpler proof of a theorem concerning the number of irreducible representations belonging to a given  $p$ -block, previously proved by him (see Osima, this Zbl. **52**, 23 and the review above). Besides he proves some theorems about the decomposition numbers and the Cartan invariants. One theorem is that the elementary divisors of the matrix of the Cartan invariants of a  $p$ -block depend only on the characteristic  $p$  and the weight of the  $p$ -block. *J. Verhoeff.*

**Šubnikov, A. V.:** Asymmetrie endlicher Figuren. Trudy Inst. Kristallogr. **10**, 3—5 (1954) [Russisch].

Von Symmetrie im gewöhnlichen Sinn spricht man, wenn Figuren entweder deckungsgleich oder spiegelbildlich gleich sind. Indem man den Figuren zwei verschiedene Eigenschaften, etwa weiß und schwarz, zuschreibt, treten die Deckungsgleichheit und die Spiegelantigleichheit hinzu. Zu den einfachen Spiegelachsen und den Spiegelsymmetrieachsen treten die Antisymmetrieachsen und die Spiegelantisymmetrieachsen hinzu. Im vierdimensionalen Raum wird die gewöhnliche Symmetrie durch  $\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C$  = dreidimensionale orthogonale Matrix, geliefert, die Antisymmetrie durch  $\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Bei Zugrundelegung des erweiterten Symmetriebegriffs ergeben sich an Stelle der 230 einfarbigen Gruppen die 1192 schwarz-weißen Gruppen [Anm. des Referenten: In der Arbeit N. V. Belov, N. N. Neronova und T. S. Smirnova (dies. Zbl. **66**, 278) wird diese Anzahl mit 1191 angegeben].

*J. J. Burckhardt.*

● **Pontrjagin, L. S.:** Topologische Gruppen. 2. umgearb. u. erweit. Aufl. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1954. 515 S. R. 19,40 [Russisch].

Zweite, stark überarbeitete, Auflage eines 1938 erschienenen Buches, das in englischer Übersetzung 1939 den Titel Topological groups erhielt (dies. Zbl. **22**, 171). Die ersten drei Kapitel behandeln die Theorie der Gruppen, der topologischen Räume und der topologischen Gruppen im allgemeinen. Kap. IV beschreibt die Struktur der lokal bikompakten, nichtdiskreten Körper [nach Kowalsky, Math. Nachr. **9**, 261—268 (1953)]. Die Integrationstheorie der bikompakten Gruppen wird in Kap. V. behandelt, die Charaktertheorie der lokalkompakten abelschen Gruppen in Kap. VI. Nach einem Abriß der Lieschen Theorie in Kap. VII wird in Kap. VIII das Studium der kompakten Gruppen fortgesetzt. Betrachtungen im Großen folgen in Kap. IX. Die Beziehung zu den Lie-Algebren ist der Gegenstand von Kap. X—XI. An der Art der Zitierens, die ich anläßlich der ersten Auflage in Nieuw Archief voor Wiskunde **20**, 311—316 (1940) kritisierte, hat sich nichts geändert. Selbst eine so unsachliche Bemerkung wie das abfällige Urteil über Schreibers Werk ist wieder abgedruckt worden.

*H. Freudenthal.*

**Berikašvili, N. A.:** Über direkte und inverse Spektren topologischer Gruppen. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoy SSR **15**, 257—264 (1954) [Russisch].

1. In einer kommutativen Gruppe wird zu einem (offenen) Keim  $v$  definiert:  $\frac{1}{2}v = \{g \mid g \in v, 2g \in v\}$ ; und induktiv  $2^{-m}v$ . Gibt es zu jedem  $m$  ein  $n$ , so daß  $2^{-n}v = 2^{-n}v \subset 2^{-m}v$ , so heißt  $v$  ein  $N$ -Keim.  $G$  heißt schwache  $N$ -Gruppe, wenn die  $N$ -Keime eine Basis für die Null bilden.  $G$  heißt  $N$ -Gruppe, wenn zu einem gewissen  $N$ -Keim  $v_0$  die  $2^{-n}v_0$  eine Basis für die Null bilden. Solche Gruppen gestatten gewisse besondere Spektralentwicklungen. 2. Die verschiedenen Definitionen direkter Limites kompakter abelscher Gruppen werden miteinander verglichen; Freudenthal (dies. Zbl. **16**, 280) verwendet zur Definition der Limestopologie alle Keime der erzeugenden Gruppen. Čogošvili (dies. Zbl. **42**, 169) läßt nur  $k'$ -Keime zu (d. h. Keime, die Urbilder von  $|z| < \frac{1}{k}$  bei einem geeigneten Charakter sind);



S. Kaplan (dies. Zbl. **34**, 306) und N. Ja. Vilenkin (dies. Zbl. **45**, 315) lassen  $k$ -Keime zu (d. h. Durchschnitte endlich vieler  $k'$ -Keime). *H. Freudenthal.*

**Freudenthal, Hans:** Beziehungen der  $E_7$  und  $E_8$  zur Oktavenebene. II. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **57**, 363—368 (1954).

Mit den Ausdrucksmitteln der einfachen Jordanschen Algebra  $J_{27}$  wird die in I (dies. Zbl. **55**, 20) erhaltene reelle Form  $\text{Inv}(M_{27})$  der Lieschen Ausnahmegruppe  $E_7$  infinitesimal durch geschickte Konstruktion zu einer reellen Form der Ausnahmegruppe  $E_8$  erweitert. Weiter werden die in I angefangenen Untersuchungen über die Mannigfaltigkeit  $M_{27}$  und über  $M_{27} \approx M_{27}$  fortgesetzt. *Ernst Witt.*

**Leti, Giuseppe:** Determinazione dei gruppi aggianti del gruppo di Galilei e di alcuni suoi sotto-gruppi. Collect. Math. **7**, 121—140 (1954).

Verf. rechnet explizit die adjungierte der Galileigruppe (als endliche lineare Gruppe) aus. *H. Freudenthal.*

## Verbände. Ringe. Körper:

• **Moisil, Gr. C.:** Einführung in die Algebra. I. Vol. I.: Ringe und Ideale. București: Editura Academiei Republicii Populare Române 1954. 254 S. [Rumänisch].

Ce premier volume (d'une série — que l'A. annonce dans la préface —) est une introduction à la théorie des anneaux et des idéaux. Il est divisé en deux parties. La première traite des questions „concrètes“: I. L'anneau des nombres entiers. II. Anneaux de classes de restes entiers. III. Entiers de Gauss. IV. Les entiers du corps  $R(i|\mathbb{Q})$ . V. Irrationnelles quadratiques. VI. Polynômes à coefficients complexes. VII. Polynômes à coefficients réels. VIII. Polynômes à coefficients rationnels. IX. Polynômes à coefficients entiers. X. Résolution des congruences d'ordre supérieur. XI. Polynômes en plusieurs variables. La seconde partie contient la théorie abstraite des anneaux et des idéaux: I. Définition des anneaux, corps, idéaux. II. Anneau des quotients d'un anneau. III. Anneau des classes de restes par rapport à un idéal. IV. Anneau des polynômes dans un anneau. V. Adjonction d'une irrationnelle. VI. Anneau à décomposition en facteurs premiers. VII. Propriétés des idéaux. VIII. Idéaux de  $I(m)$ . IX. Anneaux à idéaux principaux. X. Anneaux à idéaux conjugués. XI. Isomorphisme et homomorphisme. XII. Relations d'équivalence. Les questions sont largement expliquées et les démonstrations données dans tous les détails. „Le travail s'adresse non seulement aux étudiants mais à tous les amateurs des mathématiques; il ne suppose qu'un nombre réduit de connaissances préliminaires“. *M. Haimovici.*

**Almeida Costa, A.:** Drei Vorlesungen über die allgemeine Theorie der Ringe (Anwendungen und Zusätze, II). Anais Fac. Ci. Porto **38**, 5—71 (1954) [Portugiesisch].

Fortsetzung der in dies. Zbl. **48**, 24; **52**, 267; **53**, 215 angezeigten Vorlesungen.

**Kontorovič, P. G. und B. I. Plotkin:** Verbände mit additiver Basis. Mat. Sbornik, n. Ser. **35 (77)**, 187—192 (1954) [Russisch].

The main object of the paper is to prove the following results: The lattice-isomorphic image  $G^q$  of a locally nilpotent torsion-free group  $G$  is itself locally nilpotent and torsion-free. Moreover, such a lattice isomorphism  $q$  between  $G$  and  $G^q$  preserves the centre, maximal abelian subgroups, and isolated normal subgroups. These results appear as by-products of a more general investigation. Let  $S$  be a complete lattice,  $U$  a subset of  $S$  such that every element of  $S$  can be represented as a sum of elements from  $U$ . Then  $U$  is called an additive basis of  $S$ . An element  $a \in S$  is called isolated (with respect to  $U$ ) if for every  $u \in U$  either  $au = 0$  or  $au = u$ .  $0$  and  $1$  are always isolated. If  $S$  has no other isolated elements, then it is called dense. Two „local conditions“ play a major part in the subsequent developments: L 1. If an element of  $U$  is contained in the sum of a subset  $V$  of  $U$ , then also in the sum of a finite subset of  $V$ . L 2'. Every pair of elements of  $U$  [L 2: with a non

trivial intersection] is contained in some third element of  $U$ . Theorem. If  $L 2'$  holds in  $U$ , then  $S$  is dense. The isolator  $I(a)$  of a given element  $a$  is the intersection of all isolated elements containing  $a$ . Theorem. If  $L 1$  and  $L 2$  hold in  $U$ , then for every  $u \in U$  the isolator  $I(u)$  is the sum of all elements of  $U$  containing  $u$  and the isolators of any two elements of  $U$  are either equal or have a trivial intersection. A set  $V$  of elements of  $S$  is called a covering basis (with respect to  $U$ ) if for every  $u \in U$  there is a  $v \in V$  with  $u \leq v$ . If, moreover, any two elements of a covering basis have a trivial intersection, then it is called a partition basis. If a lattice has a partition basis, then also an irreducible one (in a certain sense). Theorem. If  $L 1$  and  $L 2$  hold in  $U$ , then  $S$  has a partition basis. An element  $a$  of  $S$  is called modular if  $(a + x)y = a + xy$  for all  $x, y \in S$ ,  $a \leq y$ . Theorem. If  $L 1$  holds in  $U$ , then the sum of any set of modular elements is itself modular. For every  $b > a$  the symbol  $b/a$  denotes the sublattice of elements between  $a$  and  $b$ . Theorem. If  $a$  is an isolated modular element of  $S$  and  $b > a$  is isolated in  $1/a$ , then also in  $S$ . If  $a$  is modular and  $b > a$  is isolated in  $S$ , then also in  $1/a$ . Corollary: An isolated modular element  $a \in S$  is maximal if and only if  $1/a$  is dense. The results are now applied to a group  $G$  and its lattice of subgroups  $S(G)$ . Suitable restrictions on an additive basis of  $S(G)$  have the consequence that only locally nilpotent (or nilpotent) torsion-free groups are eligible. The results mentioned at the beginning are then obtained as corollaries.

*K. A. Hirsch.*

**Herstein, I. N.:** On the Lie ring of a division ring. *Ann. of Math.*, II. Ser. **60**, 571—575 (1954).

In einem Lieschen Ring  $L$  bezeichne  $L'$  den Kommutatorring.  $A$  sei ein Schiefkörper der Charakteristik  $\neq 2$  mit dem Zentrum  $Z$ , und  $A$  werde gleichzeitig als Liescher Ring aufgefaßt. Es wird  $A'' = A'$  bewiesen und, the goal of the paper:  $U \subseteq Z$  für jedes echte Ideal  $U$  von  $A'$ .

*Ernst Witt.*

**Lavendhomme, R.:** Les algèbres de Lie de caractéristique quelconque. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, I. Sér. **68**, 133—139 (1954).

Folgende klassischen Sätze werden für Lie-Algebren über einem Körper  $K$  beliebiger Charakteristik kurz und bündig hergeleitet: 1. Der Satz von Lie über die Gestalt einer Darstellung einer auflösbaren Lieschen Algebra ( $K$  algebraisch abgeschlossen) und 2. die Zerlegungssätze für halbeinfache Liesche Algebren.

*Ernst Witt.*

**Rédei, Ladislaus:** Die Holomorphentheorie für Gruppen und Ringe. *Acta math. Acad. Sci. Hungar.* **5**, 169—195 (1954).

In this paper a theory of holomorphs for rings is developed in analogy with the corresponding theory for groups. The author chooses as a definition for the holomorph of a group  $G$  the splitting extension of  $G$  by its full automorphism group; a characteristic subgroup of a group  $G$  is defined as a subgroup, which is a normal subgroup of every extension of  $G$ . This definition is justified by the fact, that every automorphism of  $G$  is induced by an inner automorphism of a suitable extension of  $G$  (e. g. the holomorph). Any ring containing a given ring  $R$  as an ideal is called an extension of  $R$ . A subring of a ring  $R$  is called characteristic, if it is an ideal in every extension of  $R$ . The concept in ring theory which is analogous with the concept of an automorphism in group theory is the concept of a double homothetism (d. h.): a d. h.  $\alpha$  of a ring  $R$  is a pair of two endomorphisms  $\alpha \rightarrow a\alpha$  and  $\alpha \rightarrow \alpha a$  of the additive group of  $R$ , satisfying the following associativity conditions:  $a(\alpha\beta) = (a\alpha)\beta$ ,  $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$ ,  $(\alpha a)\beta = \alpha(a\beta)$ ,  $(a\alpha)a = a(\alpha a)$  ( $\alpha, \beta \in R$ ). A d. h. of  $R$  is called inner if it is induced by left and right multiplication with an element of  $R$ . Two d. h.'s  $\alpha$  and  $\beta$  are called amicable if  $(a\alpha)\beta = a(\alpha\beta)$ ,  $(\beta a)\alpha = \beta(\alpha a)$  ( $\alpha \in R$ ). If the usual definition of sum and product of endomorphisms is adopted, the collection of d. h.'s is in general not a ring, but every set of d. h.'s, which are pairwise amicable generates a ring of pairwise amicable d. h.'s. So every set of pairwise amicable d. h.'s



is contained in a maximal ring of pairwise amicable d. h.'s. A splitting extension of  $R$  by a maximal ring of pairwise amicable d. h.'s is called a holomorph of  $R$ . It is proved that a subring of  $R$  is characteristic if and only if it is an ideal in all holomorphs of  $R$  and if and only if it is admissible for all d. h.'s of  $R$ . The analogous concept of a complete group turns out to be a ring with unit element. It is known that a group is complete if and only if it is a direct factor in all its extensions. The author proves moreover that a group, which is a direct factor in its holomorph, is complete or direct product of a complete group and a group of order 2. In analogy with these results it is proved that a ring has a unit element, if and only if it is direct summand in all its extensions, and if it is a direct summand in one of its holomorphs. In a ring with unit element all d. h.'s are inner; therefore all ideals are characteristic, and there exists only one holomorph. It is proved that prime ideals are characteristic and that all holomorphs of a domain of integrity are commutative. Finally it is proved that a zero ring has only one holomorph if and only if the ring of endomorphisms of its additive group is commutative; if it has more than one holomorph, it has non-commutative holomorphs.

W. Peremans.

**Szendrei, J.: Eine neue Definition des Holomorphes der Gruppe und der Holomorphe des Ringes.** Acta math. Acad. Sci. Hungar. 5, 197—201 (1954).

The author considers the set  $A$  of all mappings  $a$  of a group  $G$  into itself (denotation  $x \rightarrow x^a$  for  $x \in G$ ). Multiplication in  $A$  is the usual multiplication of mappings.  $A \circ G$  is the set of all pairs  $(a, x)$  ( $a \in A$ ,  $x \in G$ ) with multiplication defined by  $(a, x)(b, \beta) = (ab, x^b \beta)$ . The pairs  $(e, x)$  with  $e$  the identical mapping are identified with the elements  $x$  of  $G$ . The holomorph of  $G$  is defined to be the greatest subgroup of  $A \circ G$ , which contains  $G$ . Equivalence of this definition with the usual one is proved. A similar procedure is adopted for the holomorphs of a ring according to the definition of Rédei (cf. preceding review). Here the set  $D$  of all pairs of mappings  $a$  of a ring  $R$  into itself ( $x \rightarrow x a$  and  $x \rightarrow a x$ ) are taken with the obvious definitions of sum and product in  $D$ . Now  $D \circ R$  is the set of all pairs  $(a, \alpha)$  ( $a \in D$ ,  $\alpha \in R$ ) with  $(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta)$ ,  $(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \alpha b + a \beta - \alpha \beta)$ . The pairs  $(0, \alpha)$  with  $0$  the pair of mappings onto the zero element are identified with the elements  $\alpha$  of  $R$ . The holomorphs of  $R$  are the maximal subrings of  $D \circ R$ , which contain  $R$ ; this definition is equivalent with the definition of Rédei.

W. Peremans.

**Kertész, Andor: A new characterization of semi-simple rings.** Acta Univ. Debrecen. Ludovico Kossuth 1, 151—153 (1954) [Ungarisch], engl. Zusammenfassg. ibid., Addit. ad 1, 21 (1955).

O. Goldman (dies. Zbl. 60, 76) hat bewiesen, daß ein beliebiger (assoziativer) Ring  $R$  genau dann halbeinfach (im klassischen Sinne) ist, wenn sich jeder  $R$ -Modul als direkte Summe eines durch  $R$  annullierten Untermoduls und minimaler (= einfacher)  $R$ -Moduln darstellen läßt. Verf. beweist einen analogen Satz, wo die Bedingung lautet: für jedes Linksideal  $L$  von  $R$  und für jedes Element  $g$  eines beliebigen  $R$ -Moduls  $M$  ist  $Lg$  ein direkter Summand von  $M$ . Als Korollar ergibt sich ein einfacher Beweis des zitierten Goldmanschen Satzes.

L. Fuchs.

**Kertész, A.: Modules and semi-simple rings. I.** Publ. math., Debrecen 3, 289—296 (1954).

Eine additive abelsche Gruppe  $G$ , die einen Ring  $R$  mit Einselement als Operatorenbereich besitzt, so daß das Einselement der Einheitsoperator ist, heißt ein unitärer  $R$ -Modul. Für unitäre  $R$ -Moduln  $G$  sind folgende Bedingungen äquivalent: a)  $G$  ist vollständig reduzibel; b) die Ordnung jedes Elementes  $g \neq 0$  aus  $G$  (Gesamtheit der  $r \in R$  mit  $rg = 0$ ) ist Durchschnitt endlich vieler maximaler Linksideale von  $R$ ; c) jedes maximale unabhängige System von Elementen von  $G$  ist Basis von  $G$ ; d) jeder Teilmodul von  $G$  ist direkter Summand von  $G$ . — Hieraus folgt zur Charakterisierung halbeinfacher Ringe (mit Minimalbedingung): Ein Ring

$R$  mit Einselement ist halbeinfach d. u. n. d., wenn jeder unitäre  $R$ -Modul  $G$  eine der vier äquivalenten Bedingungen a), b), c), d) erfüllt. — Durch Spezialisierung  $R = G^+$  folgen rein ringtheoretische Charakterisierungen halbeinfacher Ringe.

*E. Lamprecht.*

**Szele, T.: On a finiteness criterion for modules.** Publ. math., Debrecen **3**, 253—256 (1954).

If  $R$  is a ring with unit element, the following conditions on  $R$  are proved to be equivalent: (1) every unitary  $R$ -module satisfying both chain conditions for submodules is finite, (2) every maximal left ideal of  $R$  has finite index, (3) every simple  $R$ -module is finite, (4) every maximal submodule of every unitary  $R$ -module has finite index. It is proved that a division ring satisfying the ascending chain condition for subrings is finite and that a ring satisfying both chain conditions for subrings is finite. The author remarks that the last result is contained in a paper of Šnejdmjuller (this Zbl. **38**, 174).

*W. Peremans.*

**Neculcea, Mihail: Sur l'algorithme de la division.** Revista Univ. C. I. Parhon Politehn. București, Ser. Ști. Natur. **3**, Nr. 4/5, 43—45, russ. u. französ. Zusammenfassg. 45 (1954) [Rumänisch].

Formalisierung des Verfahrens des Euklidischen Algorithmus bei gewissen, eventuell mit Nullteilern behafteten, kommutativen Ringen, so daß der Hauptidealsatz erhalten bleibt. Diese an sich sehr naheliegende Verallgemeinerung der Hauptidealringe findet sich schon, und zwar viel allgemeiner, in den autographierten Vorlesungen des Ref. [Curs de Algebră Axiomatică II, S. 137, București 1945, (Rumänisch)]. Es wurde hier nämlich der Satz bewiesen: Es sei  $O$  ein eventuell nicht kommutativer Ring, dessen nicht verschwindende Elemente  $a \in (O - 0)$  auf eine wohlgeordnete, sonst beliebige Menge  $V(a)$  abgebildet sind. Existiert für jedes  $x \in O$  und jedes  $y \in (O - 0)$  entweder die Darstellung

$$x = yq \text{ oder } x = yq + r, r \neq 0, V(r) < V(y)$$

über  $O$ , dann erweisen sich alle Rechtsideale in  $O$  als rechtsseitige Hauptideale. Verf. verlangt unnötigerweise die Kommutativität und die Existenz der Eins in  $O$ , das Diskretsein und die Quasinormeigenschaft  $V(ab) > V(a)$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ , für die Bewertung. Er schließt die Null nicht ausdrücklich von der Bewertung aus. In diesem Rahmen gelingt es dem Verf., den Hauptidealsatz etwas umständlich doch nach dem bekannten Schema zu beweisen.

*D. Barbilian.*

• **Jans, James P.: On the indecomposable representation of algebras.** Thesis Univ. Michigan 1954. III, 72 p.

Es sei  $A$  eine Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $K$ . Verf. gibt vier hinreichende Bedingungen dafür an, daß  $A$  direkt unzerlegbare Darstellungen beliebig hohen Grades besitzt. (Algebren mit dieser Eigenschaft heißen „of strongly unbounded representation type“.) Bekanntlich besitzt  $A$  als  $K$ -Modul eine direkte Summenzerlegung  $A = A' + N$  mit einer halbeinfachen Algebra  $A'$ ,

wo  $N$  das Radikal von  $A$  bezeichnet. Sei  $A' = \sum_{i=1}^n A'^{(i)}$  die Zerlegung von  $A'$  in eine direkte Summe einfacher Algebren  $A'^{(i)}$ . Ein Matrizeneinheiten-System von  $A'^{(i)}$  sei mit  $e_{r,s}^{(i)}$  bezeichnet und es werde  $e_i = e_{1,1}^{(i)}$  und  $\hat{1} = \sum_{i=1}^n e_i$  gesetzt.

Die Algebra  $\hat{A} = \hat{1} A \hat{1}$  heißt eine Basisalgebra (basic algebra) von  $A$ . Sie ist bis auf Isomorphie durch  $A$  eindeutig bestimmt. Es wird gezeigt, daß sich die nicht-äquivalenten Darstellungen von  $A$  und  $\hat{A}$  umkehrbar eindeutig entsprechen. — Ein Ideal  $A^*$  heißt eine Bedeckung (cover) eines Ideals  $A_0$ , wenn  $A_0$ , aber kein  $A_0$  echt umfassendes Ideal, echt in  $A^*$  enthalten ist. Nun seien  $P_1, \dots, P_n$  („vertices“ genannt)  $n$  formale Elemente und es werde für ein beliebiges zweiseitiges Ideal  $A_0$  von  $N$  definiert, daß die Relation  $P_i \& P_j$  („edge“ genannt) genau dann bestehen



soll, wenn für mindestens eine Bedeckung  $A^*$  von  $A_0$  in  $N$  auch  $e_i A^* e_j$  eine Bedeckung von  $e_i A_0 e_j$  ist. Eine zu  $A_0$  gehörige Kette (chain) ist eine Bildung

$$P_{i_1}, P_{i_1} \& P_{i_2}, P_{i_2}, P_{i_2} \& P_{i_3}, P_{i_3}, P_{i_3} \& P_{i_4}, P_{i_4}, \dots, P_{i_{r+1}} \& P_{i_r}, P_{i_{r+1}},$$

bei der aufeinanderfolgende Bildungen  $P_i \& P_j$  verschieden sein sollen. Man beachte, daß die Orientierung der Bildungen  $P_i \& P_j$  alterniert. Man sagt, eine Kette  $C_2$  erweitert (extends) eine Kette  $C_1$  auf der rechten (analog: auf der linken) Seite, wenn das letzte Element von  $C_1$  mit dem ersten Element von  $C_2$  übereinstimmt. Durch Identifikation dieser beiden Elemente und Hintereinanderschreiben von  $C_1$  und  $C_2$  entsteht dann eine neue Kette. Die Gesamtheit aller zu  $A_0$  gehörigen Ketten heißt der Graph (graph) von  $A_0$ . Eine Kette, die durch sich selbst erweitert werden kann, heißt ein Zyklus (cycle). Eine Kette heißt an der rechten (analog: an der linken) Seite verzweigt (branches), wenn sie dort durch mindestens zwei Ketten mit verschiedenem Anfang  $P_i \& P_j$  erweitert werden kann. — Die vier eingangs zitierten hinreichenden Bedingungen lauten folgendermaßen: 1. Der Verband der zweiseitigen Ideale von  $A$  ist unendlich. 2. Der durch die Abbildung  $A_0 \rightarrow A_0 e_i$  für alle zweiseitigen Ideale  $A_0$  aus dem Radikal einer Basisalgebra von  $A$  entstehende Verband enthält für jedes  $i$  als Teilverband eine Boolesche Algebra mit mehr als acht Elementen. 3. und 4. Für jedes zweiseitige Ideal  $A_0$  aus dem Radikal einer Basisalgebra von  $A$  enthält der zugehörige Graph: 3. einen Zyklus; 4. eine an beiden Seiten verzweigte Kette.

P. Wolf.

**Sardi, Umberto:** Equazioni di secondo e terzo grado nell'algebra di Study. Radici ennesime di un numero di Study. Rend. Accad. Sci. fis. mat. Napoli, IV. Ser. 21 (93), 166—173 (1954).

Die Ergebnisse von N. Spampinato (dies. Zbl. 57, 272; 49, 108) lassen sich nur unvollkommen auf nicht kommutative Algebren ausdehnen. Hier liegt die Algebra  $K[u_1, u_2, u_3]$  über dem komplexen Zahlkörper  $K$  vor mit der Multiplikationstafel:  $u_1 u_2 = u_3 u_1 = u_1$ ,  $u_2^2 = u_2$ ,  $u_3^2 = u_3$ , alle übrigen Produkte verschwinden. Eine quadratische Gleichung der Unbestimmten  $\mu = x u_1 + y u_2 + z u_3$  kann allgemein in der Gestalt:  $[\Phi_2(y, z) + x \Psi_1(y, z)] u_1 + (b_0 y^2 + b_1 y + b_2) u_2 + (c_0 z^2 + c_1 z + c_2) u_3 = 0$  angenommen werden, aus der sich die vier Wurzeln leicht ablesen lassen. Verf. untersucht noch besondere Fälle von „derivierbaren“ Gleichungen, sowie die reine Gleichung:  $\mu^n = x(y + z)^{n-1} u_1 + y^n u_2 + z^n u_3 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3$ .

W. Gröbner.

**Fadini, Angelo:** La risoluzione delle equazioni di secondo e terzo grado nell'algebra dei numeri triduali. Rend. Accad. Sci. fis. mat. Napoli, IV. Ser. 21 (93), 114—126 (1954).

Im Anschluß an eine Arbeit von N. Spampinato (dies. Zbl. 57, 272) werden die Wurzeln einer algebraischen Gleichung 2. oder 3. Grades  $\xi^2 + a_1 \xi + a_2 = 0$ , bzw.  $\xi^3 + a_1 \xi^2 + a_2 \xi + a_3 = 0$  über einer kommutativen Algebra  $K[u, v, w]$  untersucht, wo  $K$  den komplexen Zahlkörper,  $u$  das Einselement bedeutet und  $v^2 = v w = w^2 = 0$  gilt. Die durchgeführten Rechnungen sind elementar. Es zeigt sich, daß die Gleichung genau 2 bzw. 3 voneinander verschiedene Wurzeln besitzt, wenn die Diskriminante weder 0 noch ein Nullteiler ist. Andernfalls kann es unendlich viele oder auch „unendlich große“ Wurzeln geben.

W. Gröbner.

**Wooyenaka, Yuki:** On Newman algebra. I—III. Proc. Japan Acad. 30, 170—175, 562—565 (1954), 31, 66—69 (1955).

I. A Newman algebra is defined by the author to be the direct union of a Boolean algebra and algebra ring with unit element. For the case that the Boolean ring is non-associative Newman has given a set of postulates (cf. G. Birkhoff, Lattice theory, p. 155, this Zbl. 33, 101). Here the associative case is treated: a postulate system is given, which is proved to characterize Newman algebras. The independence of the postulates is discussed by means of examples. — II. In this paper the author

continues his axiomatic studies on Newman algebras. He makes some changes in the postulate system and proves the equivalence of the new system and the old one. New proofs of some theorems and simpler examples for the independence of some postulates are given. — III. In this paper a third postulate set for Newman algebras is given and its equivalence with the first set is proved. New independence examples are given.

W. Peremans.

**Mitsudo, Fujio:** A note on the commutativity of certain rings. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 18, 13—14 (1954).

Verf. folgert aus Ergebnissen von Herstein (dies. Zbl. 50, 29) nachstehendes Kriterium: Es sei  $R$  ein Ring mit Einselement und  $H$  eine Menge von endlich vielen regulären Elementen seines Zentrums  $Z$ . Gilt für jedes  $x \in R$   $x^n - h \cdot x \in Z$ , wobei  $h = h(x) \in H$  und  $n = n(x) > 1$  für alle  $x$  beschränkt ist, so ist  $R$  kommutativ.

E. Lamprecht.

**Moisil, Gr. C.:** Sur un théorème de Zolotarev. Acad. Republ. popul. Romîne Bul. ști., Sect. Ști. mat. fiz. 6, 797—800, russ. u. französ. Zusammenfassg. 800 (1954) [Rumänisch].

L'A. montre que dans tout anneau commutatif fini  $\mathfrak{o}$  dans lequel chaque élément est ou bien une unité ou bien un diviseur de zéro, les deux affirmations suivantes pour les éléments  $a, b$  sont équivalentes: I. L'idéal  $(a, b)$  est  $\mathfrak{o}$ : II.  $az = bz = 0$  entraîne  $z = 0$ . C'est une généralisation d'un théorème de Zolotarev [J. Math. pur. appl., III-ème Sér. 6, 145—167 (1880)].

Autoreferat.

**Nagata, Masayoshi:** Note on integral closures of Noetherian domains. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A 28, 121—124 (1954).

The author constructs examples of Noetherian local integral domain  $\mathfrak{o}$  of dimension  $n$  such that (I)  $n = 2$  and there exists an integral extension  $\mathfrak{s}$  of  $\mathfrak{o}$  contained in the derived normal ring of  $\mathfrak{o}$  and such that  $\mathfrak{s}$  is not Noetherian: (II)  $n = 3$  and the derived normal ring of  $\mathfrak{o}$  is not Noetherian. He constructs these examples as follows: Let  $\mathbb{F}_0$  be a perfect field of characteristic  $p \neq 0$  and let  $u_0, \dots, u_n, \dots$  be algebraically independent elements over  $\mathbb{F}_0$ . Set  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_0(u_1, \dots, u_n, \dots)$ . Let  $x_1, \dots, x_n$  be indeterminates and denote by  $\mathfrak{o}_n$  and  $\mathfrak{r}_n$  the rings  $\mathbb{F}^p\{x_1, \dots, x_n\}$  [ $\mathbb{F}$ ] and  $\mathbb{F}\{x_1, \dots, x_n\}$  respectively. He shows at first that  $\mathfrak{o}_n$  is a regular local ring and  $\mathfrak{r}_n$  is the completion of  $\mathfrak{o}_n$ . — (I) Set  $c = x_2 \sum_{i=1}^{\infty} u_i x_1^i$ ,  $c_j = \left(c - \sum_{i < j} x_2 u_i x_1^i\right) / x_1^j$  and  $\mathfrak{s} = \mathfrak{o}_2[c_1, \dots, c_j, \dots]$ . Then  $\mathfrak{s}$  is the required example with  $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_2[c]$ . — (II) Consider the case  $p = 2$ ,  $n = 3$ . Set  $c = x_2 \sum_{i=1}^{\infty} u_{2i-1} x_1^i + x_3 \sum_{i=1}^{\infty} u_{2i} x_1^i$ . Then  $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_3[c]$  is the required example.

Y. Akizuki.

**Recillas J., F. und E. Lluis R.:** Die Hilbertfunktion in semilokalen Ringen. Bol. Soc. mat. Mexicana 11, 1—8 (1954) [Spanisch].

D. G. Northcott a généralisé le concept et les propriétés de la fonction de Hilbert pour les anneaux de polynômes sur un corps au cas des anneaux locaux (voir ce Zbl. 50, 30). Les AA. étendent ces résultats aux anneaux semi-locaux.

G. Ancochea.

**Kuniyoshi, Hideo:** On purely-transcendency of a certain field. Tôhoku math. J., II. Ser. 6, 101—108 (1954).

Let  $k$  be a field of prime characteristic  $p$ , and  $x_1, \dots, x_{p^n}$  be  $p^n$  variables, where  $n$  is any natural number. Let  $\sigma$  be the automorphism of the rational function field  $K = k(x_1, \dots, x_{p^n})$  induced by the cyclic permutation of the variables  $x_i$ , and let  $L$  be the fixed field of  $\sigma$ . The paper proves that  $L$  is purely transcendent over  $k$ . Thus, after several steps of transformations, it gives a system of generators  $y_1, \dots, y_{p^n-n}$ ,  $Y_0, \dots, Y_{n-1}$  of  $K$  over  $k$  such that  $\sigma y_i = y_i$  while  $\sigma(Y_0, \dots, Y_{n-1}) = (Y_0, \dots, Y_{n-1}) + 1$  in the sense of the vector calculus of Witt (this Zbl. 16, 51); then  $Z_j$



with  $(Z_0, \dots, Z_{n-1}) = (Y_0, \dots, Y_{n-1})^p - (Y_0, \dots, Y_{n-1})$  and  $y_i$  form a desired system of (independent) generators of  $L$  over  $k$ . Cf. also Kuniyoshi, this Zbl. 65, 26; Masuda, this Zbl. 65, 26.

T. Nakayama.

**Moriya, Mikao:** Theorie der 2-Cohomologiegruppen in diskret bewerteten perfekten Körpern. Proc. Japan Acad. 30, 787—790 (1954).

This is a preliminary report and the following definitions and theorems are stated without proofs. [The details are published in Math. J. Okayama Univ. 5, 43—77 (1955).]

Let  $k$  be a perfect field with respect to a discrete valuation, and  $K, \bar{K}$  be finite separable extensions of  $k$  such that  $K \subset \bar{K}$ . Let  $\mathfrak{o}, \mathfrak{D}$  and  $\bar{\mathfrak{D}}$  be the valuation rings of  $k, K$  and  $\bar{K}$  respectively, and  $\bar{\mathfrak{P}}$  be the valuation ideal of  $\bar{K}$ . Let  $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}, \bar{\mathfrak{D}})$  be the symmetric 2-cohomology group of  $\mathfrak{D}$  relative to  $\mathfrak{o}$  with coefficients in  $\bar{\mathfrak{D}}$ , i. e. the factor group of normal 2-cocycles, namely those 2-cocycles  $f(X, Y)$  ( $X, Y \in \mathfrak{D}$ ) with the properties  $f(X, Y) = f(Y, X)$  and  $f(x, Y) = 0$  ( $x \in \mathfrak{o}$ ) modulo the group of normal 2-coboundaries  $\{\delta g(X)\}$  where  $g$  satisfies  $g(x) = 0$  for  $x \in \mathfrak{o}$  and  $g(xX) = xg(X)$ . Then  $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}, \bar{\mathfrak{D}})$  is an  $\bar{\mathfrak{D}}$ -module and the length of  $\mathfrak{D}$ -composition sequence is called  $\bar{\mathfrak{D}}$ -length. The main theorem is that  $\bar{\mathfrak{D}}$ -length of  $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}, \bar{\mathfrak{D}})$  is equal to the  $\bar{\mathfrak{P}}$ -exponent of the different  $\mathfrak{D}(K/k)$ . Moreover,  $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}, \bar{\mathfrak{D}})$  has a finite  $\bar{\mathfrak{D}}$ -basis in the sense that

$H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}, \bar{\mathfrak{D}}) = \sum_{i=1}^n \bar{\mathfrak{D}} C_i$  and the annihilator of each  $C_i$  is a divisor of  $\mathfrak{D}(K/k)$ . As

Lemmas the main theorem is stated for intermediate cases, i. e. (i) the case where  $\mathfrak{D}$  is simply normal over  $\mathfrak{o}$ , namely  $\mathfrak{D} = \mathfrak{o}(\theta)$ , (ii) the case where  $\mathfrak{D}$  is normal over  $\mathfrak{o}$ , namely there exists  $\mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_{s-1}$  such that  $\mathfrak{o} = \mathfrak{D}_0 \subset \mathfrak{D}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{D}_s = \mathfrak{D}$  and each  $\mathfrak{D}_i/\mathfrak{D}_{i-1}$  is simply normal. Also the following Lemma is used:

$$H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}, \bar{\mathfrak{D}})/H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}, \mathfrak{D}_1; \bar{\mathfrak{D}}) \cong H^2(\mathfrak{D}_1/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{D}})$$

where  $\mathfrak{o} \subset \mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}$  and the second term means the relative 2-cohomology group with respect to  $\mathfrak{D}_1$ .

Y. Kawada.

**Kowalsky, Hans-Joachim:** Beiträge zur topologischen Algebra. Math. Nachr. 11, 143—185 (1954).

Einleitend hebt Verf. die Bedeutung des Filters als „Rechengröße“ hervor; demgemäß behandelt er in § 1 zunächst gewisse „Rechengesetze für Filter“, und zwar solche, die mit zwei Operationen, „Expansion“ und „Kontraktion“ zusammenhängen. Ist  $R$  eine Menge, so bezeichne  $R^*$  den dual mengentheoretisch geordneten Vollverband aller (eigentlichen und uneigentlichen) Filter über  $R$ ; entsprechend kann man über der neuen (abstrakten) Grundmenge  $R^*$  den neuen Filter-Vollverband  $R^{**}$  bilden usw. Für  $A \subseteq R$  bezeichne  $\varphi A$  den von  $A$  erzeugten Hauptfilter (J. Schmidt, dies. Zbl. 47, 56); ist  $A$  gleich der einelementigen Menge  $\{a\}$ , so schreibt Verf. auch einfach  $\varphi a$ : die Expansion  $\varphi$  ist also eine Abbildung von der Potenzmenge  $\mathfrak{P} R$  bzw. von  $R$  selbst in  $R^*$ , sie erhöht die Anzahl der Sterne. Die Kontraktion  $\kappa$  soll die Anzahl der Sterne erniedrigen; für Filter  $\alpha$  über  $R$ , d. h. für Elemente  $\alpha \in R^*$ , soll  $\kappa \alpha$  den Durchschnitt von  $\alpha$  bedeuten: auf dieser ersten Stufe wird  $\kappa$  also zu einer eindeutigen Abbildung von  $R^*$  auf die Potenzmenge  $\mathfrak{P} R$ . Abweichend davon wird die Kontraktion  $\kappa$  auf den höheren Stufen, etwa auf der zweiten, folgendermaßen erklärt: für einen Filter  $\alpha^*$  über  $R^*$ , d. h. ein  $\alpha^* \in R^{**}$ , sei  $\kappa \alpha$  der ordnungstheoretische Limes superior (Bourbaki, Intégration, p. 28, ex. 9; A. J. Ward, dies. Zbl. 66, 21) des Filters  $\alpha^*$  im Vollverband  $R^*$ ; auf der zweiten Stufe wird  $\kappa$  so zu einer Abbildung von  $R^{**}$  nicht auf die Potenzmenge  $\mathfrak{P} R^*$ , sondern auf  $R^*$  selbst. Diese Diskrepanz zwischen der Behandlung der ersten und der höheren Stufen wird dadurch verdeckt, daß Verf. nach Belieben Elemente und einelementige Mengen identifiziert, was gerade in einer solchen Hierarchie wie der der  $R, R^*, R^{**}, \dots$  leicht zu logischen Widersprüchen führen könnte. (In einer späteren Arbeit (dies. Zbl. 56, 414) hat Verf. daher seine Kontraktion auch nur noch auf den höheren Stufen betrachtet.)

— Dieser Kalkül der Expansion und Kontraktion wird in § 2 durch Hinzunahme eines topologisierenden Operators  $\tau$ , der jedem Punkt  $x \in E$  seinen Umgebungsfiler  $\tau x$  zuordnet, ausgebaut; es ergeben sich bemerkenswert kurze Formulierungen der Hausdorffschen Umgebungsaxiome. In § 3 wird der Kalkül durch Hinzunahme  $n$ -stelliger Operationen  $\varrho(x_1, \dots, x_n)$  so erweitert, daß Verf. auf der Grundlage dieses für die Bedürfnisse der (zunächst noch allgemeinen) topologischen Algebra zurechtgeschnittenen Kalküls in sein eigentliches Thema, die Untersuchung der topologischen Körper, insbesondere die Vergleichung der mit der algebraischen Körperstruktur verträglichen Ring- und Körpertopologien, eintreten kann. Die Zweckmäßigkeit dieses Kalküls erweist sich bereits bei der Vervollständigung eines topologischen Ringes (§ 4) wie beim Beweis des Satzes, daß die Vervollständigung eines topologischen Körpers mit einer gröbsten nichttrivialen Ringtopologie einen einfachen Ring (im kommutativen Fall also jedenfalls einen Körper) liefert (§ 5). In § 6 beschäftigt sich Verf. mit den beschränkten Ringtopologien eines Körpers; diese entsprechen gewissen rein algebraisch definierten Teilmengen des Körpers, den Fastordnungen. Jede beschränkte Topologie ist in einer sog.  $V$ -Topologie enthalten; die  $V$ -Topologien (im Kommutativen: die Bewertungstopologien) sind selbst beschränkt, unter den beschränkten Topologien sind sie gerade die gröbsten, aber auch diejenigen, die zugleich gröbste nichttriviale Ringtopologien (Anti-Atome im Verbands aller Ringtopologien des Körpers) sind (§§ 6, 7). Im kommutativen Fall werden schließlich noch die Durchschnitte von beschränkten, insbesondere von  $V$ -(Bewertungs-) Topologien studiert (§ 9): der Durchschnitt von endlich vielen beschränkten, speziell  $V$ -Topologien ist entweder diskret oder selbst wieder beschränkt; ist die beschränkte Topologie  $\tau$  Durchschnitt von beliebig vielen beschränkten, speziell  $V$ -Topologien  $\tau_\alpha$ , so bereits von endlich vielen der  $\tau_\alpha$ ; der Durchschnitt von unendlich vielen „durchschnittsunabhängigen“ beschränkten  $\tau_\alpha$  ist nicht beschränkt; es gibt beschränkte Topologien, die nicht Durchschnitt von  $V$ -Topologien sind. Verf. schließt mit einigen Fragen (§ 10), z. B.: in welchen Körpern gibt es nicht beschränkte gröbste Topologien (Anti-Atome)?

Jürgen Schmidt.

**Herz, Jean-Claude:** Contribution à la théorie algébrique des équations aux dérivées partielles. Ann. sci. Écol. norm. sup., III. Sér. **71**, 321–362 (1954).

Ein Linksvektorraum  $E (\neq \{0\})$  über einem Schiefkörper  $K$  mit einem Produkt (geschrieben als Klammeroperation „ $\{ \}$ “) und den Axiomen  $\{u, v\} + \{v, u\} = 0$ ,  $\{u, v + w\} = \{u, v\} + \{u, w\}$ ,  $\{u, \lambda v\} = \lambda \{u, v\} + \alpha_{u, \lambda} v$  (wobei  $\alpha_{u, \lambda} \in K$  von  $v$  unabhängig) und  $\{u, \{v, w\}\} + \{v, \{u, w\}\} + \{w, \{u, v\}\} = 0$  für alle  $u, v, w \in E$ ,  $\lambda \in K$ , heiße eine Pseudo-Lie-(PL-)Algebra. Jedes  $u \in E$  definiert eine Abbildung  $\lambda \rightarrow u\lambda = \alpha_{u, \lambda}$  von  $K$  in sich, die sich als Derivation erweist, und man hat  $(u + v)\lambda = u\lambda + v\lambda$ . Verf. bestimmt die Gesamtheit aller Teil-PL-Algebren von  $E$  mit einer Dimension  $> 1$ , wobei die Fälle eines kommutativen und nichtkommutativen  $K$  verschieden sind, und diskutiert Beispiele von Teil-PL-Algebren der Dimension 1. Sodann zeigt er, daß jede PL-Algebra  $E$  von Dimension  $> 1$  über einem Körper mit von 2 verschiedener Charakteristik in einen  $K$ -Vektorraum mit einer assoziativen, (bez. der Addition) distributiven Multiplikation „ $\cdot$ “ so eingebettet werden kann, daß  $(*) \{u, v\} = u \cdot v - v \cdot u$  für alle  $u, v \in E$  gilt. — Der  $K$ -Vektorraum  $\mathfrak{D}$  aller Derivationen von  $K$  wird zu einer PL-Algebra, wenn eine Klammeroperation durch  $(*)$  definiert wird, und daher lassen sich die Ergebnisse des ersten Teiles auf die Differentialalgebra anwenden. Insbesondere zeigt Verf., daß zwei Systeme

$$(**) \quad (A_i y = 0)_{i \in I} \quad \text{und} \quad (B_j y = 0)_{j \in J} \quad (A_i, B_j \in \mathfrak{D})$$

von partiellen linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung über einem Körper  $K$  der Charakteristik Null dann und nur dann dieselben Lösungen haben, wenn die Operatoren  $A_i$  dieselbe PL-Algebra wie die  $B_j$  erzeugen. Wenn  $K$  ein Funktionenkörper der Charakteristik 0 in  $n$  unabhängigen Variablen  $x_i$  und



abgeschlossenen bez. der  $\mathcal{C}/\mathcal{C}x_i$  ist, (\*\*) aus  $q$  Gleichungen besteht, und die  $A_i$  linear unabhängig über  $K$  und paarweise vertauschbar sind, dann erweist sich die allgemeine Lösung von (\*\*) als beliebige Funktion von  $n = q$  unabhängigen Funktionen.

A. Jaeger.

### Zahlkörper. Funktionenkörper:

Popovici, Constantin P.: Sur la détermination d'une base des entiers du corps relativement quadratique de Dirichlet. Revista Univ. C. I. Parhon Politehn. București, Ser. Ști. Natur. 3, Nr. 4 5, 47–51, französ. u. russ. Zusammenfassg. 52 (1954) [Rumänisch].

Nach dem Muster der quadratischen Zahlkörper wird hier eine Minimalbasis für die sogenannten Dirichletschen ganzen Zahlen angegeben, d. h. für die ganzen Zahlen des relativ quadratischen Körpers über dem Körper  $R(\sqrt{-1})$ , unter  $R$  den Körper der rationalen Zahlen verstanden.

D. Barbilian.

Dénes, Péter: Über Grundeinheitssysteme der irregulären Kreiskörper von besonderen Kongruenzeigenschaften. Publ. math., Debrecen 3, 195–204 (1954).

Es sei  $\mathbb{P}$  der rationale Zahlkörper,  $\zeta$  eine primitive  $p$ -te Einheitswurzel ( $p =$  ungerade Primzahl),  $1$  das durch  $1 - \zeta$  in  $\mathbb{P}(\zeta)$  erzeugte Hauptideal und  $q = \frac{1}{2}(p-3)$ . Dann gibt es ein Grundeinheitensystem  $\delta_1, \dots, \delta_q$  von  $\mathbb{P}(\zeta)$ , das den Kongruenzbedingungen

$$(1) \quad \delta_i = a_i + b_i(1 - \zeta)^{2i} \pmod{[2^i + 1]} \quad (i = 1, \dots, q)$$

genügt, wobei  $a_i$  und  $b_i$  ganzrational und zu  $p$  prim sind und  $2e_i' = u_i'(p-1) + 2i$  ( $i = 1, \dots, q$ ) gilt. Die nichtnegativen ganzrationalen Zahlen  $u_1', \dots, u_q'$  sind durch die Beziehung (1) eindeutig und invariant charakterisiert und werden „ $p$ -Charakter der Kreiskörpergrundeinheiten“ genannt. Anwendung der Kummerschen logarithmischen Hilfsfunktionen zeigt: Es gibt ein Grundeinheitensystem  $\delta_1', \dots, \delta_q'$  von  $\mathbb{P}(\zeta)$ , das (1) und gleichzeitig die Kongruenzen

$$(2) \quad D_{2jpt} \log \delta_i'(e^r) \equiv 0 \pmod{p^{t+1}} \quad (j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, q)$$

erfüllt. Hierbei ist  $t$  eine beliebige natürliche Zahl  $\geq$  dem Irregularitätsgrad  $w$  von  $p$  und der Operator  $D_z$  bedeutet, daß  $\log \delta_i'(e^r)$   $z$ -mal nach  $r$  differenziert und dann  $r = 0$  gesetzt wird. Mit Hilfe des Systems  $\delta_1', \dots, \delta_q'$  kann man Kriterien dafür gewinnen, daß eine Einheit  $\epsilon$   $p$ -te bzw.  $p^n$ -te Potenz einer Einheit aus  $\mathbb{P}(\zeta)$  ist.

E. Lamprecht.

Fröhlich, A.: The generalization of a theorem of L. Rédei's. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 5, 130–140 (1954).

In diesen sehr wichtigen, sich an drei frühere Arbeiten (1), (2), (3) des Verf. (dies. Zbl. 49, 161; 55, 33) anlehnenden Untersuchungen handelt es sich in der Hauptsache um den „zweiten Schritt“ nach dem Hauptgeschlechtssatz in der Erforschung der strukturellen Eigenschaften der (im engeren Sinne) absoluten Klassengruppe von zyklischen Zahlkörpern. Es sei  $K$  ein solcher Körper,  $A$  die Gruppe seiner Ideale ( $\neq 0$ ),  $J$  die Gruppe der durch totalpositive Zahlen von  $K$  erzeugten Hauptideale,  $\sigma$  ein primitiver Automorphismus von  $K$ . Der Hauptgeschlechtssatz gibt bekanntlich mittels der Theorie der abelschen Körper Aufklärungen über die Invarianten der Klassengruppe  $A/A^{1-\sigma}J$ . Ähnlich verwendet Verf. seine in (2) entwickelte Theorie der Körper zweiter Klasse, d. h. der galoisschen Zahlkörper mit (nilpotenter) Galoisgruppe zweiter Klasse zur Gewinnung der Invarianten von  $A/A^{(1-\sigma)^2}J$ . Da nach (1) allgemein  $A^{(1-\sigma)^r}J/A^{(1-\sigma)^{r+1}}J$  ( $r = s \geq 0$ ) das direkte Produkt derjenigen ähnlich gebauten Faktorgruppen ist, die sich auf die maximalen Unterkörper von  $K$  von Primzahlpotenzgrad beziehen, so werde fortan angenommen, daß  $K$  vom Grad  $l^r$  ( $l$  Primzahl,  $r \geq 1$ ) ist. Dann ist  $(A/A^{(1-\sigma)^r}J)$  eine Potenz von  $l$ . Nach (3) bestimmen sich die Invarianten von  $A/A^{(1-\sigma)^2}J$  aus denen von  $A/A^{1-\sigma}J$  und  $A^{1-\sigma}J/A^{(1-\sigma)^2}J$ . (Dabei handelt es sich im Fall  $l \neq 2$  sogar um

eine direkte Zusammensetzung; für ein quadratisches  $K$  bediene man sich der Tatsache  $A^{(1-\sigma)^r} J = A^{2^r} J$ .) Es seien  $p_1, \dots, p_m$  die verschiedenen Primzahlfaktoren des Führers  $f(K)$  von  $K$  der Reihe nach von der Verzweigungsordnung  $l^{v_1}, \dots, l^{v_m}$  ( $v = v_1 \geq \dots \geq v_m$ ). Nach einem klassischem Satz sind  $l^{v_1}, \dots, l^{v_m}$  die sämtlichen Invarianten von  $A/A^{1-\sigma} J$ . (Für die  $l$ -Klassenzahl  $h_l$  von  $K$  folgt

$h_l \geq l^{\sum_{i=1}^m v_i}$ , ferner ist  $h_l = 1$  dann und nur dann, wenn  $m = 1$ , d. h.  $f(K)$  eine Primzahlpotenz ist.) Nun sei  $P$  der rationale Zahlkörper,  $H (\subset P)$  die  $K$  zugeordnete Idealgruppe,  $\chi$  ein erzeugendes Element (vom Führer  $f(K)$ ) der  $H$  zugehörigen

(zyklischen) Gruppe von Dirichletschen Restcharakteren. Es läßt sich  $\chi = \prod_{i=1}^m \chi_i^{y_i}$

setzen mit  $(y_i, l) = 1$ ,  $y_1 = 1$ , wobei  $\chi_i$  ein Charakter  $l^{v_i}$ -ter Ordnung ist, der eine Potenz von  $p_i$  zum Führer hat ( $i = 1, \dots, m$ ). Mit einer komplexen Einheitswurzel  $\varepsilon$  von der Ordnung  $l^v$  läßt sich  $\chi_i(p_j) = \varepsilon^{l^{v-v_i} [p_i, p_j]}$  ( $i \neq j$ ) schreiben mit natürlichen Zahlen  $[p_i, p_j]$  ( $\leq l^{v_i}$ ). Außerdem setze man  $[p_i, p_i] = l^{v_i}$  und  $s_i = y_i l^{v-v_i}$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Theorem 3: Die Invarianten von  $A^{1-\sigma} J/A^{(1-\sigma)^2} J$  sind die von 1

verschiedenen Elementarteiler der Matrix  $T = \begin{pmatrix} U \\ L \end{pmatrix}$  über dem Ring der für  $l$  ganzen Zahlen, wobei  $U = (u_{ij})$ ,  $L = (l_{ij})$  ( $i, j = 1, \dots, m$ ),  $u_{ij} = -s_i [p_j, p_i]$  ( $i \neq j$ ),

$u_{ii} = \sum_{j=1}^m s_j [p_j, p_i]$ ,  $l_{ij} = 0$  ( $i \neq j$ ),  $l_{11} = 1$ ,  $l_{ii} = l^{v_i}$  ( $i = 1$ ). Korollar 1. Be-

zeichnet  $r$  den Rang von  $U$  in  $GF(l)$ , so ist  $m - 1 - r$  die Anzahl der Invarianten von  $A^{1-\sigma} J/A^{(1-\sigma)^2} J$ ; insbesondere für ein quadratisches  $K$  ist also  $m - 1 - r$  die Anzahl

der durch 4 teilbaren Invarianten von  $A/J$ . Letzteres stimmt im wesentlichen mit dem Satz vom Ref. (dies. Zbl. 9, 293) in seiner Matrixform überein. Korollar 2. Die Anzahl der Geschlechter ist gleich der  $l$ -Klassenzahl  $h_l$ , d. h. in obiger Ungleichung für  $h_l$  gilt „ $=$ “ dann und nur dann, wenn  $r = m - 1$ ; insbesondere für ein  $K$  vom

Grad  $l$  ist  $h_l = l^{m-1}$  dann und nur dann, wenn  $r = m - 1$ . Der Beweis geschieht mit Anwendung von (3) auf den maximalen nichtverzweigten zentralen Klassenkörper  $\Lambda$  des zur Idealgruppe  $A^{1-\sigma} J$  gehörenden Klassenkörpers  $K^* = K(A^{1-\sigma} J)$

von  $K$ . Theorem 4. Ist  $K$  insbesondere vom Grad  $l (\neq 2)$ , so gelten für die Anzahl  $d_l$  der durch  $l$  teilbaren Invarianten von  $A/J$  die Ungleichungen  $2(m - 1) - r \leq d_l \leq$

$(l - 1)(m - 1) - (l - 2)r$ . Dies fand Inaba (dies. Zbl. 24, 10) für  $m = 2$ , ( $f(K), l) = 1$ , ferner fand er allgemein die schwächeren Ungleichungen  $m - 1 \leq$

$d_l \leq (l - 1)(m - 1)$ . Der Beweis gründet sich auf Theorem 3 und ähnelt sonst dem bei Inaba. Ref. (dies. Zbl. 24, 10, vgl. auch Rédei und Reichardt, dies. Zbl. 8, 195)

hat seinen oben erwähnten Satz in endgültiger Form mit Hilfe der Gruppe der ( $I$ -Zerfällungen, d. h.) Diskriminantendekompositionen zweiter Art ausgedrückt. Als

entsprechende allgemeinere Begriffe definiert Verf. gewisse Charakterdekompositionen. Und zwar heißt eine  $\chi$ -Dekomposition (erster Art) ein geordnetes Paar

$(\psi, \chi \psi^{-1})$  von Restcharaktern derart, daß die lokalen Komponenten von  $\psi$  Potenzen von solchen von  $\chi$  sind. Äquivalent heißen  $(\psi, \chi \psi^{-1})$ ,  $(\psi_1, \chi \psi_1^{-1})$ , wenn  $\psi =$

$\psi_1 \pmod{\{\chi\}}$  ist. Die Klassen von äquivalenten  $\chi$ -Dekompositionen werden mit Hilfe von Repräsentanten nach der Regel  $(\psi, \psi') (y_1, y_1') = (\psi \psi_1, \psi' \psi_1' \chi_1^{-1})$  multipliziert,

wodurch eine endliche abelsche Gruppe entsteht. Es gehöre der (abelsche) Körper  $M$  zur  $\chi$ -Dekompositionsklasse  $(\psi, \chi \psi^{-1})$ , d. h. zur Charaktergruppe  $\{\psi, \chi\}$ . Diese

Klasse heißt eine von der zweiten Art, wenn die Ordnung der Zerlegungsgruppe von  $p_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) in der Galoisgruppe  $\Gamma(M)$  von  $M$  den Grad von  $K$  nicht über-

steigt. (Insbesondere für  $r_1 = \dots = r_m = r$  bedeutet das, daß die Primideale von  $K$  vom ersten Grad in  $M$  sind). Theorem 5. Ein Paar  $(\psi, \chi \psi^{-1})$  von Charakteren

definiert eine  $\chi$ -Dekompositionsklasse dann und nur dann, wenn  $M/K$  zyklisch und unverzweigt ist, die Gruppe  $\Phi_1$  aller  $\chi$ -Dekompositionsklassen ist isomorph mit

$A/A^{1-\sigma} J$ , ferner ist der Grad von  $M/K$  gleich der Ordnung  $t$  jener Klasse; dieselbe



Klasse ist von der zweiten Art dann und nur dann, wenn es einen unverzweigten abelschen Körper  $M^* K$  vom Grad  $l^2$  gibt derart, daß  $M^*$  galoissch und höchstens von der zweiten Klasse, ferner  $M^* M$  zyklisch und  $M$  der maximale abelsche Unterkörper von  $M^*$  ist, endlich bilden alle  $\chi$ -Dekompositionsklassen zweiter Art eine mit  $A^{1-\sigma} J / A^{(1-\sigma)^2} J$  isomorphe Untergruppe  $\Phi_2$  von  $\Phi_1$ . Dieser schöne Satz wird ohne Hilfe von Theorem 3 verhältnismäßig leicht bewiesen (und läßt sich auf beliebige zyklische Zahlkörper statt  $K$  verallgemeinern, indem die  $\chi$ -Dekompositionen entsprechend verallgemeinert werden). Fortan sei  $K$  insbesondere vom Grad  $l$ . Es bezeichne  $P$  die durch die  $p_1, \dots, p_m$  erzeugte Untergruppe der Gruppe der positiven rationalen Zahlen und  $P_K$  die Untergruppe von  $P$  bestehend aus den  $a \in P$  mit  $((a, K) p_i) = (i = 1, \dots, m)$ , wobei die linke Seite das Normrestsymbol von Hasse bezeichnet. Mit Anwendung vom Korollar 1 entsteht Theorem 6: Ist  $K$  vom Grad  $l$ , so ist die Anzahl der Invarianten von  $A^{1-\sigma} J / A^{(1-\sigma)^2} J$  um eins weniger als die von  $P_K / P^l$ . Ähnliches gilt bekanntlich für  $A / A^{1-\sigma} J$  und  $P / P^l$ . Verf. bemerkt, daß sich dieser Satz auch elementar (ohne Anlehnung an seine Theorie der Körper zweiter Klasse) gewinnen läßt. Ref. bemerkt, daß inzwischen zwei Arbeiten (dies. Zbl. 51, 269, 271) von ihm erschienen sind, die insbesondere einen vollständigen Einblick in die Struktur der absoluten 2-Klassengruppe des quadratischen Zahlkörpers gewähren; eine weitere Synthese der Untersuchungen vom Verf. und Ref. scheint deshalb möglich und vielversprechend zu sein. (Im Theorem 2, S. 132 der Arbeit muß „degree  $l^2$ “ zu „degree  $l^m$ “ verbessert werden.)

L. Rédei.

Fröhlich, A.: A note on the class field tower. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 5, 141—144 (1954).

Es sei  $K$  ein zyklischer Zahlkörper vom Primzahlgrad  $l$ . Die Erweiterungskörper  $K_n$  ( $n \geq 0$ ) werden so definiert:  $K_0 = K$ ;  $K_{n+1}$  ist der maximale nicht-verzweigte Klassenkörper von  $K_n$ , dessen Grad noch eine Potenz von  $l$  ist. (Die Nicht-verzweigtheit bezieht sich nur auf die endlichen Primstellen.) Die Anzahl der in  $K$  verzweigten Primzahlen wird mit  $m(K)$  bezeichnet. Was läßt sich für gegebenes  $n = m(K)$  über die Anzahl der verschiedenen  $K_n$  aussagen? Bekannt sind hierüber nur: (i)  $K_1 = K_0$ , wenn  $m \leq 1$ ; (ii)  $K_1 \neq K_0$ , wenn  $m > 1$ . Verf. beweist: (iii)  $K_2 = K_1$ , wenn  $m > 3$ ; (iv) für gegebenes  $l$  und  $m = 2, 3$  gibt es stets  $K$  mit  $K_2 = K_1$ . Auf Grund von (i) bis (iv) vermutet er die Existenz einer Funktion  $g(n)$  mit: (v)  $K_{n+1} = K_n$ , wenn  $m > g(n)$ ; (vi) für gegebenes  $l$  und  $m \leq g(n)$  gibt es  $K$  mit  $K_{n+1} = K_n$ . [Nach vorigem ist dann  $g(0) = 1$ ,  $g(1) = 3$ .] A. Scholz [Zwei Bemerkungen zum Klassenkörperturm, J. reine angew. Math. 161, 201—207 (1929)] hat für jedes  $l$  und  $n$  passende  $K$  mit  $K_{n+1} \neq K_n$  konstruiert; für seine  $K$  wächst  $m$  mit  $n$ , ein Umstand, der ebenfalls für die Existenz von  $g(n)$  spricht. Die (i), (ii) folgen aus der Theorie der abelschen Zahlkörper. Ähnlich gewinnt Verf. (iii) und (iv) aus seiner Theorie der Körper zweiter Klasse (dies. Zbl. 55, 33 und die vorige Arbeit). Es sind deshalb Feststellungen in der Richtung von (v), (vi) durch Untersuchungen von Körpern höherer Klasse zu erwarten.

L. Rédei.

Boseck, Helmut: Über Automorphismen algebraischer Funktionenkörper. Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin 3 (1953/54), 361—362 (1954).

Verf. skizziert, wie sich das Ergebnis von H. L. Schmid, daß die Automorphismengruppe eines algebraischen Funktionenkörpers  $R$  einer Veränderlichen vom Geschlecht  $g > 1$  mit algebraisch-abgeschlossenem Konstantenkörper  $K$  endlich ist, auf Körper mit beliebigem Konstantenkörper überträgt; insbesondere gilt obiger Sachverhalt, wenn  $A$  konservativ oder wenn  $K$  vollkommen ist.

E. Lamprecht.

Hasse, Helmut: Über das Zerlegungsgesetz für einen Funktionalprimdivisor in einem zyklischen Körper von durch ihn teilbarem Primzahlpotenzgrad. Arch. der Math. 5, 216—225 (1954).

Es sei  $K$  eine endlich-algebraische Erweiterung des rationalen Zahlkörpers  $P$ ,

die den Körper  $\mathbb{Z}_p$  der  $p$ -ten Einheitswurzeln ( $p = \text{Primzahl}$ ) enthält,  $t$  eine Unbestimmte über  $K$  und  $K = K(t)$ ,  $R = \mathbb{P}(t)$ ;  $P$  bezeichne den durch  $t \rightarrow t^p$  erzeugten Meromorphismus von  $R$  auf  $R^P = \mathbb{P}(t^p)$ ;  $\mathfrak{p}$  sei ein  $p$  teilender Primdivisor von  $K$  und  $\mathfrak{P}$  seine Funktionalfortsetzung bezüglich  $t$  auf  $K$  (Überstreichung bedeute Restklassenkörperbildung modulo  $\mathfrak{P}$ ). Untersucht wird das Zerlegungsverhalten

von  $\mathfrak{P}$  beim Übergang von  $K$  zu  $K_v = K\left(\sqrt[p^v]{u^{p^n}}\right)$  mit  $\mathfrak{P}$ -ganzem  $u \in R$ , für das  $(u^p - u^p)/p$  kein  $p$ -ter Potenzrest mod  $p$  in  $R$  ist. — Ist  $e$  die Verzweigungsordnung von  $\mathfrak{P}$  über  $\mathbb{Z}_p$ , so folgt aus einer Entwicklung von  $u^{p^n}$  nach Primelementquotienten der  $p$ -ten Kreiskörper: Falls  $p \nmid e$ , so ist  $\mathfrak{P}$  in  $K_1$  verzweigt von der Ordnung  $p$  und  $\bar{K}_1 = \bar{K}$ ; falls  $p \mid e$ , so ist  $\mathfrak{P}$  in  $K_1$  träge mit rein-inseparabler Restklassenkörpererweiterung  $p$ -ten Grades. — Daraus folgt, daß  $\mathfrak{P}$  beim Übergang zu  $K_v$  rein-verzweigt von einer Ordnung  $p^{n-r}$  ( $0 \leq r \leq n$ ;  $p^n$  ist der Grad der Erweiterung) ist mit einer rein-inseparablen Restklassenkörpererweiterung des Grades  $p^r$ . — Offen bleibt der genaue Wert von  $r$ , sowie die Frage, in welcher Weise bei sukzessiven Primzahlgradschritten Verzweigung und inseparable Restklassenkörpererweiterung aufeinander folgen. — Die Voraussetzungen der Untersuchungen sind speziell für  $u = 1 + c t^m$  ( $(m, p) = 1$  und  $c$  zu  $p$  prime rationale Zahl: Erweiterung vom Fermatschen Typus) erfüllt.

E. Lamprecht.

**Lang, Serge: Some applications of the local uniformization theorem.** Amer. J. Math. **76**, 362—374 (1954).

Let  $K$  be a function field over a constant field  $k$  such that  $K/k$  is regular. Let  $\mathfrak{M}$  be the set of all rational places  $\{\mathfrak{p}\}$  of  $K/k$  and assume that  $\mathfrak{M}$  is not empty.  $\mathfrak{M}$  can be topologized as the weakest topology such that the map  $x \rightarrow x(\mathfrak{p}) \in k_\infty$  is continuous for each  $x \in K$ . As an application of the local uniformization theorem of O. Zariski (this Zbl. **25**, 216) the author proves that if  $k$  is of characteristic zero and  $k$  is complete under a rank one valuation then  $\mathfrak{M}$  contains infinitely many places and enough places to distinguish between elements of  $K$ . Moreover, if  $K/k$  is of dimension one and  $k$  is locally compact then  $\mathfrak{M}$  is locally homeomorphic with  $k$ .

Y. Kawada.

**Lang, Serge and André Weil: Number of points of varieties in finite fields.** Amer. J. Math. **76**, 819—827 (1954).

Es sei  $V = V_{n,d,r}$  eine im projektiven Raum  $P^n$  über dem Galoisfeld  $k$  von  $q$  Elementen erklärte Mannigfaltigkeit der Dimension  $r$  und der Ordnung  $d$ . Verff. beweisen für die Anzahl  $N$  der rationalen Punkte von  $V$  in  $k$  die Abschätzung (1)  $|N - q^r| \leq (d-1)(d-2)q^{r-1/2} + Aq^{r-1}$ , wo  $A$  eine von  $n, d, r$  abhängige Konstante ist. Diese Aussage ist für  $r = 1$  der sogenannten Riemannschen Vermutung für Kongruenzfunktionenkörper äquivalent und wird im allgemeinen Fall durch eine einfache Induktion nach  $r$  bewiesen (die Schnittpunkte  $V \cdot H$ , wo  $H$  Hyperebene ist, die  $V$  nicht enthält, sind Mannigfaltigkeiten oder algebraische Mengen niedriger Dimension). Ist  $k_r$  das Galoisfeld von  $q^r$  Elementen und  $N^{(r)}$  die Zahl der Punkte von  $V$  in  $k_r$ , so führt (1) zu der asymptotischen Aussage (2)  $N^{(r)} = q^{r^2} + O(q^{r(r-1/2)})$  für  $r \rightarrow \infty$ ; speziell ist  $N^{(r)} \rightarrow \infty$  für  $r \rightarrow \infty$ . Dieser Sachverhalt überträgt sich auf abstrakte Mannigfaltigkeiten. Ist  $V$  abstraktes Modell eines algebraischen Funktionenkörpers  $K$  der Dimension  $r$  über  $k$ , so ist  $N^{(r)} = q^{r^2} \bmod O(q^{r(r-1)})$

eine birationale Invariante. Speziell für die durch  $d \log Z_V(U)/dU = \sum_{r=1}^{\infty} N^{(r)} U^{r-1}$  erklärte Zetafunktion  $Z_V(U)$  folgt, daß sie außer dem Pol erster Ordnung bei  $U = q^{-r}$  keine Pole und Nullstellen in  $|U| < q^{-(r-1)/2}$  hat und daß alle Pole und Nullstellen in  $|U| < q^{-(r-1)/2}$  birational invariant sind. — Verff. formulieren Vermutungen über das Verhalten von  $Z(U)$  in  $|U| < q^{-r+1/2}$  und geben Existenzaussagen über nulldimensionale Zyklen und Stellen an.

E. Lamprecht.



Gundlach, Karl-Bernhard: Über die Darstellung der ganzen Spitzenformen zu den Idealstufen der Hilbertschen Modulgruppen und die Abschätzung ihrer Fourierkoeffizienten. Diss. math.-naturw. Fak. Univ. Münster 5, 5—6 (1954).

Vgl. dies. Zbl. 57, 35.

## Zahlentheorie:

Jarden, Dov: Nullifying coefficients. Scripta math. 19, 239—241 (1954).

Verf. geht von den Fibonacciischen Zahlen  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $a_3 = 2$ ,  $a_4 = 3$ ,  $a_5 = 5$ , ...,  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$  aus. Er behauptet: Mit

$$(n!)_a = a_1 a_2 \cdots a_n, \quad \binom{n}{k}_a = \binom{n}{n-k}_a = \frac{(n!)_a}{(k!)_a ((n-k)!)_a},$$

ist  $\binom{n}{k}_a$  eine natürliche Zahl. Beweise werden nicht gegeben. L. Holzer.

Ankeny, N. C.: Quadratic residues. Duke math. J. 21, 107—112 (1954).

Das Ref. in dies. Zbl. 55, 37 ist durch das folgende zu ersetzen:  $n(k)$  bezeichne den kleinsten positiven quadratischen Nichtrest der Primzahl  $k$ . Verf. behauptet für alle  $k \equiv 3 \pmod{4}$   $n(k) < k^\epsilon$  ( $k > k_0(\epsilon)$ ). Der vermeintliche Beweis beruht jedoch auf einer unrichtigen Anwendung eines Satzes von Ju. Linnik und A. A. Rényi (dies. Zbl. 31, 11) (vgl. K. A. Rodosskij, Ref. Ž. Mat. 1955, No. 1079).

H.-E. Richert.

Barsotti, Leo: Einige Sätze über numerische Teilbarkeit. Soc. Paranaense Mat., Anuário 1, 14—17 (1954) [Portugiesisch].

Verf. schreibt  $n!! = \prod_{j < n, 2} (n-2j)$ , also  $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$ ,  $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n = 2^n n!$ . Zunächst beweist er:

$$(2n-2)!! + (-1)^n (2n-3)!! \equiv 0 \pmod{2n-1}.$$

Mit der Abkürzung g. g. T. = größter gemeinsamer Teiler und der bekannten zahlen-theoretischen Funktion  $A(n) = \log p$ , wenn  $n$  Potenz einer Primzahl  $p$  mit positivem Exponenten ist,  $A(n) = 0$  sonst, lassen sich die übrigen Ergebnisse des Verf. in den Satz zusammenfassen: Der g. g. T. aller Koeffizienten  $> 1$  bei der Entwicklung  $(x_1 + \cdots + x_m)^n$  ist  $e^{A(n)}$ . L. Holzer.

Carlitz, L.: Congruence properties of special elliptic functions. Monatsh. Math. 58, 77—90 (1954).

Carlitz, L.: Note on the multiplication formulas for the Jacobi elliptic functions. Pacific J. Math. 5, 169—176 (1955).

Wie in früheren ähnlichen Untersuchungen des Verf. (dies. Zbl. 55, 270) sei  $x =$

$\sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1}(u) \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$  ( $A_1(u) = 1$ ) die Jacobische elliptische Funktion und

$\frac{x}{\operatorname{sn} x} = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{2m}(u) \frac{x^{2m}}{(2m)!}$  ( $\beta_0(u) = 1$ ) die „reziproke“ Funktion, wobei die  $A_{2m+1}$

und  $\beta_{2m}$  Polynome von  $u$  mit ganzen rationalen bzw. rationalen Koeffizienten sind. Er gewann früher unter anderem die Kongruenz  $A_p(u) \equiv (-1)^{p'} W_p(u) \pmod{p}$

für jede ungerade Primzahl  $p$ , wobei  $W_p(u) = \sum_{s=0}^{p'} \binom{p'}{s}^2 u^s \binom{p'-1}{2}$ . In

der ersten Arbeit gewinnt er als Fortsetzungen von anderem Schlag die folgenden Sätze. Bezeichnet  $k^2$  eine komplexe Nullstelle von  $W_p(u)$ , die also eine ganze algebraische Zahl ist, so gelten:  $A_m(k^2) \equiv 0 \pmod{p^r}$  für  $m \equiv pr$ ;  $\beta_m(k^2) \equiv 0 \pmod{p^{r-3}}$  für  $m \equiv pr$ ,  $p-1 \nmid m$ ,  $p^r m$ ;  $\beta_m(k^2) \equiv 0 \pmod{p^{r-1}}$  für  $m \equiv pr$ ,  $p-1 \mid m$ . Es folgen noch zahlreiche Verallgemeinerungen und werden Zusammen-

hänge mit den Legendreschen Polynomen ermittelt. Aus der reellen Multiplikationsformel für  $\operatorname{sn} x$  (s. R. Fricke, Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen, Bd. 2, Leipzig 1922, S. 197) folgt für eine ungerade ganze Zahl  $t$  sofort  $\frac{\operatorname{sn} t x}{\operatorname{sn} x} =$

$\sum_{m=0}^{\infty} t \beta_m(u, t) \frac{x^m}{m!}$ , wobei die  $t \beta_m(u, t)$  ganzzahlige Polynome von  $u$  sind, die für  $2 \nmid m$  verschwinden. Es wird in der zweiten Arbeit für jedes  $m (\geq 0)$  bewiesen, daß  $\beta_{2m}(u, t) + \sum_p \frac{1}{p} A_p(u)^{2m/(p-1)}$  ein ganzzahliges Polynom von  $u$  ist, wobei  $p$  die Primzahlen mit  $p \nmid t, p-1 \mid 2m$  durchläuft, daß ferner für jede natürliche Zahl  $r$  und jede ungerade Primzahl  $p$  die Kongruenz  $\sum_{s=0}^r (-1)^s \binom{r}{s} t \beta_{m-s(p-1)}(u, t) A_p(u)^{r-s} \equiv 0 \pmod{(p^m, p^r)}$  gilt. Mehrere Folgerungen und verwandte Resultate werden gewonnen. L. Rédei.

**Mordell, L. J.:** Note on the integer solutions of  $z^2 - k^2 = ax^3 + by^3$ . *Ganita* 5, Nr. 2, 103–104 (1954).

It is proved that the title equation has an infinity of integer solutions  $x, y, z$  in case  $k = 4ab^2c^3$ , where  $a, b, c$  are integers. In the proof use is made of the author's theorem that the equation  $Ax^3 + Ay^3 + Bz^3 = BC^3$ ,  $A, B, C$  integers and  $ABC \neq 0$ , has an infinity of integer solutions other than  $x = y = 0, z = C$  (this *Zbl.* 64, 40). W. Ljunggren.

**Salié, Hans:** Zur Verteilung natürlicher Zahlen auf elementfremde Klassen. *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math.-naturw. Kl.* 101, Nr. 4, 3–26 (1954).

Es sei ein lineares homogenes Gleichungssystem  $\mathfrak{E}$  von  $m$  Gleichungen in  $n$  Unbekannten  $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$(1) \quad \sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} x_\nu = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, m, \quad n > m$$

mit rationalen Koeffizienten  $a_{\mu\nu}$  gegeben. Wenn bei jeder Verteilung aller natürlichen Zahlen auf  $k$  elementfremde Klassen eine Lösung von (1) existiert mit der Eigenschaft, daß alle  $x_\nu$  derselben Klasse angehören, so heißt  $\mathfrak{E}$   $k$ -fach regulär. Trifft dies für jedes  $k$  ein, nennt man  $\mathfrak{E}$  regulär. Ist das System nicht regulär, so hat es den Regularitätsgrad  $K = K(\mathfrak{E})$ . Dieser ist eindeutig festgelegt durch die Forderung, daß  $\mathfrak{E}$   $K$ -fach regulär, aber nicht  $(K+1)$ -fach regulär sein soll. Die kleinste Zahl  $s_k = s_k(\mathfrak{E})$ , so daß das System (1)  $k$ -fach regulär bleibt bei Hinzufügung der Bedingung  $x_\nu \leq s_k, \nu = 1, 2, \dots, n$ , nennt man die Regularitätsschranke von  $\mathfrak{E}$ . Für reguläre Systeme setzt man  $K = \infty$ , und für nicht  $k$ -fach reguläre Systeme  $s_k = \infty$ . Diese beiden Regularitätsmaße sind von R. Rado eingeführt worden. Sie sind von den Koeffizienten  $a_{\mu\nu}$  von (1) abhängig. R. Rado vermutet, daß  $K$  für nichtreguläre Systeme unterhalb einer nur von  $n$  abhängigen Schranke bleibt, und er bewies, daß dies für alle Werte von  $m$  richtig ist, falls es für  $m = 1$  gilt. — Die vorliegende Arbeit bringt neue Aussagen über die Größen  $K$  und  $s_k$ . Der Verf. zeigt, daß für alle nicht regulären Systeme mit drei Unbekannten  $K = 2$  oder 3 ist, soweit gewisse Voraussetzungen erfüllt sind. Weiter, daß es zu jedem  $n$  unendlich viele nichtreguläre Systeme mit  $K = 2$  gibt. Außerdem werden unendlich viele Gleichungen angegeben, für die  $K < C n \log n$  wird, wo  $C$  eine absolute Konstante ist. Zum Schluß wird gezeigt: Es sei die homogene lineare Gleichung (2)  $ax + by = cz$  gegeben. Weiter eine Menge natürlicher Zahlen  $\mathfrak{B}$ , so daß in dieser Menge keine Lösungstriple  $x, y, z$  ( $x, y, z$  nicht notwendig verschieden) von (2) auftreten. Es sei  $B(x)$  die größte Anzahl natürlicher Zahlen, die aus der Reihe  $1, 2, \dots, x$  gebildet, eine  $\mathfrak{B}$ -Menge ergibt, und  $B = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{B(x)}{x}$  die asymptotische Dichte dieser Menge. Dann ist, wenn  $c \neq a + b$ ,  $B > 0$ . Für  $c = a + b$  ist trivialerweise  $B = 0$ . S. Selberg.



Schinzel, A.: Generalisation of a theorem of B. S. K. R. Somayajulu on the Euler's function  $\varphi(n)$ . *Ganita* 5, Nr. 2, 123—128 (1954).

Der Verf. hat in einer späteren Arbeit (dies. Zbl. 65, 271) dem Satz eine noch allgemeinere Fassung gegeben.

B. Stolt.

Garcia, Mariano: On numbers with integral harmonic mean. *Amer. math. Monthly* 61, 89—96 (1954).

Es sei  $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$ ,  $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ . O. Ore gab die natürlichen Zahlen  $n < 10^4$  an, für welche das harmonische Mittel ihrer Teiler  $H(n) = n\tau(n)/\sigma(n)$  selbst wieder eine ganze Zahl ist. Diese numerischen Untersuchungen werden in der vorliegenden Arbeit auf das Intervall  $1 < n < 10^7$  ausgedehnt, in welchem genau 45 Zahlen  $n$  mit ganzzahligem  $H(n)$  liegen. Verf. gibt auch noch einige Zahlen  $n > 10^7$  mit ganzzahligem  $H(n)$  an und erwähnt, daß über 200 solche Zahlen bisher gefunden worden sind. Allgemein beweist er den Satz: Sei  $n = p_1^{\alpha} p_2^{\beta}$  die Primzahlpotenzzerlegung von  $n$ . Dann ist  $H(n)$  genau dann ganz, wenn  $n$  eine gerade vollkommene Zahl ist. (Anmerk. des Ref.: Diese Aussage ist auch noch richtig, wenn man alle  $n = p_1^{\alpha} p_2^{\beta}$  betrachtet.)

H. J. Kanold.

Sierpinski, W.: Sur les ensembles de nombres naturels qui ont un nombre fini d'éléments communs avec toute leur translation. *Ganita* 5, Nr. 2, 137—141 (1954).

The author considers infinite strictly increasing sequences  $p_1, p_2, \dots$  of positive integers. A sequence  $E$  is said to possess the property  $P$  if  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{n+1} - p_n = \infty$ .

Property  $P$  is equivalent to the statement that  $E$  has at most a finite number of points in common with every translation  $E(a) = \{p_1 + a, p_2 + a, \dots\}$  of  $E$ . Let  $\psi_E(x)$  count the number of elements of  $E$  which do not exceed  $x$ . The author shows that  $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi_E(x)/x = 0$  if  $E$  has the property  $P$ . Beyond this relation however

property  $P$  does not imply anything about the asymptotic behaviour of  $\psi_E(x)$ . In fact the author constructs for any arbitrary sequence  $E$  sequences  $H$  and  $Q$  which do not have the property  $P$  and such that  $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi_H(x)/\psi_E(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi_Q(x)/\psi_E(x) = 1$ . Moreover if  $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi_E(x)/x = 0$  then it is also possible to construct a sequence

$H$  with property  $P$  such that  $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi_H(x)/\psi_E(x) = \infty$ .

H. B. Mann.

Robinson, Raphael M.: Mersenne and Fermat numbers. *Proc. Amer. math. Soc.* 5, 842—846 (1954).

Nach einem Bericht über die Durchführung eines Programms des National Bureau of Standards' Western Automatic Computer (SWAC), in dem unter Leitung des Verf. in Zusammenarbeit mit D. H. Lehmer alle Zahlen  $2^n - 1$ ,  $n \leq 2308$ , auf ihren Primzahlcharakter getestet wurden, werden einige Ergebnisse dieses Programms mitgeteilt, die über den Bericht von H. S. Uhler (dies. Zbl. 48, 30) hinausgehen: Während  $2^n - 1$ , wenn  $n$  die ersten vier Mersenneschen Primzahlen durchläuft, wiederum eine Primzahl ist, ist die fünfte Zahl dieser Art,  $2^{213} - 1 = 2^{8191} - 1$ , keine Primzahl. — Ferner wurde festgestellt, daß  $2^{210} + 1$  keine Primzahl ist. Dazu wurde benutzt: Für  $n > 1$  ist  $2^n - 1$  dann und nur dann prim, wenn  $3^{2^{n-1}} - 1 \pmod{2^n - 1}$  ist. Als Teiler von  $2^{210} - 1$  wurde später durch Selfridge [*Math. Tables Aids Comput.* 7, 274—275 (1953)] die Zahl  $11131 \cdot 2^{12} + 1$  festgestellt.

B. Schoeneberg.

Kuhn, P.: Neue Abschätzungen auf Grund der Viggo Brun'schen Siebmethode. 12. Skand. Mat.-Kongr., Lund 1953, 160—168 (1954).

Verf. beweist folgendes Theorem: Sei  $x$  eine gegebene natürliche Zahl und  $w = l$  die kleinste natürliche Zahl, die der Ungleichung  $\log(6v - w) \leq 0,968(w+1)$  genügt, dann gibt es für hinreichend großes  $x$  unter den ganzen  $y$  im Intervall  $x - x^{1/v} < y \leq x$  immer Zahlen, die aus höchstens  $k = v + l$  Primfaktoren zu-

sammengesetzt sind. — Dieses Theorem liefert für alle ganzen  $v \geq 3$  kleinere  $k$  als bisher möglich. Verschärfungen und Verallgemeinerungen dieses Theorems werden ohne Beweis mitgeteilt. Anwendungen der Viggo Brunschen Methode und der Überlegungen dieser Abhandlung auf die ganzzahligen, irreduziblen Polynome ergeben z. B. folgenden Satz: Es gibt unendlich viele Zahlen der Form  $x^2 + 1$ , die aus nicht mehr als 3 Primfaktoren zusammengesetzt sind. *B. Schoeneberg.*

**Sathe, L. G.: On a problem of Hardy on the distribution of integers having a given number of prime factors. IV.** J. Indian math. Soc., n. Ser. 18, 43—81 (1954).

Zu Teil I—III vgl. dies. Zbl. 50, 271; 51, 280; 55, 275. Der Beweis (der in Teil III nicht, wie im Referat angegeben, „zu Ende geführt“, sondern fortgeführt worden ist), wird hier zu Ende geführt. *E. Hlawka.*

**Ricci, Giovanni: Sull'andamento della differenza di numeri primi consecutivi.** Revista Mat. Univ. Parma 5, 1—54 (1954).

Ist für  $0 < \delta \leq 1$ ,  $0 \leq \mu < \lambda < \infty$   $A(\delta, \mu, \lambda)$  die Menge der natürlichen Zahlen  $n$ , für die

$$\mu \log p_n < p_{n+1} - p_n \leq \lambda \log p_n, \quad (1 - \delta) \xi < p_n \leq \xi$$

$p_n$   $n$ -te Primzahl,  $D(\delta, \xi; \mu, \lambda) = \sum_A 1$ ,  $S(\delta, \xi; \mu, \lambda) = \sum_A (p_{n+1} - p_n)$ , dann wird gezeigt für  $\xi \rightarrow \infty$ :

$$D \leq C(\lambda - \mu)(2H)^{-1} \frac{\delta \xi}{\log \xi} + o\left(\frac{\delta \xi}{\log \xi}\right), \quad S \leq C(\lambda^2 - \mu^2)(4H)^{-1} \delta \xi + o(\delta \xi).$$

Dabei ist  $C = C(\delta, \mu, \lambda) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} z(\delta, \xi, 2a)$  mit  $\mu \log \xi < 2a \leq \lambda \log \xi$  und

$z$  durch  $z\Phi(2a)\delta\xi/\log^2\xi = Z$  definiert, wo  $\Phi(2a) = \prod_{3 \leq p|a} \frac{p-1}{p-2}$ ,  $Z$  die

Anzahl der Primzahlen mit  $p_{n+1} - p_n = 2a$ ,  $(1 - \delta)\xi < p_n \leq \xi$ . Ist  $C(\delta, \mu, \lambda) > 0$  und  $\lambda_1(\xi)$  definiert durch  $D = C(2H)^{-1}(\lambda_1(\xi) - \mu)\delta\xi/\log\xi$  dann ist  $S \leq C(4H)^{-1}(\lambda_1^2(\xi) - \mu^2)\delta\xi - o(\delta\xi)$ .  $H$  ist die bekannte Konstante

$\prod_{p \geq 3} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)$ . Es ist stets  $C \leq 16H$ . Der Verf. gibt noch Verallgemeinerungen und interessante Anwendungen der obigen Sätze. *E. Hlawka.*

**Meulenbeld, B.: On the approximating decimal fractions of decimals.** Simon Stevin 30, 65—78 (1954).

Ähnlich wie zuerst W. T. Scott (dies. Zbl. 22, 308) mit Näherungsbrüchen anderer Art, untersucht Verf. die Aufeinanderfolge der drei Typen ungerade/ungerade, gerade/ungerade, ungerade/gerade, kurz (1/1), (2/1), (1/2), der gekürzten Systembrüche bei der Annäherung einer irrationalen Zahl zwischen 0 und 1. Während bei ungerader Grundzahl  $g$  der Typ (1/2) nie auftritt, hingegen von (1/1) und (2/1) jede Sequenz möglich ist, herrscht bei gerader Grundzahl der Typ (1/2) vor. Er muß sich um so öfter wiederholen, je weiter man sich hinter dem Komma befindet. Steht an  $m$ -ter Stelle (1/1) oder (2/1), so kann erst an einer nachfolgenden  $l$ -ten Stelle mit  $l - m > km \log 2 / \log u$ , wobei  $g = 2^k u$  ( $u$  ungerade) gesetzt ist, wieder einer dieser beiden Typen stehen. Andererseits kann man (für  $u > 1$ ) stets solche Nachfolger konstruieren. Daraus ergibt sich leicht, daß die unendlich oft erscheinenden Typen bei ungeradem  $g$  jede Kombination ohne (1/2), bei geradem  $g$  jede solche mit (1/2) bilden können. *A. Aigner.*

## Analysis.

• **Losada y Puga, Cristobal de: Lehrbuch der Analysis. Bd. I—III.** Peru: Universidad Catolica; Bd. I, 2. Aufl. 1951. XXV, 640 S.; Bd. II, 2. Aufl. 1953. XIX, 703 S., Bd. III 1954. XXII, 814 S. [Spanisch].

L'A. in questo suo Trattato generale in tre volumi, scritto in lingua spagnola, ha avuto di mira di conseguire due scopi: fornire a coloro che sono avviati alle scienze



applicative orientamenti sulle parti più importanti dell'Analisi e preparare i futuri matematici puri alla lettura dei trattati specializzati e delle memorie originali. Il primo volume si compone di quattro libri: il primo libro in 4 capitoli riguarda il campo reale, il campo complesso, la teoria dei limiti, la nozione di funzione; il 2° libro in 9 capitoli la derivazione, i determinanti funzionali e le funzioni implicite, e il can- giamento delle variabili; il 3° libro in 5 capitoli la ricerca della funzione primitiva, gli integrali di Riemann, di Stieltjes, di Lebesgue, le applicazioni geometriche del calcolo integrale; il 4° libro in 3 capitoli le equazioni differenziali lineari. Il secondo volume comprende i libri 5°, 6° e 7° del trattato. Il 5° in 3 capitoli riguarda le serie numeriche e i prodotti infiniti, gli sviluppi in serie, l'integrazione per serie; il 6° in 3 capitoli le applicazioni geometriche dell'analisi; il 7° in 5 capitoli l'integrazione numerica grafica e meccanica, gli integrali impropri, i curvilinei e i multipli. Il terzo volume infine comprende i libri dall'8° al 12°. Il libro 8° in 3 capitoli tratta le serie trigonometriche di Fourier; il 9° in 2 capitoli la sommazione aritmetica delle serie e le serie asintotiche; il 10° in 7 capitoli la teoria delle funzioni analitiche e in partico- lare delle funzioni ellittiche; nel libro 11° due capitoli sono dedicati alla teoria delle equazioni differenziali ordinarie e in particolare allo studio delle equazioni nel campo complesso e alla teoria di Fuchs, e in due capitoli successivi sono contenute alcune nozioni sulle equazioni alle derivate parziali e al calcolo delle variazioni; il libro 12° infine in 2 capitoli riguarda il calcolo delle probabilità e la teoria degli errori. — Questi volumi formano un complesso di dodici libri con 50 capitoli; la materia vi è ben suddivisa e chiaramente esposta, le notizie sono ampie, la veste tipografica è assai bella, cosicchè questo Trattato avrà largo favore specialmente nei Paesi dell'America latina.

*G. Sansone.*

● **Universal Mathematics. Part I. Functions and limits. A book of experimental text materials by the 1954 Summer Writing Group of the Department of Mathematics, University of Kansas, F. A. I. Bowers jr., R. N. Bradt, C. E. Capel, W. L. Duren jr., G. B. Price and W. R. Scott.** Lawrence, Kansas: Student Union Book Store 1954. X, 310 p. \$ 2.75. Planographed.

Das Buch strebt eine Reform der einführenden Textbücher in höherer Mathematik an mit folgenden Neuerungen: Der Text ist durchgehend geteilt in zwei parallel laufende Betrachtungen, einer „intuitiven“, die bei aller Strenge der Definitionen die geometrische Anschauung heranzieht und größtenteils auf Beweise verzichtet, und einer „formalen“ mit strengen Beweisen. Die reellen Zahlen erscheinen als vollständig geordneter algebraischer Körper nach axiomatischem Stil, wobei das Problem des Messens ausführliche Behandlung findet; Relationen und Funktionen werden als Teilmengen in einer Paarmenge eingeführt und der „Limesprozeß“ als ein (durch  $\supseteq$ ) gerichtetes System  $\{F_m, F_n, \dots\}$  von abgeschlossenen Intervallen  $F_m$  mit  $F_m \subset F_n$  für  $m \supseteq n$ . (Diese Auffassung wird durch das „Rechnen mit abgeschlossenen Intervallen“ vorbereitet.) Das Riemannsche Integral wird als Unterteilungsintegral erklärt; konsequenterweise gibt es dann nur eine einzige „Riemannsche Summe“ zur einer Intervallteilung  $(J_v)$  des Definitionsbereiches einer Funktion  $f$ , nämlich das Intervall  $\sum_v \left[ \inf_{J_v} f, \sup_{J_v} f \right] \cdot |J_v|$ . Auf diese Weise wird

Epsilonontik vermieden, und das Rechnen mit Ungleichungen, eigentlich ein Wesenszug der Analysis, tritt in den Hintergrund; dies äußert sich auch in den Übungsaufgaben, die zumeist von einfacher formaler Natur sind. Auf eine eingehende Analyse der Anwendbarkeit mathematischer Begriffe auf die Naturwissenschaften ist großes Gewicht gelegt. Das Buch schließt stofflich mit dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung und einem Kapitel über Exponentialfunktion und Logarithmus. Bei diesen nahen Zielen wäre der Aufwand an abstrakter Methodik nicht verständlich; der zweite Band soll aber von „Strukturen in Mengen“ handeln.

*G. Aumann.*

**Turski, S.** unter Mitarbeit von **J. Bonder, S. Drobot, J. G. Mikusiński, W. Nowacki, J. Nowinski, W. Olszak** und **P. Szulkin**: *Die mathematischen Methoden der modernen Technik.* Hauptreferate 8. Polnisch. Math.-Kongr., 6.—12. Sept. 1953 Warschau, 111—125 (1954).

In der heutigen Technik ist ein wachsender Bedarf an mathematischen Methoden und Hilfsmitteln notwendig geworden, so daß sich eine enge Zusammenarbeit der Mathematik mit der Technik anbahnt. Vorliegende Kongreßveröffentlichung bringt eine historische Übersicht über diese Entwicklung, wobei insbesondere die Gebiete der angewandten Mechanik, der Elektrotechnik, des Bauwesens und der Flugtechnik Berücksichtigung finden. Es werden folgende Schlußfolgerungen gezogen: Die klassischen Methoden der Analysis bleiben stets unentbehrliche, meist sogar die wirksamsten Mittel zur Lösung der Probleme. Integralgleichungen und die Theorie der orthogonalen Funktionen kommen in vielen Fällen hinzu. Operatoren- und Matrizenrechnung sowie Tensorrechnung sollten weiter ausgedehnt werden, desgleichen die Funktionalanalysis. Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen bilden meist den theoretischen Ausgangspunkt der technischen Probleme und sollten weiter untersucht werden. Insbesondere sind Näherungsmethoden weiter zu entwickeln und zu verbessern. Eine besondere Bedeutung kommt der Entwicklung mathematischer Maschinen zu. Dimensionsanalysis, Analogiemethoden, Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik haben sich ebenfalls in einer Reihe spezieller Probleme als besonders erfolgreich erwiesen.

*H. Neuber.*

### Mengenlehre:

**Kita, Tôru**: A theorem on limit ordinals. *Math. Japonicae* 3, 62 (1954).

Umständlicher, nicht ganz einwandfreier Beweis der trivialen Tatsache, daß für eine Limeszahl  $\lambda$  stets  $n\lambda = \lambda$  gilt und umgekehrt, sofern  $2 \leq n < \omega$  ist.

*W. Neumer.*

**Ginsburg, Seymour**: Order types and similarity transformations. *Trans. Amer. math. Soc.* 79, 341—361 (1955).

Seien  $A$  und  $B$  geordnete (d. h. total geordnete) Mengen,  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  ihre Ordnungstypen.  $\bar{A} \leq \bar{B}$  bedeute, daß es eine Ähnlichkeitsabbildung von  $A$  in  $B$  gibt;  $\bar{A} = \bar{B}$  bedeute, daß zugleich  $\bar{A} \leq \bar{B}$  und  $\bar{B} \leq \bar{A}$  gilt. Im Falle  $\bar{A} \not\equiv \bar{B}$  heißen  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  verschieden. [„Verschieden“ ist also hier nicht synonym mit „ungleich“. Ref.]  $\bar{A} < \bar{B}$  werde geschrieben, wenn  $\bar{A} \leq \bar{B}$  und zugleich  $\bar{A} \not\equiv \bar{B}$  ist. Ist weder  $\bar{A} \leq \bar{B}$  noch  $\bar{B} \leq \bar{A}$ , so heißen  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  unvergleichbar.  $\bar{A} || \bar{B}$ . —  $\lambda$  bedeute den Ordnungstypus der Menge  $R$  der reellen Zahlen. — Stehen zwei Ordnungstypen  $\sigma, \mu$  in der Beziehung  $\sigma < \mu$ , so versteht Verf. unter dem Problem  $P$  bezüglich  $\sigma$  und  $\mu$  die Frage nach der Existenz eines  $\tau$  mit  $\sigma < \tau < \mu$ . [Diese Frage wird im folgenden kurz mit  $P(\sigma, \mu)$  bezeichnet. Ref.] — Eine geordnete Menge  $E$  heiße exakt, wenn sie mit keiner echten Teilmenge ähnlich ist;  $E$  heißt dann ebenfalls exakt. — Ist  $p \in E$ , so heißt  $p$  ein Fixpunkt von  $E$ , wenn  $f(p) = p$  bei jeder Ähnlichkeitsabbildung von  $E$  in sich gilt. — Eine geordnete Menge, die aus lauter Fixpunkten besteht, ist exakt und umgekehrt. — Ist  $E$  exakt und  $E = \bar{F}$ , so ist  $F$  exakt und es gilt  $\bar{E} = \bar{F}$ , wobei genau eine Ähnlichkeitsabbildung von  $E$  auf  $F$  möglich ist. — Mit  $\alpha$  und  $\beta$  ist  $\alpha + \beta$  exakt. — Ist  $\gamma = \alpha + \beta$  exakt, so sind es auch  $\alpha$  und  $\beta$ . — Sei  $\alpha + \beta$  exakt. Dann hat  $P(\gamma, \alpha + n + 1 + \beta)$  genau die  $n$  verschiedenen Lösungen  $\alpha + j + 1 + \beta$  ( $j < n$ ,  $n$  nicht negative natürliche Zahl), während  $P(\gamma, \alpha + \omega + \beta)$  genau die  $\aleph_0$  verschiedenen Lösungen  $\alpha + n + 1 + \gamma$ ,  $n < \omega$ , zuläßt. — Ist  $E$  eine lineare Menge mit  $E = c = 2^{\aleph_0}$ , so hat  $P(0, \bar{E})$  eine exakte Lösung  $\tau$  mit  $\tau = c$ . — Definitionen: Eine lineare Menge  $E$  sowie ihr Typus  $\bar{E}$  hat die Eigenschaft C,



wenn für  $p \in E$  und jedes reelle Zahlenpaar  $y, z$  mit  $y < p < z$  die offenen Intervalle  $(y, p)$  und  $(p, z)$  beide  $c$  Punkte aus  $E$  enthalten. — Eine lineare Menge  $E$  sowie ihr Typus  $\bar{E}$  hat die Eigenschaft A, wenn  $E = c$  ist und niemals zwei disjunkte Teilmengen der Mächtigkeit  $c$  von  $E$  einander ähnlich sind. — Satz: Ist  $E$  eine lineare Menge der Mächtigkeit  $c$ , so hat  $P(0, E)$  eine Lösung  $\tau$  mit der Eigenschaft A. — Es folgen Sätze über Systeme von Lösungen für  $P(\sigma, \mu)$ , die hinsichtlich der Relation  $<$  geordnet sind. Sei  $H$  ein hinsichtlich  $<$  geordnetes System von Teilmengen einer beliebigen geordneten Menge  $Y$  der Mächtigkeit  $c$ . Dann gilt: Ist  $\alpha < \lambda$ , so gibt es für  $P(\alpha, \lambda)$  ein zu  $H$  ähnliches System von exakten Lösungen  $\tau$  mit  $\tau = c$ . Ferner: Ist  $\alpha$  ein linearer Ordnungstypus mit  $\alpha = c$ , so hat  $P(0, \alpha)$  ein zu  $H$  ähnliches System von exakten Lösungen  $\tau$  mit  $\tau = c$ . — Aus diesen beiden Sätzen folgen interessante Ergebnisse durch Spezialisierung von  $Y$ . Heranziehung eines Satzes von Sierpinski liefert dann:  $P(\alpha, \lambda)$  bzw.  $P(0, \alpha)$  läßt ein geordnetes System der Mächtigkeit  $> c$  von exakten Lösungen  $\tau$  mit  $\tau = c$  zu. — Von den anschließenden Sätzen seien erwähnt: Zu jeder Folge  $\{\alpha_\xi\}_{\xi < \theta}$  von Typen  $\alpha_\xi < \lambda$  ( $\theta =$  Anfangszahl zu  $c$ ) gibt es einen exakten Typus  $\tau$ , der Lösung von  $P(\alpha_\xi, \lambda)$  für alle  $\xi < \theta$  ist. Folgerung:  $P(\alpha, \lambda)$  gestattet u. a. eine wohlgeordnete Menge der Mächtigkeit  $> c$  von exakten Lösungen  $\tau$ ,  $\tau = c$ . — Ist  $\{\alpha_n\}_{n < \omega}$  eine Folge abzählbarer Typen mit  $\alpha_i < \alpha_j$  ( $i =$  Typus der Menge der rationalen Zahlen), so ist auch  $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_\eta$ . Folgerung:  $P(\alpha, \alpha_\eta)$  hat u. a. ein System vom Typus  $\omega_1$  von Lösungen. — Mittels des vom Verf. eingeführten Begriffs des Schismas wird eine große Reihe von Sätzen über unvergleichbare Typen bewiesen. Definition: Sei  $\bar{A} < \bar{B}$ . Wenn  $A = F + G$  (geordnete Summe) ist und dabei  $\bar{F} = 1 + \bar{G} \parallel \bar{B}$  gilt, so heißt das geordnete Paar  $(\bar{F}, \bar{G})$  ein Schisma von  $(\bar{A}, \bar{B})$ . — Sätze: Ist  $(\alpha', \beta')$  ein Schisma von  $(\gamma', \delta')$  und  $\gamma = \gamma'$ ,  $\delta = \delta'$ , so gibt es Typen  $\alpha = \alpha'$ ,  $\beta = \beta'$ , so daß  $(\alpha, \beta)$  ein Schisma von  $(\gamma, \delta)$  ist. — Die geordnete Menge  $A$  habe zwei Fixpunkte  $p < q$  und das Intervall  $(p, q)$  der Punkte  $x \in A$  mit  $p < x < q$  sei eine unendliche Menge. Dann existiert ein Schisma von  $(A - \{p\}, \bar{A})$  sowie ein Schisma von  $(A - \{q\}, \bar{A})$ . Folgerung:  $\bar{A} = \{p\} \parallel \bar{A} = \{q\}$ . Ferner: Ist  $A \subset B$ ,  $p \in B - A \ni q$ ,  $p < q$ , ist überdies  $(p, q) \cap A$  unendlich (unter  $(p, q)$  die Menge der  $x \in B$  mit  $p < x < q$  verstanden), so gilt  $\bar{A} \cup \{p\} \parallel \bar{A} \cup \{q\}$ . — Von den weiteren Sätzen möge noch der folgende erwähnt werden: Jede lineare Menge  $E$  mit der Mächtigkeit  $c$  umfaßt zwei disjunkte Mengen  $G$  und  $H$ , die beide die Eigenschaften A und C besitzen und für die darüber hinaus gilt:  $\bar{G} \parallel \bar{H}$ ;  $\bar{G} = \{p\} \parallel \bar{G} = \{q\}$  für  $p \in H \ni q$ ;  $\bar{H} \cup \{p\} \parallel \bar{H} \cup \{q\}$  für  $p \in G \ni q$ ;  $\bar{G} \cup \{q\} \parallel \bar{H} \cup \{p\}$  für  $q \in H$ ,  $p \in G$ . W. Neumer.

**Ginsburg, Seymour:** Further results on order types and decompositions of sets. Trans. Amer. math. Soc. **77**, 122—150 (1955).

Verf. setzt frühere Untersuchungen fort. Hinsichtlich der dabei verwendeten Bezeichnungen siehe vorstehend. Ref. Im § 1 wird die Zerlegung einer linearen Menge in ein disjunktes System von paarweise ihrer Ordnung nach unvergleichbaren Teilmengen behandelt. Verf. beweist u. a. die Sätze: 1.1. Sei  $E$  eine lineare Menge der Eigenschaft C und  $\alpha$  eine Ordnungszahl mit  $2 \leq \alpha \leq \omega$ . Dann ist  $E$  die Vereinigung eines Systems  $\{A_i\}_{i < \alpha}$  von paarweise disjunkten exakten Mengen mit  $\bar{A}_i = c = 2^{\aleph_0}$  derart, daß die Ordnungstypen  $\bar{A}_i$  paarweise unvergleichbar sind. — Korollar: Ist  $E = R$  ( $=$  Menge der reellen Zahlen), so können die  $A_i$  überdies als in  $R$  dichte Mengen mit der Eigenschaft C gefunden werden. — Die Voraussetzung der Eigenschaft C für  $E$  ist im Satz 1.1 wesentlich für die Exaktheit der  $A_i$ . Ohne diese Voraussetzung gilt aber noch: 1.3. Ist  $A$  eine lineare Menge mit  $\bar{A} = c$ , so kann man zu jeder Zahl  $\alpha$  mit  $2 \leq \alpha \leq \omega$  eine Darstellung  $A = \bigcup_{i < \alpha} E_i$  mit disjunkten  $E_i$  der Mächtigkeit  $c$

und paarweise unvergleichbaren Typen  $\bar{E}_\xi$  finden. — 1.4. Unter der Voraussetzung  $2^{\aleph_0} = \aleph_1$  läßt sich jede lineare Menge  $A$  mit  $\bar{A} = c$  als disjunkte  $\bigcup_{n < \omega} E_n$  schreiben mit exakten paarweise ordnungs-unvergleichbaren  $E_n$  der Mächtigkeit  $c$ . — 1.5. Eine geordnete Menge vom Typus  $\eta$  der Menge der rationalen Zahlen läßt sich nicht als endliche disjunkte Vereinigung von Mengen mit paarweise unvergleichbaren Typen darstellen. — § 2: Zerlegung in disjunkte ähnliche Mengen. Sätze (u. a.): 2.1. Die Menge  $R$  der reellen Zahlen ist disjunkte Vereinigung eines Systems  $\{E_n\}_{n < \omega}$  von exakten, paarweise ähnlichen Mengen (also  $\bar{E}_n = c$ ). — 2.2. Sei  $\{\alpha_\xi\}_{\xi < \theta}$  eine Folge von linearen Ordnungstypen  $\alpha_\xi \neq 0$  ( $\theta$  = Anfangszahl der Mächtigkeit  $c$ ). Dann gilt  $R = \bigcup_{\xi < \theta} E_\xi$ , wo die  $E_\xi$  disjunkt sind und  $\bar{E}_\xi = \alpha_\xi$  ist. — Durch beliebige Verfügung über die  $\alpha_\xi$  (z. B. alle  $\alpha_\xi = \alpha$ , wo  $\alpha$  noch vorgeschriebene Eigenschaften hat) erhält man hieraus spezielle Sätze. — Ausdehnung der Betrachtung auf Mengen  $E \equiv R$ . — U. a. Sätze über die Zerlegung von Mengen  $E$  mit  $\bar{E} = \eta$ . — § 3: Zerlegungen in Mengen mit der Eigenschaft A. Sätze (u. a.): 3.1. Umfaßt eine lineare Menge  $E$  eine Teilmenge  $D$  der Mächtigkeit  $c$ , die eine Vereinigung von  $n$  ( $< \omega$ ) paarweise disjunkten ähnlichen Mengen ist, so kann  $E$  nicht in weniger als  $n$  disjunkte Teilmengen mit der Eigenschaft A zerlegt werden. — 3.2. Ist  $c = \aleph_1$ , so ist jede lineare Menge  $E$  der Mächtigkeit  $c$  die Vereinigung eines Systems  $\{E_n\}_{n < \omega}$  von paarweise disjunkten exakten Mengen der Eigenschaft A derart, daß die Typen  $\bar{E}_n$  paarweise unvergleichbar sind. Hat überdies  $E$  die Eigenschaft C, so kann jedes  $E_n$  in  $E$  dicht und ebenfalls mit der Eigenschaft C begabt gewählt werden. — 3.4. Jede lineare Menge  $E$  der Mächtigkeit  $c$  ist disjunkte Vereinigung eines Systems  $\mathfrak{C} = \{E_\xi\}_{\xi < \theta}$  von exakten Mengen mit folgender Eigenschaft: Ist  $\mathfrak{P}$  ein beliebiges Teilsystem von  $\mathfrak{C}$  mit einer Mächtigkeit  $< c$ , so hat  $S(\mathfrak{P}) = \bigcup_{E_\xi \in \mathfrak{P}} E_\xi$  die Eigenschaft A.

Besitzt  $E$  die Eigenschaft C, so ist  $S(\mathfrak{P})$  stets exakt. Folgerungen: Die  $E_\xi$  besitzen die Eigenschaft A; für  $\xi \neq \eta$  ist keine Teilmenge von  $E_\eta$  mit der Mächtigkeit  $c$  einer Teilmenge von  $E_\xi$  ähnlich. — 3.5. Sei  $E$  eine lineare Menge mit  $\bar{E} = c$ ,  $\alpha$  eine Zahl mit  $2 \leq \alpha \leq \theta$ . Dann ist  $E$  für jedes  $\alpha$  die disjunkte Vereinigung eines Systems  $\{E_\nu\}_{\nu < \alpha}$  von Mengen  $E_\nu$  mit  $\bar{E}_\nu = c$  derart, daß gilt: Für jedes  $\nu < \alpha$ , jedes  $N \subset E_\nu$  mit  $\bar{N} = c$  und jede Ähnlichkeitsabbildung  $f$  von  $N$  in  $R$  ist die Mächtigkeit von  $(E \cap f(N)) - E_\nu$  kleiner als  $c$ . Folgerung: Für  $\xi \neq \eta$  ist keine Teilmenge von  $E_\xi$  der Mächtigkeit  $c$  einer Teilmenge von  $E_\eta$  ähnlich. Wenn  $\alpha < \theta$ , so brauchen die  $E_\xi$  aber nicht mehr die Eigenschaft A zu besitzen (wie im Satz 3.4.). Interessante Folgerungen ergeben sich, wenn  $E = R$  genommen wird; dann ist u. a. kein  $E_\nu$  meßbar; jedes  $E_\nu$  wird bei allen Ähnlichkeitsabbildungen  $f$  von  $E_\nu$  in  $R$  reproduziert bis auf einen Teil von einer Mächtigkeit  $< c$ . Hierin sind einige Ergebnisse von Sierpinski enthalten, wenn man für  $f$  eine beliebige Translation wählt. — § 4: Untersuchungen über das Problem P. Aus den wesentlichen Sätzen 4.1 und 4.3 läßt sich u. a. entnehmen: Sei  $\{\alpha_\xi\}_{\xi < \theta}$  eine Folge linearer Ordnungstypen mit  $\alpha_\xi = c$  und  $\alpha_\xi < \lambda$  (= Typus der Menge der reellen Zahlen). Dann gilt: (1) Zu jedem  $\xi$  gibt es einen exakten Typus  $\tau_\xi$  mit  $\alpha_\xi < \tau_\xi < \lambda$ , wobei die  $\tau_\xi$  paarweise unvergleichbar sind. (2) Zu jedem  $\xi$  gibt es ein exaktes  $\sigma_\xi$  mit der Eigenschaft A und mit  $0 < \sigma_\xi < \alpha_\xi$ , wobei die  $\sigma_\xi$  ebenfalls paarweise unvergleichbar sind.

W. Neumer.

Eyraud, Henri: Fonctionnelles spéciales et théorème du continu. Ann. Univ. Lyon, III. Sér., Sect. A 17, 5—10 (1954).

Ein neuer vergeblicher Versuch des Verf., die Kontinuumhypothese zu beweisen. — Sei  $\Phi = [0, \omega_1)$  die Menge aller Ordnungszahlen  $< \omega_1$ . Unter der Länge einer Teilmenge  $M$  von  $\Phi$  wird ihr Ordnungstypus  $\bar{M} = \mu$  verstanden; ist  $\mu < \omega_1$ ,



so heißt  $\sup \Phi = \sigma (< \omega_1)$  die Höhe von  $\Phi$ . — Eine Masche der Länge  $\omega$  ist eine Teilmenge der Länge  $\omega$  von  $\Phi$ , die ein Endstück der Form  $\{x, x + \omega\}$  hat. Sind die Maschen der Längen  $\omega^r$ ,  $1 \leq r < \eta < \omega_1$ , definiert, so ist eine Masche der Länge  $\omega^\eta$  eine Teilmenge der Länge  $\omega^\eta$  von  $\Phi$ , die ein Endstück der Form  $\{x, x + \omega^\eta\}$  hat, während das zugehörige Anfangsstück die geordnete Summe von endlich vielen Mengen ist, deren jede eine Masche von einer Länge  $< \omega^\eta$  darstellt oder nur aus einer einzigen Zahl besteht. — Eine Masche, deren Höhe gleich ihrer Länge ist, heißt ein  $P$ -Abschnitt. — Ein  $P$ -Abschnitt heißt prim, wenn kein Abschnitt von ihm ein  $P$ -Abschnitt ist. — Ein  $P$ -Abschnitt heißt von 1. Art, wenn sich unter seinen Abschnitten ein größter  $P$ -Abschnitt befindet; er heißt von 2. Art, wenn er nicht prim ist und es keinen größten  $P$ -Abschnitt unter seinen Abschnitten gibt. [Zur Abkürzung werde unter einem  $P$ -Abschnitt eines  $P$ -Abschnitts  $B$  ein Abschnitt  $A$  von  $B$  verstanden, der selbst  $P$ -Abschnitt ist. Ref.] — Es gibt nur abzählbar viele Maschen mit gegebener Höhe, also nur  $\aleph_1$  Maschen überhaupt. — Verf. bemerkt, daß man die  $P$ -Abschnitte in Form eines Baumes anordnen kann, dessen Zweige so beginnen:  $t_0 \subset t_1 \subset \dots \subset t_n \subset \dots$  ( $n < \omega$ ), wo  $t_0$  ein primer und  $t_{n+1}$  ein  $P$ -Abschnitt mit  $t_n$  als größtem  $P$ -Abschnitt ist. Ist auch  $\bigcup_{i < \omega} t_i$  ein  $P$ -Abschnitt  $t_\omega$ , so läßt sich der Zweig fortsetzen mit  $t_\omega \subset \dots \subset t_{\omega+n} \subset \dots$  ( $n < \omega$ ), so daß  $t_{\omega+n}$  ein größter  $P$ -Abschnitt von  $t_{\omega+n+1}$  ist; usf. durch Rekursion. [Diese Struktur ergibt sich einfach daraus, daß jeder nicht prime  $P$ -Abschnitt die Vereinigung  $\bigcup_{\nu < \tau} t_\nu$  der wohlgeordneten Folge seiner wachsenden  $P$ -Abschnitte  $t_\nu$  ist; dabei muß  $t_0$  prim,  $t_\nu$  der größte  $P$ -Abschnitt von  $t_{\nu-1}$  und  $t_\lambda = \bigcup_{\nu < \lambda} t_\nu$  für Limes- $\lambda < \tau$  sein. Ref.] Ist  $\{t_\nu\}_{\nu < \omega}$  ein Zweig der Länge  $\omega_1$ , so nennt Verf. die Menge  $T = \bigcup_{\nu < \omega_1} t_\nu$  eine „fonctionnelle spéciale“: er behauptet, daß es  $\aleph_1^{\aleph_1}$  verschiedene Mengen  $T$  gebe (Theorem III). [In Wahrheit gibt es deren nur  $\aleph_1$ . Denn jedes solche  $T$  ist eine geordnete Summe der Form  $\sum_{i < n} M_i = \{x, \omega_1\}$ , wo  $x < \omega_1$ ,  $n < \omega$  und die  $M_i$  Maschen oder ein-elementige Mengen sind. Denn sei  $\sigma_\nu$  die Höhe von  $t_\nu$ ; jedes  $t_\nu$  besitzt ein (größtes) Endstück der Form  $\{\gamma_\nu, \sigma_\nu\}$ , wo  $\gamma_\nu = f(\sigma_\nu) < \sigma_\nu$ . Die Menge der  $\sigma_\nu$  hat die Länge  $\omega_1$  und ist in  $\Phi$  abgeschlossen. Nach einem bekannten Satze gibt es daher ein  $\nu_0$ , so daß die Urbildmenge  $f^{-1}(\gamma_{\nu_0})$  die Mächtigkeit  $\aleph_1$  besitzt. Daraus folgt, daß  $\{\gamma_{\nu_0}, \omega_1\} \subset T$  ist. Ref.] Verf. definiert die fonctionnelles spéciales auch als Teilmengen der Länge  $\omega_1$  von  $\Phi$ , deren sämtliche Abschnitte ein letztes Element haben oder mit einer Masche als Endstück schließen. [Man sieht leicht, daß auch derartige Mengen die vorhin angegebene Form haben müssen. Ref.] — Verf. sagt nun ohne jeden Anhaltspunkt aus, daß die Menge der Zweiganfänge  $\{t_i\}_{i < \omega}$ , die zu Zweigen der Länge  $\omega_1$  gehören, also unter den  $P$ -Abschnitte  $t_\omega = \bigcup_{i < \omega} t_i$  liefernden Zweiganfängen vorkommen, die Mächtigkeit  $\aleph_1^{\aleph_0}$  habe; da es überhaupt nur  $\aleph_1$   $P$ -Abschnitte gibt, so würde in der Tat  $\aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_0$  folgen, wenn diese Aussage richtig wäre.

W. Neumer.

• Eyraud, Henri: La théorie de la récurrence transfinie. 2. éd., rev. et corrigée. Lyon: Université de Lyon, Faculté des Sciences, Institut de Mathématiques 1954. 9 p. (hektogr.)

Die erste Hälfte ist ein Auszug aus der vorstehend referierten Abhandlung; in der zweiten wird bewiesen, daß eine wohlgeordnete Menge, die eine allgemeine „récurrence“ 1. Klasse trägt, höchstens die Mächtigkeit der zweiten Zahlenklasse hat, wenn die Kontinuumhypothese richtig ist (vgl. dies. Zbl. 53, 223).

W. Neumer.

Barros Neto, José de: Über die Konstruktion einer vollständig additiven Klasse. Soc. Paranaense Mat., Anuário 1, 9–11 (1954) [Portugiesisch].

L'A., applicando il principio di induzione transfinita, espone un procedimento di

costruzione della classe completamente additiva degli insiemi di Borel che, com'è noto, è contenuta nella classe degli insiemi misurabili di Lebesgue. *L. Giuliano.*

**Sierpinski, W.:** *Sur une propriété de la droite équivalente à l'hypothèse du continu.* *Ganita* 5, Nr. 2, 113—116 (1954).

L'A. considère la proposition  $P$  que voici:  $P$ : Il existe un procédé  $f$  faisant correspondre à chaque point  $x \in R$  ( $R = \text{droite}$ ) une famille  $f(x)$  de puissance  $\leq \aleph_0$  de segments de  $R$  de forme  $[x, y]$  de manière que, pour chaque couple de points distincts  $p, q$  de  $R$ , on ait  $[p, q] \cap f(p) \cup f(q)$ . La proposition  $P$  est équivalente à celle-ci:  $P_1$ : Le plan  $R^2$  est réunion de deux ensembles  $A, B$ ,  $A, B$  étant  $\leq \aleph_0$  sur chaque parallèle à l'axe des  $y$  et à l'axe des  $x$  respectivement. On sait que  $P_1 \leftrightarrow H$  ( $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ) [cf. Sierpinski, Hypothèse du continu (ce Zbl. 9, 302), en particulier p. 9—11]. Par conséquent  $P \leftrightarrow H$ . L'A. prouve directement cette équivalence. *G. Kurepa.*

**Adams, J. F.:** *On decompositions of the sphere.* *J. London math. Soc.* 29, 96—99 (1954).

Es wird ein Theorem von R. M. Robinson (dies. Zbl. 32, 403) modifiziert, das sich im dreidimensionalen euklidischen Raum auf die Möglichkeit der Zerlegung einer Kugelfläche  $S$  in elementfremde Teilmengen  $A_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) bezieht, für die ein System von Kongruenzbeziehungen  $A_{i_1} + \dots + A_{i_r} \simeq A_{j_1} + A_{j_2} + \dots + A_{j_s}$  mit  $0 < r < n$  und  $0 < s < n$  besteht, wobei die Kongruenz nicht allein im Sinne der gleichsinnigen, sondern auch der gegensinnig kongruenten Abbildungen von  $S$  in sich verstanden wird. *P. Inzinger.*

## **Differentiation und Integration reeller Funktionen. Maßtheorie:**

● **Baule, Bernhard:** *Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs. Bd. I. Differential- und Integralrechnung.* 9. Aufl. Leipzig: Hirzel Verlag 1954. VIII, 187 p. 193 Abb. DM 7,—.

Daß dieses bekannte Buch, dessen erste Auflage 1942 (s. dies. Zbl. 27, 299) erschien, jetzt schon die neunte erreicht hat, zeigt, wie sehr es den Bedürfnissen derer, für die es bestimmt ist, entgegenkommt und auch angemessen ist. In den sieben Bänden, deren vorliegender erster Differential- und Integralrechnung einer und mehrerer Variablen bringt, setzt sich Verf. das Ziel, dem jungen Studierenden einen möglichst weiten Überblick über das Gebiet der Mathematik zu geben. Er erreicht es, indem er, wie er sagt „mit dem Schüler an der Hand über manche gefährliche Stelle hinwegspringt, ohne von den Gefahren viel zu reden, die dort lauern“. Der Techniker und Naturforscher kann dann „von der gewonnenen Höhe aus mit einiger Sicherheit den Weg zur Lösung seiner Probleme erkennen“, der Mathematiker muß sein Wissen natürlich noch vertiefen. *G. Lochs.*

● **Ostrowski, A.:** *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Bd. III. Integralrechnung auf dem Gebiet mehrerer Variablen.* (Lehrbücher und Monographien a. d. Gebiete der exakten Wissenschaften.) Basel/Stuttgart: Verlag Birkhäuser 1954. 475 S., 36 Abb. SFr. 78,—.

In der Besprechung des 1. und 2. Bandes (dies. Zbl. 44, 275) ist über Tendenz und Eigenart des Werkes im Ganzen bereits alles Wesentliche gesagt. Die für den jetzt vorliegenden 3. Bd. maßgebenden Gesichtspunkte werden vom Verf. im Vorwort folgendermaßen gekennzeichnet: „Die wichtigste bei der Gestaltung dieses Bandes zu treffende Entscheidung bestand in der Wahl des geeigneten Integralbegriffes. Er sollte anschaulich zugänglich sein und zugleich eine genügend breite Grundlage für die Fundierung der „klassischen Analysis“ liefern. Daß der Lebesgue'sche Integralbegriff hierfür leider nicht in Frage kam, ist wohl selbstverständlich. Darüber hinaus halte ich aber auch den gewöhnlich in einem ähnlichen Zusammenhang gewählten Riemannschen Integralbegriff nicht für genügend durchsichtig. So



habe ich auf den alten klassischen Ansatz der Exhaustionsmethode von Eudoxus zurückgegriffen, der mir anschaulich am zugänglichsten erscheint. Der Integralbegriff, mit dem ich operiere, ist dem Wesen der Sache nach das Integral einer stetigen Funktion über eine offene Menge . . . Bei der Aufstellung der in den Lehrgang gehörenden klassischen Sätze habe ich mich zumeist bemüht, bis zu Formulierungen vorzudringen, die in den Anwendungen besonders praktisch zu handhaben sind, und dies auch dann, wenn die Durchführung des Beweises gegenüber dem sonst Üblichen größere Ergänzungen verlangte. — Im einzelnen ist der Aufbau folgender: 1. Kapitel: Ergänzungen zur Integrationstechnik (Partialbruchzerlegung, Integration der rationalen sowie algebraischer und transzendenter Funktionen). 2. Kapitel: Definition und Existenz des Flächenintegrals über achsenparallele Rechtecke  $R$  für in  $R - N$  stetige, gleichmäßig beschränkte Integranden  $f$ , wobei  $N$  eine (Jordan-sche) Nullmenge ist. Darstellung eines solchen Flächenintegrals als iteriertes (Doppel-) Integral (wobei hier dem Integranden zusätzliche Bedingungen auferlegt werden). Verallgemeinerung auf beschränkte Integrationsbereiche, deren Begrenzungen Nullmengen sind, sowie auf den Fall des euklidischen  $n$ -dimensionalen Raumes ( $n \geq 1$ ). Diskussion dieses verallgemeinerten Integrals für  $n = 1$  (partielle Integration, Transformation der Integrationsvariablen, 2. Mittelwertsatz usw.) und für  $n = 2$ . — 3. Kapitel: Berechnung mehrfacher Integrale: Linienintegrale für  $n \leq 3$ ; Beweis von  $\iint (g'_x - g'_y) dx dy = \int (g dx - f dy)$  für Bereiche, deren Begrenzung aus endlich vielen glatten Bogen besteht; Integration totaler Differentiale; Variablensubstitution in Flächenintegralen. — 4. Kapitel: Anwendung mehrfacher Integrale: Oberflächenintegrale; Sätze von Ostrogradski und Stokes (auch in Vektorschreibweise); Volumina von Rotationsflächen. Guldinsche Regeln. — Eingehend werden sodann die einfachen und mehrfachen uneigentlichen Integrale behandelt; Gammafunktion (5. und 6. Kapitel). — 7. Kapitel: Fourierreihen und Fourierintegrale (u. a. auch Orthogonalsysteme, Besselsche Ungleichung, Vollständigkeitsrelation, Parsevalsche Formel, Konvergenzdefekte bei Fourierreihen; Rayleigh-Planchersche Formel). Eine Fülle von höchst instruktiven Aufgaben beschließt ein jedes Kapitel. Ein Sachregister von erfreulicher Ausführlichkeit ist beigegeben. Der Name des Verfassers bürgt für Strenge und Eleganz der Darstellung. Nach Meinung des Ref. hat Verf. das Ziel, das er im oben zitierten Vorwort bezeichnet hat, mit diesem ausgezeichneten Buch in vorbildlicher Weise gelöst. *Otto Haupt.*

**Moore, Marian A.:** Approximations of  $\Phi$ -integrals by Riemann and Darboux sums, and other contributions to the theory of  $\Phi$ -integrals in general spaces. *Revista Mat. Univ. Parma* 5, 99—123 (1954).

Die Verf. beschäftigt sich mit der Übertragung einer Reihe von Ergebnissen aus Hahn-Rosenthal, Set functions (dies. Zbl. 33, 53) vom Fall eines endlichen auf den eines sigma-endlichen Maßes und ähnlichen Verallgemeinerungen. Sie betrachtet vor allem Approximationen des Integrals über einen metrischen Raum durch abzählbare Riemannsche oder Darboux'sche Summen, die Höldersche Ungleichung und einige Konvergenzsätze. *K. Krickeberg.*

**Fichera, Gaetano:** Sulla derivazione delle funzioni additive d'insieme. *Rend. Sem. mat. Univ. Padova* 23, 366—397 (1954).

Sia  $\mathcal{D}$  un anello [secondo P. R. Halmos: Measure Theory (questo Zbl. 40, 168), p. 19] e siano  $\alpha$  e  $\mu$  rispettivamente una funzione finita non negativa finitamente additiva in  $\mathcal{D}$  et una misura finita in  $\mathcal{D}$ . Denoti:  $\mu$  la misura  $\sigma$ -finita nel più piccolo  $\sigma$ -anello (secondo P. R. Halmos: loc. cit. p. 24) contenente  $\mathcal{D}$ , la restrizione della quale a  $\mathcal{D}$  sia uguale a  $\mu$  (cfr. P. R. Halmos: loc. cit. p. 54);  $O_P$ , per ogni  $P \in \mathcal{D}$ , l'insieme delle funzioni  $f$  non negative sommabili rispetto a  $\mu$  in  $P$  e tali che  $\int_X f d\mu \leq \alpha(X)$  per  $P \supseteq X \in \mathcal{D}$ ;  $F$  la funzione numerica definita in  $O_P$  associando

ad ogni  $f \in O_P$  il numero  $\int_P f d\mu$ . — La funzione  $\alpha$  è detta dall'A.  $\mu$ -derivabile su  $P$  quando  $F$  è dotata di massimo; ogni  $f \in O_P$  che sia massimante per  $F$ , nell'ipotesi che esista, è detta  $\mu$ -derivata di  $\alpha$  su  $P$ . Le derivate di  $\alpha$  su  $P$ , nell'ipotesi che esistano, sono  $\bar{\mu}$ -equivalenti. — Sia ora  $\beta$  una funzione finitamente additiva nell'anello  $\mathcal{D}$  ed ivi a variazione finita; la funzione  $\beta$  è detta dall'A.  $\mu$ -derivabile su  $P$  quando tali sono la variazione superiore  $\beta^+$  di  $\beta$  e la variazione inferiore  $\beta^-$  di  $\beta$ ; se  $\beta$  è  $\mu$ -derivabile su  $P$ , ogni funzione definita in  $P$  che sia la differenza di una  $\mu$ -derivata di  $\beta^+$  su  $P$  e di una  $\mu$ -derivata di  $\beta^-$  su  $P$  è detta dall'A.  $\mu$ -derivata di  $\beta$  su  $P$ ; se le  $\mu$ -derivate di  $\beta$  su  $P$ , supposte esistenti, sono  $\bar{\mu}$ -equivalenti a zero, la funzione  $\beta$  è detta  $\mu$ -singolare su  $P$ . L'A. dimostra il seguente teorema che generalizza quello ormai classico di Vitali-Radon-Nikodym: Ogni funzione  $\beta$  finitamente additiva in un anello d'insiemi  $\mathcal{D}$  e ivi a variazione finita è  $\mu$ -derivabile su ogni insieme  $P \in \mathcal{D}$ . Per ogni  $P \in \mathcal{D}$  risulta inoltre  $\beta(X) = \beta^*(X) + \int_X f d\bar{\mu}$  per  $P \supseteq X \in \mathcal{D}$ ,  $\beta^*$  essendo  $\mu$ -singolare su  $P$ , se e solo se  $f$  è una  $\mu$ -derivata di  $\beta$  su  $P$ . Tale teorema è dimostrato dall'A. nell'ipotesi più generale che  $\beta$  sia una funzione finitamente additiva in un semi-anello  $\mathcal{Q}$  (secondo P. R. Halmos: loc. cit. p. 22) e ivi a variazione finita. Funzioni siffatte si lasciano invero prolungare in modo unico in funzioni finitamente additive ed a variazione finita nel più piccolo anello contenente  $\mathcal{Q}$ . *F. Cafiero.*

**Rådström, Hans:** A generalized differential and its integration. 12. Skand. Mat.-Kongr., Lund 1953, 260—262 (1954).

Die reellen Funktionen  $f(h)$  und  $g(h)$  der reellen Veränderlichen  $h$  heißen äquivalent, wenn  $f(h) - g(h) = o(h)$  für  $h \rightarrow 0$  gilt. Es sei  $\mathfrak{E}$  die Menge der entsprechenden Äquivalenzklassen. Ein Differential ist eine Abbildung der reellen Zahlen in  $\mathfrak{E}$ , speziell das Differential  $df$  der reellen Funktion  $f(x)$  diejenige Abbildung, die der Zahl  $x$  die Äquivalenzklasse von  $f(x+h) - f(x)$  zuordnet (im klassischen Fall setzt man voraus, daß diese Äquivalenzklasse eine lineare Funktion enthält; die Verallgemeinerung besteht in der Weglassung dieser Voraussetzung). Ein Integrationsprozeß ist eine lineare Operation, die den Elementen einer linearen Menge von Differentialen eine Klasse voneinander nur in einer additiven Konstanten unterscheidender reeller Funktionen zuordnet. Es werden sehr allgemeine Integrationsprozesse dieser Art erwähnt. Eine ausführliche Darstellung wird später veröffentlicht.

*A. Császár.*

**Sengupta, H. M.:** On continuous semi-independent functions. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 5, 172—174 (1954).

L'A. trae alcune semplici conseguenze da un suo precedente lavoro (v. questo Zbl. 30, 299).

*T. Viola.*

**Ungar, Peter:** Freak theorem about functions on a sphere. J. London math. Soc. 29, 100—103 (1954).

Let  $f$  be a continuous function on the surface of a sphere and let  $D_0$  be a region on the same surface. Suppose that  $\int_D f dv = 0$  for all regions  $D$  congruent to  $D_0$ . When does it follow, that  $f \equiv 0$ ? The author proves, that when  $D_0$  is a spherical cap of radius  $\alpha$ , the set of values of  $\alpha$  for which  $f \equiv 0$  does not follow, is every-where dense in  $(0, \frac{1}{2}\pi)$  and so is the set for which it does. He also gives an example of a non-circular region  $D_0$  for which  $f \equiv 0$  does not follow.

*A. Nordlander.*

**Kostovskij, A. N.:** Die Quadrierbarkeit stetiger Flächen, die in Polarkoordinaten gegeben sind. Ukrain. mat. Žurn. 6, 81—104 (1954) [Russisch].

Prenant comme point de départ la théorie de Lebesgue, l'auteur étudie l'aire des surfaces données en coordonnées polaires. Soit le rectangle  $I_0$  défini par les inégalités  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ ,  $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$ , où  $0 \leq \alpha_1$ ,  $\alpha_2 < \frac{1}{2}\pi$ ,  $0 \leq \beta_1$ ,  $\beta_2 < 2\pi$ . Désignons par  $m$  la borne inférieure, sur  $I_0$ , d'une fonction réelle  $f(\alpha, \beta)$ , définie et lipschitzienne



sur  $I_0$  et supposons que  $0 < m$ . Envisageons la surface  $S$  donnée par les relations (1)  $x = f(\alpha, \beta) \cos \alpha \cos \beta$ ,  $y = f(\alpha, \beta) \cos \alpha \sin \beta$ ,  $z = f(\alpha, \beta) \sin \alpha$ . Dans le § 1 du travail on établit, pour l'aire  $L(S, I_0)$ , au sens de Lebesgue, de  $S$ , l'expression

$$L(S, I_0) = \iint_{I_0} \sqrt{f^2(\alpha, \beta) \cos^2 \alpha + (\partial f / \partial \alpha)^2 \cos^2 \alpha + (\partial f / \partial \beta)^2} \cdot f(\alpha, \beta) d\alpha d\beta.$$

Dans le § 2 on étudie les fonctions de deux variables, à variation bornée au sens de Tonelli.

Posons  $q^2(\alpha, \beta) = f^2(\alpha, \beta) \cos^2 \alpha + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f^2(t, \beta) \sin t dt$ , où  $f(\alpha, \beta)$  est continue sur  $I_0$ . On démontre que, pour que  $f^2(\alpha, \beta)$  et  $q^2(\alpha, \beta)$  satisfassent simultanément les conditions: a) pour presque chaque  $\bar{\alpha} \in [\alpha_1, \alpha_2]$ , la fonction  $f^2(\alpha, \beta)$  est à variation bornée sur  $[\beta_1, \beta_2]$ ; b) pour presque chaque  $\bar{\beta} \in [\beta_1, \beta_2]$ , la fonction  $q^2(\alpha, \bar{\beta})$  est à variation bornée sur  $[\alpha_1, \alpha_2]$ ; c)  $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \bigvee_{\beta_1}^{\beta_2} (f^2, \alpha) d\alpha < \infty$  et  $\bigvee_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (q^2, \beta) d\beta$

$< \infty$ , il est nécessaire et suffisant que la fonction  $f(\alpha, \beta)$  soit à variation bornée au sens de Tonelli. Dans les §§ 3, 4 et 5 on étudie certaines fonctions de rectangle associées à la surface  $S$ , l'intégrale au sens de Burkill et la dérivée généralisée de certaines de ces fonctions. On obtient le théorème suivant: Pour que la surface  $S$  donnée par (1), où  $f(\alpha, \beta)$  est continue sur  $I_0$  et  $m > 0$ , ait une aire finie; au sens de Lebesgue, sur  $I_0$ , il est nécessaire et suffisant que  $f(\alpha, \beta)$  soit à variation bornée au sens de Tonelli, sur  $I_0$ . Si cela a lieu, on prouve que

$$L(S, I_0) \geq \iint_{I_0} f(\alpha, \beta) \sqrt{f^2(\alpha, \beta) \cos^2 \alpha + (\partial f / \partial \alpha)^2 \cos^2 \alpha + (\partial f / \partial \beta)^2} d\alpha d\beta$$

Pour presque chaque point  $(\alpha, \beta)$  de  $I_0$  on a

$$L'(\alpha, \beta) = f(\alpha, \beta) \sqrt{f^2(\alpha, \beta) \cos^2 \alpha + (\partial f / \partial \alpha)^2 \cos^2 \alpha + (\partial f / \partial \beta)^2}.$$

S. Marcus.

**Delange, Hubert:** Sur deux questions posées par M. Karamata. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 7, 69—80 (1954).

L'A. osserva che se  $f$  è una funzione reale dotata in  $[x_0, +\infty)$  di soli punti di discontinuità di prima specie ed assumente in ogni punto  $x$  diverso da  $x_0$  valore compreso tra  $f(x-0)$  e  $f(x+0)$ , l'ulteriore ipotesi:  $\limsup_{x \rightarrow -\infty} f(x+t) - f(x) < +\infty$  per  $t > 0$  (risp.  $\limsup_{x \rightarrow -\infty} [f(x+t) - f(x)] < +\infty$  per  $t > 0$ ), implica che in

corrispondenza di ogni  $h > 0$  (risp. di ogni coppia di numeri  $h_1$  e  $h_2$ , tali che  $0 < h_1 < h_2$ ) si lascia determinare un numero positivo  $M$  tale che

$$|f(x+t) - f(x)| \leq M \text{ per } x \geq x_0 \text{ e } 0 \leq t \leq h$$

(risp.  $f(x+t) - f(x) \leq M$  per  $x \geq x_0$  e  $h_1 \leq t \leq h_2$ ).

F. Cafiero.

**Liu, Meng-Hui:** A very simple example of non-differentiable continuous function. Acta math. Sinica 4, 479—481 und engl. Zusammenfassg. 482 (1954) [Chinesisch]. Correction. Ibid. 5, 137 (1955).

**Ravetz, J.:** The Denjoy theorem and sets of fractional dimension. J. London math. Soc. 29, 88—98 (1954).

Un'acuta e profonda indagine viene qui iniziata, a proposito di un celebre teorema di A. Denjoy [J. Math. pur. appl., VII. Sér. 1, 187 e segg. (1915)], riallacciandosi a un lavoro di E. H. Hanson (questo Zbl. 10, 200). Dapprima vengono studiate alcune proprietà degli insiemi lineari, perfetti ed ovunque non densi che hanno una ben determinata misura frazionale esterna nel senso di F. Hausdorff [Math. Ann. 79, 157—179 (1918)]. Si danno poi esempi di funzioni reali e continue  $f(x)$  che soddisfano, in  $(0, 1)$ , rispettivamente alle seguenti quattro proprietà, indicando con  $E$  un opportuno insieme  $\subset (0, 1)$  avente misura frazionale esterna  $p$  arbitrariamente prefissata (con  $0 \leq p < 1$ ), e con  $F$  un opportuno insieme  $\subset (0, 1)$

avente dimensione 1 [Cfr. A. S. Besicovitch, *Math. Annalen* **101**, 161—193 (1929); anche questo *Zbl.* **10**, 14];

1° [risp. 2°]:  $D_+ f(x) = D_- f(x) = D^- f(x) = 0$ ,  $D^+ f(x) = +\infty$  in  $E$  [risp.  $F$ ],

3° [risp. 4°]:  $D_+ f(x) = D_- f(x) = D^- f(x) = 0$ ,  $\frac{1}{2} \leq D^+ f(x) \leq 1$  in  $E$  [risp.  $F$ ].  
T. Viola.

**Mambriani, Antonio:** Su i prodotti delle derivazioni definite, d'ordine qualsiasi. *Rivista Mat. Univ. Parma* **5**, 209—215 (1954).

Complément à un précédent article (A. Mambriani, *ce Zbl.* **50**, 283) auquel il est renvoyé pour les notations. L'A. établit la formule

$$D_{x_0}^\mu D_{x_0}^\nu f(x) = D_{x_0}^{\mu+\nu} f(x) - \sum_{k=1}^n [D_{x_0}^{\nu-k} f(x)]_{x=x_0} \frac{(x-x_0)^{-\mu-k}}{(-\mu-k)!}$$

où  $n$  est un entier positif supérieur à  $\Re \nu$ .

A. Revuz.

**Aquaro, Giovanni:** Sul criterio di Arzelà per la continuità del limite di una successione convergente di funzioni continue. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari* **24**, 10—13 (1954).

L'A. chiama spazio  $(v_I)$  uno spazio  $(v)$  secondo Fréchet [Les Espaces Abstraits, Paris (1918/20), p. 172], nel quale sia verificato l'assioma: Per ogni coppia di intorno di uno stesso punto esiste un intorno di questo contenuto in ciascuno dei dati. Siano:  $S$  uno spazio  $(v_I)$ ,  $T$  uno spazio topologico definito da una metrica  $d$  in  $T$ ,  $(f_n)$  ed  $f$  rispettivamente una successione di funzioni da  $S$  verso  $T$  e una funzione da  $S$  verso  $T$ . La successione  $(f_n)$  è detta dall'A. convergente quasi-uniformemente secondo Arzelà verso  $f$  in  $S$  quando: 1°  $\lim_n f_n(x) = f(x)$  per  $x \in S$ ; 2° comunque si assegnino il numero positivo  $\varepsilon$  e l'intero positivo  $\nu$ , esiste una funzione  $v_\varepsilon$  da  $S$  verso l'insieme dei numeri interi positivi, limitata superiormente in  $S$ , tale che  $\nu \leq v_\varepsilon(x)$  e  $d(f(x), f_{v_\varepsilon(x)}(x)) < \varepsilon$  per ogni  $x \in S$ . L'A. dimostra indi che, data la successione  $(f_n)$  di funzioni continue in  $S$  convergente in  $S$  verso  $f$ , affinché  $f$  sia continua in  $S$  è sufficiente e, se  $S$  è compatto in sé, necessario, che la convergenza di  $(f_n)$  verso  $f$  in  $S$  sia quasi uniforme secondo Arzelà.

F. Cafiero.

**Pucci, Carlo:** Sulla compattezza di successioni di funzioni reali. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. **14**, 471—476 (1953).

**Pucci, Carlo:** Compattezza di successioni di funzioni e derivabilità delle funzioni (limiti). *Ann. Mat. pura appl.*, IV. Ser. **36**, 1—25 (1954).

Queste ricerche possono considerarsi un ampliamento e un perfezionamento di quelle, famose, dovute a G. Ascoli [Mem. Accad. naz. Lincei, III. Ser. **18**, 521—586 (1884)] e a C. Arzelà [Mem. Accad. Sci. Bologna, IV. Ser. **3**, 117—141 (1906)]. In esse hanno importanza fondamentale i seguenti concetti, relativi ad una successione  $\{f_n(x)\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) di funzioni reali di punto, ciascuna definita in un corrispondente insieme  $A_n \subseteq S_r$  (generico spazio euclideo,  $r$  indipend. da  $n$ ). a) Le  $f_n(x)$  sono dette pseudoequicontinue se, prefissato ad arbitrio un  $\varepsilon > 0$ , esistono un  $\delta_\varepsilon > 0$  e un indice  $n_\varepsilon$  tali che  $|f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon$  per  $x, x' \in A_n$  con  $\overline{xx'} < \delta_\varepsilon$ , e per  $n > n_\varepsilon$ . Si supponga poi che l'insieme  $A' = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  nel senso di F. Hausdorff (Grundzüge der Mengenlehre, Lipsia 1914, anche ediz. New York 1949, pp. 236, 295), non sia vuoto. b) La successione  $\{f_n(x)\}$  è detta biconvergente al numero  $l$  (bivergente a  $+\infty$ , rispettivamente a  $-\infty$ ) in un punto  $x_0 \in A'$  se, per ogni successione  $\{x_n\}$  tendente ad  $x_0$  con  $x_n \in A_n$ , la successione  $\{f_n(x_n)\}$  risulta convergente ad  $l$  (divergente a  $+\infty$ , rispettivamente a  $-\infty$ ). c) La successione  $\{f_n(x)\}$  è detta biconvergente (bidivergente) in un insieme  $A$ , se  $A \subseteq A'$  ed  $\{f_n(x)\}$  biconverge (bidiverge) in ogni singolo punto di  $A$ . — Enunciamo i principali teoremi dimostrati dall'A. Se la successione  $\{f_n(x)\}$  biconverge alla funzione  $f(x)$  in  $A$ ,  $f(x)$  è continua in  $A$ . Se la successione  $\{A_n\}$  tende (nel senso di F. Hausdorff) ad un insieme limitato  $A$ , e se  $\{f_n(x)\}$  biconverge in  $A$  ad  $f(x)$ , allora, prefissato ad arbitrio un  $\varepsilon > 0$ , esistono un  $\delta_\varepsilon > 0$  e un indice  $n_\varepsilon$  tali che  $|f(x) - f_n(x')| < \varepsilon$  per  $x \in A$ ,  $x' \in A_n$  con  $\overline{xx'} < \delta_\varepsilon$ , e per  $n > n_\varepsilon$ . Se  $\{f_n(x)\}$  bidiverge in un insieme connesso  $A$ ,  $\{f_n(x)\}$  bidiverge a  $+\infty$  in tutto  $A$ , oppure a  $-\infty$  in tutto  $A$ . Se  $\{A_n\}$  tende ad un insieme  $A$  non vuoto e se le  $f_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) sono equilimate e pseudoequicontinue, esiste una successione  $\{f_{n_k}(x)\}$ , parziale della  $\{f_n(x)\}$ , che biconverge in  $A$  ad una funzione continua. Se gli insiemi  $A_n$  sono equilimitati, se la successione  $\{A_n\}$  tende ad  $A$ , e se la successione  $\{f_n(x)\}$  biconverge in  $A$ , allora le funzioni  $f_n(x)$  sono pseudoequicontinue ed equilimate a partire da un certo indice  $n$ . Se  $A'$  è non vuoto e se le  $f_n(x)$  sono pseudoequicontinue,



esiste una successione  $\{\lambda_n\}$  crescente di indici tale che  $\{A_{\lambda_n}\}$  tende ad un insieme  $A$  non vuoto e che, indicato con  $B$  un qualunque insieme connesso contenuto in  $A$ , la successione  $\{f_n(x)\}$ , in  $B$ , biconverge ad una funzione continua, oppure bidiverge a  $+\infty$ , oppure bidiverge a  $-\infty$ . Condizione necessaria e sufficiente affinché la successione  $\{f_n(x)\}$ , di funzioni tutte definite in uno stesso insieme  $A$  chiuso e limitato, converga uniformemente, in  $A$ , ad una funzione continua, è che le funzioni  $f_n(x)$ , a partire da un certo indice  $n$ , siano equilimitate e pseudoequicontinue e che  $\{f_n(x)\}$  converga in un insieme ovunque denso in  $A$ . — Altri teoremi interessanti riguardano la convergenza di successioni di funzioni, verso funzioni-limite dotate di derivate (parziali) prime, o addirittura di derivate successive fino a quelle d'un certo ordine prefissato. Limitiamoci al caso  $r = 1$  e delle derivate (ordinarie) prime. All'uopo conviene considerare i rapporti incrementali  $R_n(x, x') = [f_n(x) - f_n(x')]/(x - x')$ , al variare del punto  $(x, x')$  rispettivamente negli insiemi piani  $I_n(\tau_n)$  definiti dalle condizioni:  $x \in A_n$ ,  $x' \in A_n$ ,  $|x - x'| < \tau_n$ , intendendo che i numeri positivi  $\tau_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) formino una successione infinitesima. Or bene l'A. dimostra che, se gli insiemi  $A_n$  sono equilimitati e tendono, per  $n \rightarrow \infty$ , ad un intervallo  $A$ , se le  $f_n(x)$  sono equilimitate, e se esiste una successione  $\{\tau_n\}$  tale che le funzioni  $R_n(x, x')$  risultino pseudoequicontinue quando vengano considerate ciascuna nel corrispondente insieme  $I_n(\tau_n)$ , allora esiste una successione  $\{f_n(x)\}$ , parziale della  $\{f_n(x)\}$ , che biconverge in  $A$  ad una funzione dotata di derivata prima continua in  $A$ . Dimostra pure che, se le  $f_n(x)$  sono tutte definite in uno stesso intervallo  $A$  chiuso e limitato, allora condizioni necessarie e sufficienti affinché la successione  $\{f_n(x)\}$  converga, uniformemente in  $A$ , ad una funzione dotata di derivata prima continua, sono: 1. che la  $\{f_n(x)\}$  converga in un insieme ovunque denso in  $A$ , 2. che esista una successione  $\{\tau_n\}$  tale che le  $R_n(x, x')$  risultino pseudoequicontinue quando vengano considerate ciascuna nel corrispondente insieme  $I_n(\tau_n)$ .

T. Viola.

**Greco, Donato:** Criteri di compattezza per certe classi di funzioni in  $n$  variabili. *Ricerche Mat.* 3, 220—246 (1954).

L'A. generalizzando un teorema di Lebesgue-Tonelli [*Circ. Mat. Palermo* 25 (1907)] e questo Zbl. 6, 118) dimostra che, dato un insieme  $\mathcal{U} = \{u(P)\}$  di funzioni continue insieme alle derivate parziali di ordine non maggiore di  $p$  in un dominio  $T$  dello spazio ad  $n$  dimensioni a frontiera  $FT$  sufficientemente regolare, le funzioni di  $\mathcal{U}$  risultano equicontinue in ogni dominio  $\Delta \subset T$  avente distanza positiva da  $FT$  e l'insieme  $\mathcal{U}$  è compatto rispetto alla convergenza uniforme nell'interno di  $T$ , nelle ipotesi che: I° esiste una costante  $M > 0$  tale che  $u(P) \leq M$  per  $u \in \mathcal{U}$  e  $P \in T$ ; II° esistono due funzioni  $F_1(P, z)$  e  $F_2(P, z)$  continue in  $T' = (P \in T, |z| \leq M)$ , entrambe crescenti rispetto a  $z$  e tali che per  $u \in \mathcal{U}$  la funzione  $F_1(P, u(P))$  sia sprovvista di massimi relativi internamente a  $T$  e la funzione  $F_2(P, u(P))$  sia sprovvista di minimi relativi internamente a  $T$ ; III° esiste una costante  $C > 0$  tale che per  $u \in \mathcal{U}$  e qualunque sia l'ipersfera  $\Sigma(O, r)$  di centro  $O \in T$  e raggio  $r$ , posto  $\varrho = OP$  per  $P \in T \cdot \Sigma(O, r)$ , riesca:

$$\int_{T \cdot \Sigma(O, r)} \varrho^{m+k-n} \sum_{k_1 + \dots + k_n = k} \left| \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right|^m dx_1 \dots dx_n \leq C$$

per ogni  $k \leq p$ ,  $m$  essendo un numero reale maggiore di  $(n-1)/p$ . L'A. osserva che, nell'ulteriore ipotesi che le funzioni di  $\mathcal{U}$  siano equicontinue su  $FT$ , l'insieme  $\mathcal{U}$  è compatto rispetto alla convergenza uniforme in  $T$  e le funzioni di  $\mathcal{U}$  sono equicontinue in  $T$ . Relativamente all'ipotesi II° cfr. R. Caccioppoli, questo Zbl. 13, 322 e J. Leray, questo Zbl. 18, 406.

F. Cafiero.

**Kalugina, E. P.:** Über die Klassen  $H_\phi^{(r_1, \dots, r_n)}$ . *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 96, 13—15 (1954) [Russisch].

Es handelt sich um Verallgemeinerungen von Ergebnissen von S. M. Nikol'skij, dies. Zbl. 43, 56, 52, 287, die durch Verwendung des folgenden „Normbegriffes“ zustande kommen. Die Funktion  $\Phi(u)$  sei konvex und monoton wachsend,  $\Phi(0) = 0$ ;  $\Phi^{IV}$  sei stetig und  $\Phi' \Phi''$  sei konvav. Für eine in den  $n$  Veränderlichen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mit  $2\pi$  periodische Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  wird das Funktional

$$\omega_{x_1, \lambda, \Phi}^{**}(\delta) = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \Phi_{-1} \left\{ \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \Phi \left[ \lambda \left| f\left(x_1 - \frac{h}{2}, x_2, \dots, x_n\right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + f\left(x_1 + \frac{h}{2}, x_2, \dots, x_n\right) - 2f(x_1, \dots, x_n) \right] dx_1 \dots dx_n \right\}$$

eingeführt. Hierin ist  $\Phi_{-1}$  die Umkehrung von  $\Phi$  und  $\lambda > 0$ . Die Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  gehöre zur Klasse  $\text{Lip}(\alpha, \Phi, x_1)$  für  $0 < \alpha \leq 1$ , wenn eine Konstante  $M > 0$  existiert, die von  $\lambda$  und  $\delta$  unabhängig ist, so daß für alle  $\delta > 0$  gilt  $\omega_{x_1, \lambda, \Phi}^{**}(\delta) \leq \mu \lambda \delta^\alpha$ . Die meßbare mit  $2\pi$  periodische Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  gehöre zur Klasse  $H_{\Phi, x_1}^{(r)}(M)$  ( $r > 0$ ), wenn sie die folgende Bedingung erfüllt: Es werde das ganzzahlige  $\sigma$  aus der Gleichung  $r = \sigma + \alpha$  mit  $0 < \alpha \leq 1$  bestimmt. Dann existiere  $\mathcal{E}^\sigma f / \partial x_1^\sigma$  und für diese Ableitung sei mit beliebigem  $C$

$$\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \Phi \left[ \left| C \frac{\partial^\sigma f}{\partial x_1^\sigma} \right| \right] dx_1 \dots dx_n < +\infty.$$

Ferner gehöre diese Ableitung zur Klasse  $\text{Lip}(\alpha, \Phi, x_1)$ . Die meßbare mit  $2\pi$  periodische Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  gehöre zur Klasse

$$H_{\Phi}^{(r_1, \dots, r_n)}(M_1, \dots, M_n) \quad (r_i > 0),$$

wenn sie gleichzeitig zu den Klassen  $H_{\Phi, x_i}^{(r_i)}(M_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , gehört. Die Klassen  $H^{(r_1, \dots, r_n)}(M_1, \dots, M_n)$  von Nikol'skij ergeben sich mit  $\Phi(u) = |u|^p$  ( $p > 1$ ). W. Thimm.

**Aczél, János:** Zur Theorie der Mittelwerte. Acta Univ. Debrecen. Ludovico Kossuth 1, 117–135 (1954) [Ungarisch], deutsche Zusammenfassg. ibid. Addit. ad 1, 18 (1955).

Eine ausgezeichnete Zusammenfassung der Ergebnisse der Theorie der Mittelwerte im reellen Gebiet. — Eine Mittelwertfunktion  $M_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  wird quasiarithmetisch genannt, falls eine streng monoton wachsende Funktion  $f$  existiert ( $f^{-1}$  ist ihre inverse Funktion) so daß

$$M_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = f^{-1} [(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)) / n]$$

gültig ist. Der Ausgang der Theorie ist der von A. N. Kolmogorov [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., III. Ser. 12, 388–391 (1930)], M. Nagumo [Japanese J. Math. 7, 71–79 (1930)] und B. Finetti [Giorn. Ist. Ital. Attuari 2, 369–396 (1931)] bewiesene folgende grundlegende Satz: damit die Mitglieder einer Funktionenfolge  $M_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) quasiarithmetische Mittelwerte seien, ist folgendes notwendig und hinreichend: 1.  $M_n$  ist stetig und monoton wachsend in jedem seiner Argumente. 2.  $M_n(x, x, \dots, x) = x$ . 3. Jedes  $M_n$  ist eine symmetrische Funktion seiner Argumente. 4.  $M_n(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = M_n[M_k(x_1, \dots, x_k), \dots, M_k(x_1, \dots, x_k), x_{k+1}, \dots, x_n]$ . Ref. hat (Über die Theorie der Mittelwerte, Diss. 1945) die Frage gestellt: Welchen Kriterien muß eine einzige Funktion unterworfen werden, damit sie eine quasiarithmetische Mittelwertfunktion sei? Eine einfache und übersichtliche Antwort stammt vom Verf. Sein Ergebnis: damit  $M(x_1, \dots, x_n)$  ein quasiarithmetisches Mittel sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $M$  außer den Eigenschaften 1., 2., 3. auch die Eigenschaft 4', sog. Bisymmetrie, besitze, d. h. der Funktionalgleichung  $M[M(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}), M(x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}), \dots, M(x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)})] = M[M(x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(n)}), \dots, M(x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(n)})]$  genüge. Weitere, von H. Pidek, Ryll-Nardzewski, B. Knaster, J. G. Mikusinski stammende Untersuchungen zeigten, daß die Eigenschaften 1., 2., 3. und 4' durch weniger ersetzt werden können. — Eine unsymmetrische Funktion  $M(x_1, \dots, x_n)$  von der Gestalt  $f^{-1}[q_1 f(x_1) + \dots + q_n f(x_n)]$  ( $f$  stetig und monoton,  $q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1$ ) wird quasiarithmetisch genannt.  $M \begin{pmatrix} x & y \\ r & s \end{pmatrix}$  ist quasiarithmetisch dann und nur dann, wenn es die folgenden Eigenschaften besitzt: a)  $M \begin{pmatrix} x & y \\ r & s \end{pmatrix} < M \begin{pmatrix} x & y \\ r & s' \end{pmatrix}$  für  $s < s'$  und  $x < y$ ,  $M \begin{pmatrix} x & y \\ r & s \end{pmatrix} < M \begin{pmatrix} x & y' \\ r & s \end{pmatrix}$  für  $y < y'$ . b)  $M \begin{pmatrix} x & y \\ r & s \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x & y \\ kr & ks \end{pmatrix} =$



$$M \begin{pmatrix} x & y \\ r & s \end{pmatrix} \cdot c) \quad M \begin{pmatrix} t & t \\ r & s \end{pmatrix} = t; \quad M \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = b; \quad M \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = a;$$

$$d) \quad M \begin{bmatrix} M \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ r_1 & s_1 \end{pmatrix} & M \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ r_2 & s_2 \end{pmatrix} \\ r_1 + s_1 & r_2 + s_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} M \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} & M \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix} \\ r_1 + r_2 & s_1 + s_2 \end{bmatrix}$$

(Bisymmetrien). Natürlich kann auch dieser Satz für eine beliebige Zahl von Veränderlichen aufgestellt werden. In einem folgenden Kapitel werden Ergebnisse zusammengefaßt, welche sich auf Mittelwerte von Funktionen beziehen. In einem weiteren Teil diskutiert Verf. Sätze, welche die Mittelwertfunktionen mittels partiellen Differentialgleichungen charakterisieren. Dabei wird folgendes, bisher noch nicht publizierte Ergebnis mitgeteilt: damit  $M(x, y)$  ein quasiarithmetisches Mittel sei, ist notwendig und hinreichend, daß 1.  $M$  in seinen Argumenten streng monoton und zweimal stetig differenzierbar ist, 2.  $M$  der Funktionalgleichung genügt:  $M[M(x_1, x_2), y] = M[M(x_1, y), M(x_2, y)]$  (Autodistributivität). Verf. vermutet, daß die Autodistributivität alle stetigen Mittelwerte charakterisiert. Die zum Schluß mitgeteilte gründliche Zusammenstellung der Literatur des Themas erhöht den Wert der Arbeit.

St. Fenyő.

Hukuhara, Masuo: Sur la fonction convexe. Proc. Japan Acad. **30**, 683–685 (1954).

A. Ostrowski (J.-Ber. Deutsch. Math. Verein. **38**, 56–62 (1929)) ha dimostrato che una funzione convessa, che sia superiormente limitata in un insieme misurabile e di misura positiva, è necessariamente continua. Ma con semplicissimi esempi si riconosce che una funzione convessa può essere limitata inferiormente senza essere continua. L'A. studia alcune questioni che completano la teoria dell'Ostrowski, relativamente a funzioni  $f(x)$  che sono convesse in un intervallo aperto  $(\alpha, \beta)$ , cioè tali che  $f(\frac{1}{2}(x+y)) \leq \frac{1}{2}(f(x)+f(y))$ , qualunque siano  $x, y$  interni ad  $(\alpha, \beta)$ . Dimostra fra l'altro che, se  $f(x)$  è inferiormente limitata in un insieme di misura positiva, essa lo è in tutto  $(\alpha, \beta)$ .

T. Viola.

Morgenstern, Dietrich: Unendlich oft differenzierbare nicht-analytische Funktionen. Math. Nachr. **12**, 74 (1954).

Let  $D$  be the class of all infinitely differentiable functions defined in a finite closed interval. Several authors have given explicit examples of infinitely differentiable functions belonging to  $D$  which are nowhere analytic. In this paper the author uses a method of functional analysis to prove the following existence theorem: With the exception of a set of first category in  $D$ , all infinitely differentiable functions are nowhere analytic.

J. A. Siddiqui.

Badaljan, G. V.: Eine Verallgemeinerung der Taylorsche Reihe und einige Fragen aus der Theorie der analytischen und der quasianalytischen Funktionen. Akad. Nauk Armjan. SSR. Izvestija, fiz.-mat. estest. techn. Nauki **7**, Nr. 1, 3–33 (1954) [Russisch].

Ce travail est la suite d'un article paru sous le même titre (ce Zbl. **53**, 228) dont les résultats sont appliqués aux problèmes suivants: 1) comparaison d'un développement asymptotique  $f(z) \sim c_0 + \dots + c_n z^{-n} + \dots$  et d'une série de factorielles généralisées  $f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n / \prod_{i=1}^n (z - r_i)$ ; application à la sommation d'un développement asymptotique; 2) sommation d'une série divergente  $\sum c_n$ , quand  $\sum c_n z^{-n}$  est un développement asymptotique; 3) représentation d'une fonction  $\varphi(x)$  analytique, ou quasi-analytique d'une classe donnée, à partir des quantités  $c_{n+1} / \varphi^{(n)}(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

G. Bourion.

### Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Kakehashi, Tetsujiro: Interpolation in the real axis. J. Osaka Inst. Sci. Technol., Part I **3**, 3–19 (1951).

Im Intervall  $-1 \leq x \leq 1$  seien für  $n = 1, 2, \dots$  die Punkte  $x_k^{(n)}$  mit  $-1 \leq x_1^{(n)} \leq x_2^{(n)} \leq \dots \leq x_{n+1}^{(n)} \leq 1$  gegeben.  $\mu_n(x)$  sei eine in  $\langle -1, 1 \rangle$  von 0 auf 1 anwachsende stückweise konstante Funktion, die bei  $x_k^{(n)}$  einen Sprung von der Größe  $1/(n+1)$  macht. Es wird angenommen, daß  $\mu_n(x)$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen eine Grenzfunktion  $\mu(x)$  konvergiert, z. B. gegen  $\pi^{-1} \arcsin x + \frac{1}{2}$ . Bei gegebener Funktion  $f(x)$  werde die Folge der Interpolationspolynome  $S_n(x; f)$  betrachtet ( $S_n$  hat den Grad  $n$ ), die mit  $f(x)$  an den Punkten  $x_k^{(n)}$  übereinstimmen. Für analytische Funktionen  $f(x)$  legt Verf. eine Grenzlemniskate  $\Gamma$  fest, innerhalb derer  $f(x)$  analytisch ist.  $S_n$  konvergiert innerhalb  $\Gamma$  gegen  $f(x)$  und divergiert außerhalb  $\Gamma$ . Es folgen Aussagen über die Gleichmäßigkeit der Konvergenz und Diskussion der Fälle, daß die  $x_k^{(n)}$  gleichmäßig über das Intervall verteilt sind oder gegen die Endpunkte  $-1, \dots, 1$  konvergieren. Wird von  $f(x)$  nur Stetigkeit vorausgesetzt, so werden die  $x_k^{(n)}$  als Nullstellen der zu einer Gewichtsfunktion  $p(x)$  gehörigen Orthogonalpolynome  $\Phi_n(x)$  genommen. Für den Rest  $R_n(x; f) = f(x) - S_n(x; f)$  wird die Abschätzung gewonnen:  $|R_n(x; f)| = O(E_n(f) \varrho_n(x))$ . Dabei wird  $E_n(f)$  durch die Tschebyscheff-Annäherung eines Polynoms  $n$ -ten Grades an  $f(x)$  festgelegt und geht für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null und  $\varrho_n$  ist abschätzbar durch  $\varrho_n^2(x) \leq \sum_{m=0}^n \Phi_m^2(x)$ . Hat speziell  $f(x)$  in  $\langle -1, 1 \rangle$  einen Stetigkeitsmodul  $\omega(\delta)$  mit  $\omega(\delta) = O(\delta^{1/2})$  und verwendet man als  $x_k^{(n)}$  die Jacobischen Abzissen, so besteht gleichmäßige Konvergenz der  $S_n$  gegen  $f$  in  $\langle -1, 1 \rangle$ . L. Collatz.

**Armstrong, James W.:** Point systems for Lagrange interpolation. Duke math. J. **21**, 511–516 (1954).

The author obtains a class of point systems of interpolation in the interval  $[-1, 1]$  such that each member of this class has a Lebesgue function of uniform order  $\log n$ . Let  $-1 = x_{n+1}^n < x_n^n < x_{n-1}^n < \dots < x_1^n < x_0^n = 1$ .

$$w_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i^n), \quad M_n = \max_{[-1, 1]} |w_n(x)|, \quad m_n = \min_{0 \leq i \leq n} \left| \max_{x_{i+1}, x_i} |w_n(x)| \right|.$$

Hence if  $K_1, K_2$  are two positive constants such that  $K_1 m_n \leq M_n \leq K_2 m_n$  for all  $n$ , then the point system  $\{x_i^n\}$  has a Lebesgue function of uniform order  $\log n$  for  $x$  in  $[-1, 1]$ . The author, after studying the above point system in connection with the interpolation formula for functions of several variables, establishes a distortion theorem similar to that of S. Bernstein (this Zbl. **4**, 6). T. Eweida.

**Horváth, J.:** L'approximation polynomiale sur un ensemble non compact. Math. Scandinav. **2**, 83–90 (1954).

A classical theorem of S. Bernstein was generalized by S. Mandelbrojt as follows: Let  $F(x)$  be a positive, even, continuous function with  $\log F(x)$  a convex function of  $\log x$  for  $x > 0$ . If  $\int_0^\infty x^{-2} \log F(x) dx = \infty$ , then to every function  $f(x)$ , continuous on  $(-\infty, \infty)$  with  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$  corresponds a polynomial  $P(x)$  such that, on  $(-\infty, \infty)$ ,  $|f(x) - P(x)/F(x)| < \varepsilon$ . S. Mandelbrojt (General Theorems of Closure, this Zbl. **43**, 289) further generalized this theorem by extending it to continuous functions defined on closed subsets of the real line. In this paper the author shows that this latter theorem is almost an immediate consequence of a lemma of Mandelbrojt and thereby simplifies its original proof. He also gives an  $L^p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) extension of the same. J. A. Siddiqui.

**Kozlov, V. Ja.:** Über die lokale Charakteristik eines vollständigen, orthogonalen, normierten Funktionensystems. Mat. Sbornik, n. Ser. **23** (65), 441–474 (1948) [Russisch].



If  $\Delta = [x_1, x_2]$  is an interval, let  $1F = F(x_2) - F(x_1)$  and let  $1(x)$  be the characteristic function of  $\Delta$ . We say that  $\{F_n(x)\} \in P(a, b)$ , if for any two intervals  $\Delta_1, \Delta_2 \subset [a, b]$  we have  $\sum_{n=1}^{\infty} 1_1 F_n 1_2 F_n = \text{mes}(\Delta_1 \cap \Delta_2)$ . If for suitable definition of the  $F_n(x)$  outside  $[a, b]$  we have  $\{F_n(x)\} \in P(a', b')$  in a larger interval  $[a', b']$  containing  $[a, b]$ , then we say that  $\{F_n(x)\}$  can be continued to  $[a', b']$ . The following properties of  $\{F_n(x)\} \in P$  are established. (i) (1)  $F_n(x) = \int_a^x l_n(x) dx + c_n$ , where  $l_n(x) \in L^2(a, b)$ . (ii) If  $A = (a_{k+n})$  is an orthogonal matrix and  $\{q_n(x)\}$  is an orthonormal, complete set in  $L^2(a, b)$ , then for every  $q > 0$

$$(2) \quad \left\{ F_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+n, n} \int_a^x q_k(x) dx \right\} \in P[a, b]$$

and cannot be continued to a larger interval. The set  $\{F'_n(x)\}$  is orthonormal, if and only if  $q = 0$ . Vice versa, if  $\{F'_n(x)\} \in P(a, b)$  and cannot be continued to a larger interval, then  $\{F'_n(x)\}$  is of the form (1). (iii) If  $\{F'_n(x)\}$  can be continued to  $[a_2, b_2] \supset [a, b]$ , then the continuation can be carried out in such a way that  $\{F'_n(x)\}$  is an orthogonal set in  $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_1, b_1] \supset [a, b]$ . The proofs are based on the consideration of the transformation  $T(1(x)) = \sum_1 1 F_n q_n(y)$ , where  $\{q_n(x)\}$  is a complete, orthonormal system in  $L^2(0, 1)$ . Then  $T$  maps the characteristic functions  $1(x)$  of intervals isometrically in  $L^2(a, b)$ . The transformation can be extended to an isometric transformation  $T$  of  $L^2(a, b)$  in  $L^2(0, 1)$ . If  $T(f) = \sum_b c_n(f) q_n(y)$ , then  $c_n(f)$  is a linear functional in  $L^2(a, b)$  and therefore  $c_n(f) = \int_a^b f(x) l_n(x) dx$ ,  $l_n(x) \in L^2(a, b)$ .

Putting  $f(x) = 1(x)$  proves (1). Vice versa, if  $T(f) = \sum_a q_n(y) \int_a^b f(x) l_n(x) dx$  is an isometric mapping of  $L^2(a, b)$  in  $L^2(0, 1)$ , then (1) defines a set  $\{F'_n(x)\} \in P(a, b)$ . — The choice  $l_n = \sum_k a_{k+n, n} q_k$  leads to (2). The converse result is established by proving first that  $\{F'_n(x)\}$  can be continued, if the subspace  $S$  orthogonal to all  $T(f)$  is of infinite dimensions. If  $S$  has a finite dimension  $q$ , then we can find a complete orthogonal system  $\{h_n(y)\}$  in  $L^2(0, 1)$  such that  $h_1, \dots, h_q$  span  $S$ , and such that  $h_k = T(\psi_k)$  for  $k > q$ , where  $\{\psi_k(x)\}$  is a complete orthonormal set in  $L^2(a, b)$ . Then

$$T(f) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(y) \int_a^b f(x) \psi_k(x) dx$$

and the result follows on expressing  $h_k$  in terms of the  $q_n$ . Carleman introduced measurable functions  $K(x, y)$  ( $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ ) with the following properties:

(a)  $K(x, y) \in L^2(0, 1)$  for every fixed  $x$ .

$$(b) \quad \int_0^1 \{K(x_2, y) - K(x_1, y)\} \{K(x'_2, y) - K(x'_1, y)\} dy = \text{mes}(\Delta \cap \Delta'),$$

where  $\Delta = (x_1, x_2), \Delta' = (x'_1, x'_2)$ . As an application of his theorems the author shows that a function  $K(x, y)$  satisfies these conditions, if and only if there are two orthonormal sets  $\{\theta_n(x)\}, \{q_n(x)\}$  such that  $\{\theta_n(x)\}$  is complete and

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \theta_n(x) dx q_n(y)$$

almost everywhere.

W. H. J. Fuchs (Math. Rev. 10, 450).

Bochner, S.: Positive zonal functions on spheres. Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 1141—1147 (1954).

Soit  $\gamma > 0$  et  $d\mu(x) = (1 - x^2)^{\gamma-1/2} dx \Big/ \int_{-1}^1 (1 - \xi^2)^{\gamma-1/2} d\xi$  une mesure

définie sur  $-1 \leq x \leq 1$ . Soit  $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots$  l'orthogonalisée de la suite  $1, x, x^2, \dots$  par rapport à  $d\mu(x)$  et normalisée par  $P_n(1) = 1$ . À  $f(x)$  continue sur  $-1 \leq x \leq 1$  (resp.  $f(x) \in L^p$ ) on associe la fonction

$$f(x; y) = \int_{-1}^1 f(xy + (1-x^2)^{1/2}(1-y^2)^{1/2}z) (1-z^2)^{\nu-1} dz \int_{-1}^1 (1-\zeta^2)^{\nu-1} d\zeta.$$

On a  $P_n(x; y) = P_n(x) P_n(y)$  et si  $f(x)$  admet le développement  $f(x) \sim \sum q_n a_n P_n(x)$ ,

où  $q_n^{-1} = \int_{-1}^1 P_n^2(x) d\mu(x)$  et  $a_n = \int_{-1}^1 P_n(x) f(x) d\mu(x)$ , alors

$$f(x; y) \sim \sum q_n a_n P_n(x) P_n(y).$$

1. Soit  $k^r(x) \sim \sum q_n \lambda_n^r P_n(x)$  ( $r=1, 2, \dots$ ) une suite de fonctions telle que:

(i)  $\lambda_n^r = 0$  pour  $n \geq N(r)$ , (ii)  $k^r(x) \geq 0$  et  $\int_{-1}^1 k^r(x) d\mu(x) = 1$ , (iii) pour tout

$\varepsilon > 0$  on a  $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{1-\varepsilon}^1 k^r(x) d\mu(x) = 1$ . Alors

$$\int_{-1}^1 f(y) k^r(y; x) d\mu(y) = \sum q_n \lambda_n^r a_n P_n(x)$$

tend uniformément (resp. dans  $L^p$ ) vers  $f(x)$ . 2. Appelons la suite  $c_0, c_1, \dots$  définie positive si quel que soit  $M$ , la relation  $\sum_0^M q_n a_n P_n(x) \geq 0$  entraîne  $\sum_0^M q_n a_n c_n P_n(x) \geq 0$ .  $\{c_n\}$  est définie positive si et seulement s'il existe une fonction croissante et bornée

$H(x)$  telle que  $c_n = \int_{-1}^1 P_n(x) dH(x)$ . De ce résultat l'A. déduit un critère nécessaire

et suffisant pour qu'une suite de fonctions  $\{c_n(t)\}$  ( $0 \leq t < \infty$ ,  $n=0, 1, \dots$ ) soit un processus homogène (stochastique) (cf. Bochner, ce Zbl. 52, 140). Ce théorème implique à son tour que la fonction  $\sum q_n e^{-t(n+2\nu)} P_n(x) P_n(y)$  est  $\geq 0$  pour  $-1 \leq x, y \leq 1$ . J. Horváth.

Meňšov, D. E.: Über einige Eigenschaften der Fourierreihen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 18, 379–388 (1954) [Russisch].

$K \subset L(-\pi, +\pi)$  sei eine solche Klasse von Funktionen, daß falls  $f \in K$ , auch jedes meßbare  $f_0$  mit  $|f_0| \leq |f|$  zu  $K$  gehört. Für jedes  $f \in K$  gibt es eine Zerlegung  $f = f_1 + f_2$ , wobei die Fourierreihe von  $f_i$  auf  $E_i$  die Summe Null besitzt ( $i=1, 2$ ) und für die meßbaren Punktmengen  $E_i \subset [-\pi, +\pi]$   $\text{mes}(E_1 + E_2) = 2\pi$  und  $\text{mes}(E_i \cap [a, b]) > 0$  ( $i=1, 2$ ;  $[a, b] \subset [-\pi, +\pi]$  beliebig) besteht. G. Freud.

Freud, Géza: Ein Zusammenhang zwischen den Funktionenklassen  $\text{Lip } \alpha$  und  $\text{Lip } (\beta, p)$ . Acta Sci. math. 15, 260 (1954).

Let  $f(x)$  be summable in  $(0, 2\pi)$ , have period  $2\pi$  and belong to  $\text{Lip } (\beta, p)$ , that is,

$$\left\{ \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right\}^{1/p} = O(|h|^\beta)$$

with  $1 < p \leq 2$  and  $\beta - 1/p > 0$ . A theorem due to Szász [Math. Ann. 100, 530–536 (1928)] states that under these conditions, the Fourier series of  $f(x)$  converges absolutely so that  $f$  is equal almost everywhere to a continuous function  $g(x)$ , namely, the sum of the Fourier Series. The author shows that  $g(x)$  itself belongs to  $\text{Lip } (\alpha)$  for every  $\alpha$  with  $0 < \alpha < \beta - 1/p$ . V. Ganapathy Iyer.

Tandori, Károly: Über die Divergenz der Fourierreihen. Acta Sci. math. 15, 236–239 (1954).

The author constructs an example of a function continuous in  $[-\pi, \pi]$ , vanishing over a closed set  $E \subset [-\pi, \pi]$  for which the point  $x=0$  is of density one and the corresponding Fourier Series of the function diverges at  $x=0$ . If, for a continuous



function  $f(x)$  vanishing over the closed set  $E \subset [-\pi, \pi]$ , the sum of the oscillations of the function over the intervals contiguous to  $E$  is finite, then a result due to A. G. Džvarsejšvili (this Zbl. 41, 33) asserts that the Fourier series of  $f(x)$  converges to zero at every point of  $E$  of upper density one. The author's counter example shows that this last condition is essential for the truth of the theorem.

V. Ganapathy Iyer.

Matsumura, Yoshimi: Note on the summability of Fourier series. II. J. Osaka Inst. Sci. Technol., Part. I 5/6, 41—43 (1954).

Als Umkehrung eines in einer früheren Note (dies. Zbl. 54, 28) gewonnenen Resultats beweist Verf.: Es sei  $f(t)$  eine in  $(a, b)$  definierte, reellwertige Funktion der Klasse  $L^2$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n q_n(t)$  ihre Fourierreihe bezüglich eines in  $(a, b)$  orthonormalen Systems  $\{q_n(t)\}$ . Die Folge  $\{S_n(t)\}$  der Teilsummen dieser Fourierreihe ist fast überall  $(C, 1)$ -summierbar zur Summe  $f(t)$ , falls für ein ganzes  $k \geq 2$  die Teilfolge  $\{S_{n^k}(t)\}$  fast überall zur Summe  $f(t)$  konvergiert. (Vgl. dies. Zbl. 39, 71.) F. Lösch.

Kinukawa, Masakichi: On the strong summability of the derived Fourier series. Proc. Japan Acad. 30, 801—804 (1954).

Let  $f(t)$ , of period  $2\pi$ , be of bounded variation in  $(0, 2\pi)$ , continuous near  $t = x$  and differentiable at  $x$ . Let  $g(t) = g_x(t) = f(x+t) - f(x-t) - 2t f'(x)$ ,  $h(t) = h_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$ ; and, if  $f \sim (a_n, b_n)$ , let  $\tau_n^*(t) = \sum_{m=1}^n m(b_m \cos mt - a_m \sin mt) - \frac{1}{2}n(b_n \cos nt + a_n \sin nt)$ ,  $\tau_n^*(t) = \sum_{m=1}^n m(a_m \cos mt + b_m \sin mt) - \frac{1}{2}n(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ . Theorem 1. If, for  $\varepsilon > 0$ ,  $G(t) = \int_0^t dg(t) = o\left\{t \log \frac{1}{t}\right\}^{-1-\varepsilon}$  as  $t \rightarrow 0$ , then  $\sum_{n=1}^n \tau_m^*(x) = f'(x)^k = o(n)$  for any  $k > 0$ . Theorem 2. If, for  $\varepsilon > 0$ ,  $H(t) = \int_0^t dh(t) = o\left\{t \log \frac{1}{t}\right\}^{-1-\varepsilon}$  as  $t \rightarrow 0$ , then  $\sum_{n=1}^n \tau_m^*(x) = H_n(x)^k = o(n)$  for any  $k > 0$ , where  $H_n(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{1/n}^{\pi} h_x(t) \operatorname{cosec}^2 \frac{t}{2} dt$ . For the case  $k = 1$  compare Prasad and Singh (this Zbl. 47, 69).

W. W. Rogosinski.

## Spezielle Funktionen:

Denisjuk, I. M.: Einige Eigenschaften von Polynomen, die den Laguerreschen Polynomen analog sind. Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1954, 79—80, russ. Zusammenfassg. 80 (1954) [Ukrainisch].

Für die vom Verf. früher (Nauč. Trudy Moskovsk. gorn. Inst. 1952, Nr. 10, 29) eingeführten Polynome  $M_n(x)$ , die den normierten Laguerreschen Polynomen  $L_n(x)$  analog sind, wird im vorliegenden Artikel ein expliziter Ausdruck durch  $L_n(x)$  in der Form

$$M_n(x) = e^{x/2} \left\{ (-1)^n - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} e^{-\xi/2} L_n(\xi) d\xi \right\}$$

gegeben. — Für die Polynome  $M_n(x)$  wird die erzeugende Funktion  $\varphi(x, t) = e^{xt/(t-1)} (1-t)$  angegeben, ferner eine partielle Differentialgleichung, der die Funktion  $\varphi(x, t)$  genügt, und die Differenzen-Differentialgleichung, der die Summe der Polynome  $M_n(x)$  mit benachbarten Indizes genügt.

G. N. Sarin (Übersetzt aus Ref. Žurn. Mat. 1954, Nr. 5643).

Denisjuk, I. M.: Einige Integrale und Entwicklungen, die normierte Laguerresche Polynome und ihnen analoge enthalten. Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1954, 165—167, russ. Zusammenfassg. 167 (1954) [Ukrainisch].

Für die den normierten Laguerreschen Polynomen  $L_n(x)$  analogen Polynome  $M_n(x)$ , die vom Verf. früher eingeführt (Nauč. Trudy Moskovsk. gorn. Inst. 1952, Nr. 10, 29) und von ihm in einer Reihe von Aufgaben über die Dynamik der Schachtseile angewandt wurden, wird die Entwicklung

$$M_n(x) = L_n(x) - 2L_{n-1}(x) + 2L_{n-2}(x) + \cdots + 2(-1)^n L_0(x)$$

und dazu inverse Entwicklung

$$L_n(x) = M_n(x) + 2M_{n-1}(x) + 2M_{n-2}(x) + \cdots + 2M_0(x)$$

angegeben. Es wird eine neue Beziehung für die Laguerreschen Polynome

$$x[L_{n+2}(x) - L_{n+1}(x)]'' + (n+1)[L_{n+1}(x) - L_n(x)] = 0$$

angegeben.

G. N. Savin (Übersetzt aus Ref. Žurn. Mat. 1955, Nr. 5910).

**Denisjuk, I. M.:** Einige Integrale, Matrizen und Approximationen, die mit den zu den Laguerreschen Polynomen analogen Polynomen zusammenhängen. Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1954, 239–241, russ. Zusammenfassg. 242 (1954) [Ukrainisch].

Für die vom Verf. früher (s. vorstehende Referate) eingeführten Polynome  $M_n(x)$  werden die Integrale

$$\int_0^\infty e^{-x} M_n^2(x) dx = 4n + 1, \quad \int_0^\infty e^{-x} M_m(x) M_n(x) dx = 2(2m + 1)(-1)^{m+n}$$

( $m \leq n$ ) berechnet; es wird darauf hingewiesen, daß die Determinante der aus diesen Integralen gebildeten quadratischen Matrix Eins ist. Die reziproke Matrix ergibt sich aus der gegebenen durch Fortlassen der Minuszeichen und Umlappungen in bezug auf die Nebendiagonale. Die Gramsche Determinante für das System der Förderseil-Funktionen  $q_n(t) = e^{-t} M_n(2t)$  ist gleich  $2^{-2n}$ . Diese Resultate geben dem Verf. die Möglichkeit, die Koeffizienten der linearen Approximationen im Mittel für die gegebene Funktion  $f(t)$  durch Polynome  $M_k(t)$  mit dem Gewicht  $e^{-t}$  für das Segment  $(0, \infty)$  in allgemeiner Form zu schreiben. Nimmt  $f(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  exponentiell ab, so geschieht die Approximation durch die Förderseil-Funktionen  $q_n(t)$ . Die Koeffizienten haben analoge Ausdrücke.

G. N. Savin (Übersetzt aus Ref. Žurn. Mat. 1955, Nr. 4522).

**Denisjuk, I. N.:** Einige Beziehungen, die normierte Laguerresche Polynome und ihnen analoge enthalten. Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1954, 324–326, russ. Zusammenfassg. 326 (1954) [Ukrainisch].

Für die normierten Laguerreschen Polynome  $L_n(x)$  und die ihnen analogen  $M_n(x)$  (s. vorstehende Referate) wird die Reihe der Beziehungen angeführt:  $M'_{n+1} = M'_n - M_n$ ;  $L'_n = M'_n - 2M'_n$ ;  $L_n + M'_{n+1} + M'_n = 0$ ;  $L_n = M''_{n+2} - M''_n$ ;  $L'_{n+1} = L'_n - L_n$ ;  $xL'_n = n(L_n - L_{n-1})$ . In dieser Weise genügen die  $M_n(x)$  und  $L_n(x)$  ein und derselben gemischten Differenzen-Differentialgleichung  $1y'_n(x) + y_n(x) = 0$ . Es wird darauf hingewiesen, daß die Differentialgleichung mit Singularität im Ursprung:  $2xy''' + (2-3x)y'' + (2n-1+x)y' - ny = 0$  die zwei im Ursprung regulären Lösungen  $M_n(x)$  und  $\exp(x/2)$  besitzt.

G. N. Savin (Übersetzt aus Ref. Žurn. Mat. 1955, Nr. 4523).

**Denisjuk, I. N.:** Neue Polynome, die den Laguerreschen Polynomen analog sind. Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1954, 327–329, russ. Zusammenfassg. 329 (1954) [Ukrainisch].

Es wird die Definition der Polynome  $\mathfrak{M}_n(x)$  mit Hilfe der erzeugenden Funktion  $(1-t)(1+t)^{-2}e^{-xt/(1-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \mathfrak{M}_n(x)$  angegeben. — Sie sind gemeinsam mit den Polynomen  $M_n(x)$  (vgl. vorstehende Referate) vom Verf. früher bei der Lösung von Aufgaben über die Dynamik von Schacht-Förderseilen (dies. Zbl. 56, 186) eingeführt worden. Es werden die Beziehungen  $\mathfrak{M}_{n+1}(x) + \mathfrak{M}_n(x) =$



$M_{n+1}(x) = M_n(x)$ ,  $\mathbb{M}_{n+1}(x) = \mathbb{M}_n(x)$ ,  $M_n(x) = 0$ ,  $M_n(x) = \mathbb{M}_n(x) = 2\mathbb{M}_n(x)$  an-  
geführt. Verf. weist darauf hin, daß  $\mathbb{M}_n(x)$  der gemischten Differenzen-Differen-  
tialgleichung  $\Delta_n y_n(x) = y_n(x) = 0$  genügt. Bei der Darstellung  $\mathbb{M}_n(x)$   
 $\sum_{m=0}^n (-1)^m a_{m,n} \frac{x^m}{m!}$  sind die Zahlen  $a_{m,n}$  die Lösung der Randwertaufgabe für die  
endliche Differenzengleichung  $a_{m+1} - 1 = a_{m+1} + a_{m,n}$ , wenn  $a_{m,n}$  auf den beiden  
„Geraden“  $m = 3$  und  $m = n$  vorgegeben ist. Die effektive Lösung dieser Auf-  
gabe wird angegeben, die die Polynome  $\mathbb{M}_n(x)$  bis zu einem beliebigen  $n$  sofort hin-  
zuschreiben gestattet. Die Identität  $\sum_{m=0}^n (-1)^m a_{m,n} = 4n(-1)^n$  gibt die Mög-  
lichkeit, die Korrektheit der Polynomformel nachzuprüfen.

G. N. Savin (Übersetzt aus Ref. Žurn. Mat. 1955, Nr. 5909).

González, M. O.: Einige analytische Anwendungen der Reihenentwicklungen  
nach Legendreschen Polynomen. 2<sup>o</sup> Sympos. Probl. mat. Latino América, Villa-  
vicencio-Mendoza 21—25 Julio 1954, 163—171 (1954) [Spanisch].

Aus der Darstellung der vollständigen elliptischen Integrale  $E, E', K, K'$  durch  
die Kugelfunktionen  $P_{-1/2}$  werden für diese Integrale mittels der bekannten Ent-  
wicklung von  $P_{-1/2}(x)$  ( $m$  nicht ganz) nach Legendreschen Polynomen  $P_n(x)$   
( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) Entwicklungen nach den  $P_n(x)$  gewonnen. Außerdem werden  
einige Eigenschaften der Funktionen  $P_{-1/2}(x)$  abgeleitet und ihre Entwicklung nach  
den  $P_n(x)$  bewiesen. Zum Schluß werden das Legendresche Integral  $F(q, k)$  und  
das Weierstraßsche Integral  $\int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}$  mittels Legendrescher Polynome  
dargestellt.

O. Volk.

Srivastava, H. M.: On certain relations involving the generalised  $K$ -function of  
Bateman. Ganita 5, Nr. 2, 183—189 (1954).

Verf. leitet die Entwicklung

$$[\chi/(\chi^2 - 1)]^{2k+2} x^{2k+1} e^{x(\chi^2-1)/(\chi^2-1)} = \sum \chi^{2n} C_{2n} P_{2n,2k}(x),$$

$P_{2n,2k}(x) = [2^k \Gamma(n+k-1)]^{-1} x^k W_{n,k+1/2}(x)$ , ab. Daraus gewinnt er,  
 $\alpha^2 = a^2(1-p)/(1+p)$ ,  $|a| < 1$  gesetzt, eine Darstellung von

$$\sum (-1)^{n-k-1} a^{2n} [\Gamma(n+k+1)/\Gamma(n-k)] P_{2n,2k}(x) P_{2n,2k}(y)$$

mittels der Besselfunktion  $J_{2n+1}$ . Ferner erhält er, ausgehend von der Entwicklung

$\cos 2k \vartheta e^{ix \operatorname{tg} \vartheta} = \sum_{-k}^{\infty} P_{2n,2k}(x) e^{in\vartheta}$ , die Beziehungen:

$$\int_0^\pi \cos^{2k} \vartheta \cos(2x \operatorname{tg} \vartheta) d\vartheta = \pi P_{2k,2k}^2(x) - 2\pi \sum_{r=0}^{k-1} P_{2k-2r,2k}(x) P_{2k-2r,2k}(x),$$

$$\int_0^\pi \cos^{2k} \vartheta \cos(x \operatorname{tg} \vartheta - y \sin \vartheta) d\vartheta = \pi \sum_{-k}^{\infty} P_{2n,2k}(x) J_{2n}(y),$$

woraus analoge Integrale für

$$\sum_{-k}^{\infty} P_{2n-2r,2k}(x) J_{2n}^2(y) = 2 \sum_{-k}^k P_{2n-2r,2k}(x) I_r(y) + \sum_{k+1}^{\infty} P_{2n-2r,2k}(x) I_n(y), \quad \sum_{-k}^{\infty} P_{2n-2r,2k}(x) E_{2n}(y)$$

( $E_{2n}(y)$  Webersche Funktion) und

$$2p \sum_{-k}^k P_{2n,2k}(x) Q_{k-1/2}(1+2p) + p \sum_{k+1}^{\infty} P_{2n,2k}(x) Q_{n-1/2}(1+2p)$$

gewonnen werden.

O. Volk.

● Meixner, Josef und Friedrich Wilhelm Schäfke: Mathieu'sche Funktionen und  
Sphäroid-Funktionen mit Anwendungen auf physikalische und technische Probleme.  
(Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Bd. LXXI.) Berlin-Göttingen-  
Heidelberg: Springer-Verlag 1954. 414 S. mit 29 Abb. DM 49.—; Ganzleinen DM 52,60.

Man muß den Verff. die höchste Anerkennung und den größten Dank zollen, daß sie sich der schwierigen Aufgabe unterzogen haben, eine mathematisch solide, einheitliche und zusammenfassende Darstellung der Theorie der Mathieschen Funktionen und der Sphäroidfunktionen zu geben. In der Einleitung (S. 1–13) werden die Theorien der Mathieschen Funktionen und der Sphäroidfunktionen und ihre Anwendungen in ihrer geschichtlichen Entwicklung mit Angabe der wichtigeren Literatur dargestellt. Das erste Kapitel (S. 14–98) bringt die mathematischen Grundlagen (Separation der Schwingungsgleichung in verschiedenen Koordinaten, Wachstum der ganzen Funktionen endlicher Ordnung, Parameterabhängigkeit bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen, Eigenwertproblem mit einem und zwei Parametern, dreigliedrige lineare Relationen und asymptotische Reihen), im zweiten (S. 98–221) und dritten (S. 212–324) Kapitel behandeln Verff. die Theorie der Mathieschen Funktionen und der Sphäroidfunktionen (Haupteigenschaften, Entwicklungssätze, Stabilitäts- und Eigenwertskarten, Reihenentwicklungen und Integralrelationen, Verknüpfungsrelationen, Additionstheoreme, Asymptotik, Numerisches); im vierten Kapitel gibt J. Meixner Anwendungen, z. T. neuer Art (mechanische und elektrische Schwingungen mit periodisch veränderlichen Parametern, Systeme mit räumlich periodischer Struktur, mechanische und akustische Eigenschwingungen, elektromagnetische Eigenschwingungen, Abstrahlungsprobleme, Beugungs- und wellenmechanische Probleme). Den Abschluß bildet ein ausführliches Literaturverzeichnis.

O. Volk.

**Saran, Shanti: Relations between functions contiguous to certain hypergeometric functions of three variables.** Ganita 5, Nr. 2, 69–76 (1954).

Verf. definiert die mit  $F_E, F_F, \dots, F_T$  bezeichneten zehn hypergeometrischen Funktionen von drei Veränderlichen (vgl. das folgende Referat). Es wird dann eine Reihe von einfachen Beziehungen für die Funktionen  $F_E$  angegeben, wie z. B.  $a_1 F_E(a_1 + 1) = a_1 F_E - x \partial F_E / \partial x - y \partial F_E / \partial y - z \partial F_E / \partial z$  und die drei partiellen Differentialgleichungen, woraus Rekursionsformeln für die Funktionen  $F_E$  gewonnen werden. Es folgen die partiellen Differentialgleichungen für die übrigen Funktionen  $F_F, \dots, F_T$ .

O. Volk.

**Saran, Shanti: Hypergeometric functions of three variables.** Ganita 5, Nr. 2, 77–91 (1954).

Verf. untersucht die von Lauricella eruierten 10 hypergeometrischen Funktionen von drei Veränderlichen auf Konvergenz, und gibt für sie Integraldarstellungen, partielle Differentialgleichungen, denen sie genügen, Identitäten und Relationen untereinander an.

O. Volk.

**Chaundy, T. W.: An integral for Appell's hypergeometric function  $F^{(4)}$ .** Ganita 5, Nr. 2, 231–235 (1954).

J. L. Burchnall und Verf. (dies. Zbl. 25, 163) gaben für die Appellsche hypergeometrische Funktion  $F^{(4)}(a, b; c, c'; x, y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_{r-s} (b)_{r+s}}{r! s! (c)_r (c')_s} x^r y^s$  eine Integraldarstellung, woraus Verf. durch eine geeignete Substitution eine neue ableitet.

O. Volk.

### Funktionentheorie:

**Vermes, P. and M. N. Mikhail: Generated basic sets of polynomials.** Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 57, 556–559 (1954).

$\{p_n(z)\}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) sei eine basische Polynomfolge. Dann ist

$$(1) \quad z^n = \sum_i \pi_{ni} p_i(z) = \sum_i \pi_{ni} \sum_j p_{ij} z^j,$$

worin die Glieder der sogenannten Operatorfolge  $\{\tau_{ij}\}$  eindeutig bestimmt sind.  $\{p_{ij}\}$  nennt man die Koeffizientenfolge. Die zu  $\{p_n(z)\}$  reziproke Polynomfolge ist diejenige Polynomfolge, welche  $\{\tau_{ij}\}$  zur Koeffizienten- und  $\{p_{ij}\}$  zur Operatorfolge



hat. Die Produktfolge  $\{p_n(z)\} \{q_n(z)\} = \{u_n(z)\}$  ist durch  $u_{n+1} = \sum_h p_{nh} q_h$  definiert.  $D_n$  sei das Maximum der Ordnungen derjenigen Polynome  $p_i(z)$ , welche in (1) auftreten.  $\{q_n(z)\}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) soll von jetzt ab die spezielle basische Polynomfolge  $q_n(z) = q_n z^n$  bedeuten. Verff. beweisen u. a. folgendes:  $\{p_n(z)\}$  sei eine basische Polynomfolge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n/n = a$ ,  $a > 1$ . Dann hat die Produktfolge  $\{u_n^*(z)\} \{q_n(z)\} \{p_n(z)\}$  die gleiche Ordnung und denselben Bereich effektvollen Verhaltens wie  $\{p_n(z)\}$ . Ferner besitzt die zu  $\{u_n(z)\} = \{p_n(z)\} \{q_n(z)\}$  reziproke Folge die gleiche Ordnung und denselben Bereich effektvollen Verhaltens wie die zu  $\{p_n(z)\}$  reziproke Folge. Hat  $\{q_n(z)\}$  außerdem noch die Eigenschaft, daß  $K n^{-h} \leq q_n \leq K' n^h$  ( $K, K', h$  und  $h'$  positiv), so stimmen die beiden Folgen  $\{u_n(z)\}$  und  $\{p_n(z)\}$  in ihrer Ordnung und dem Bereiche effektvollen Verhaltens überein. Leicht folgen hieraus insbesondere diejenigen Sätze, welche M. N. Mikhail (dies. Zbl. 52, 74) über basische Polynomfolgen bewiesen hat, die sich durch Differentiation oder Integration basischer Polynomfolgen ergeben. E. Lammel.

**Kakehashi, Tetsujiro:** The divergence of interpolations. I. II. Proc. Japan Acad. 30, 741—745, 820—824 (1954).

Es wird in Ergänzung zu hinreichenden Konvergenzbedingungen von Walsh, dies. Zbl. 13, 59, eine Klasse von Divergenzphänomenen beschrieben.  $W_n(z)$  sei ein Polynom  $n$ -ten Grades und die Folge  $W_n(z) z^n$  konvergiere gegen eine Funktion  $\lambda(z)$ , die  $\neq 0$  und analytisch ist außerhalb des Einheitskreises  $C$ . Die Konvergenz sei gleichmäßig auf jeder beschränkten abgeschlossenen Punktmenge außerhalb  $C$ . Ferner sei  $q(z)$  eindeutig und regulär auf und innerhalb des Kreises  $C_R$  ( $|z| = R$ ). Es wird  $q$  nach Wahl einer komplexen Zahl  $m$  ( $\neq 0$  und  $\neq$  positive ganze Zahl) und einer Zahl  $a$  mit  $|a| = R$  eine Funktion

$$2\pi i Y_m(\varphi; a) = \Gamma(1-m) \int_{C_R} \varphi(t) (t-a)^{m-1} dt \quad \text{und} \quad \eta = Y_m\left(\frac{\varphi(t)}{t-z}; a\right)$$

zugeordnet. (Das gilt für  $\operatorname{Re} m > 0$ ; für  $\operatorname{Re} m \leq 0$  tritt eine Modifikation ein). Es sei  $S_n(z)$  das Polynom  $n$ -ten Grades, das mit  $\eta$  an allen Nullstellen von  $W_{n+1}$  übereinstimmt. Die Folge der  $S_n$  konvergiert innerhalb  $C_R$  gegen  $\eta$ , divergiert außerhalb  $C_R$  und es gilt dort  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^m \left(\frac{a}{z}\right)^n S_n(z) = B \neq 0$ . Entsprechende Phänomene treten bei gewissen Funktionen auf, die aus endlich vielen Funktionen mit Singularitäten, wie sie  $Y_m$  aufweist, linear zusammengesetzt sind. L. Collatz.

**Macintyre, A. J.:** Interpolation series for integral functions of exponential type. Trans. Amer. math. Soc. 76, 1—13 (1954).

Ist  $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^n}{n!}$  eine ganze Funktion vom Exponentialtypus und  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}$ , so hat man (1)  $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\xi) e^z d\xi$ . Um mit Hilfe von (1) eine Reihenentwicklung für  $F(z)$  zu erhalten, entwickelt R. C. Buck (s. dies. Zbl. 33, 364) die Funktion  $e^z$  in eine Reihe von der Form  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) g_n(\xi)$ . Diese in (1) eingesetzt, ergibt für  $F(z)$  die Reihenentwicklung (2)  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) T_n(F)$ . Um zu (2) zu gelangen, schlägt Verf. den anderen Weg ein, daß er  $f(\xi)$  in eine Reihe von der Form  $\sum_{n=0}^{\infty} T_n(F) v_n(\xi)$  entwickelt und in (1) einsetzt. Verf. behandelt insbesondere das Problem von Poritsky, die Funktion  $F(z)$  aus den Werten (3)  $F^{(nm)}(a_p)$ ,  $p = 1, 2, \dots, m$  und  $n = 0, 1, 2, \dots$ , aufzubauen, ferner das Problem von Gontcharoff, die Funktion  $F(z)$  aus den Werten (4)  $F^{(nm+p-1)}(a_p)$ ,  $p = 1, 2, \dots, m$  und

$n = 0, 1, 2, \dots$ , zu bestimmen. Verf. nutzt die enge Beziehung aus, welche zwischen den Funktionen  $f(z, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(\alpha)}{z^{n+1}}$  für verschiedene Werte von  $\alpha$  besteht.

(3) bzw. (4) werden mit Hilfe von  $f(z, \alpha_p)$  ausgedrückt, woraus sich eine einfache Funktionalgleichung für  $f(z)$  ergibt und damit eine zu  $F(z)$  gehörige Interpolationsreihe gefunden werden kann. Zunächst leitet Verf. für eine ganze Funktion  $F(z)$  vom Exponentialtypus im Falle (3) bzw. (4) die entsprechenden Interpolationsreihen her. Anschließend wird die Frage behandelt, inwieweit  $F(z)$  durch die Werte (3) bzw. (4) festgelegt wird. Hierauf werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen hergeleitet, welchen die Werte  $A_{n,p}$  genügen müssen, damit es eine ganze Funktion  $F(z)$  gibt, für welche  $F^{(nm)}(\alpha_p) = A_{n,p}$  ist,  $p = 1, 2, \dots, m$  und  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Wegen weiterer Einzelheiten und Literaturhinweisen muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden.

E. Lammlel.

Macintyre, Sheila Scott: Transform theory and Newton's interpolation series. Proc. London math. Soc., III. Ser. 4, 385—401 (1954).

$\mathfrak{A}$  sei ein abgeschlossener konvexer Bereich, welcher den Ursprung enthält,  $\mathfrak{C}$  seine Berandung,  $h(\Phi)$  die Stützfunktion von  $\mathfrak{A}$  und  $P_\Phi$  die Halbebene  $x \cos \Phi - y \sin \Phi \geq h(\Phi)$ . Zunächst gibt Verf. folgendes Theorem an, welches eine leichte Verallgemeinerung eines Ergebnisses von S. Schmidli (Thesis, dies. Zbl. 27, 215)

darstellt. Es sei  $F(z)$  eine ganze Funktion und  $F_*(z) = F(z) - F(0) - \sum_{r=1}^k \binom{z}{r} r F^{(r)}(0)$ .

Ferner gelte für ein  $\beta < k$  und  $K > 0$  die Abschätzung

$$F(re^{i\Phi}) \leq K(1 - r)^\beta e^{rh(\Phi)}.$$

Dann ist die durch  $f(\zeta) = \int_0^\infty e^{-\zeta t} F_*(t) \prod_{v=0}^k (t-v)^{-1} dt$  in  $P_{-\Phi}$  definierte Funktion in der zu  $\mathfrak{A}$  gehörigen Komplementärmenge regulär und auf  $\mathfrak{C}$  stetig. Außerdem ist  $F_*(z) = \prod_{v=0}^k (z-v) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \zeta f(\zeta) d\zeta$ . Hieran anschließend beweist Verf.

ein entsprechendes Theorem für den Fall, daß  $k$  eine beliebige reelle Zahl  $\mu$  ist und  $F(z)$  sich nur in dem Winkelraum  $|\arg(z - \alpha)| \leq \gamma$ ,  $\gamma < \pi$  regulär verhält. Dadurch werden Ergebnisse von A. J. Macintyre (dies. Zbl. 20, 377) verallgemeinert. Das soeben erwähnte Theorem und eine Verallgemeinerung der Binomialreihe verwendet Verf. zum Beweis folgender Sätze: Wenn  $F(z)$  auf  $\mathfrak{A}\{z\} : \alpha$  regulär ist und

$$F(\alpha + re^{i\Phi}) \leq K(1 - r)^\beta e^{rh(\Phi)}$$

gilt, worin  $\Psi(\Phi)$  die Stützfunktion des Indikatordiagramms  $\alpha = 1 + i$ ,  $\mathfrak{A}\{z\} : \frac{1}{2}\pi$  bedeutet, so konvergiert die Reihe

$$(1) \quad F(0) + z \Delta F(0) + \dots + \binom{z}{n} \Delta^n F(0) + \dots \quad \text{in} \quad (2) \quad \mathfrak{A}\{z\} > \mu$$

nach  $F(z)$ , wenn  $\alpha, \beta < \mu \leq 0$ . Ist ferner  $s$  eine natürliche Zahl oder Null,  $s < \mu \leq s + 1$  und  $\alpha, \beta < \mu$ , so konvergiert in (2) jede Reihe gegen  $F(z)$ , welche man aus (1) erhält, wenn  $F(0), F(1), \dots, F(s)$  durch beliebige Konstante  $A_0, A_1, \dots, A_s$  ersetzt werden. Diese beiden Sätze, von denen der erste ein Ergebnis von R. C. Buck (dies. Zbl. 33, 364) als Spezialfall enthält, sind eine Verschärfung eines Theorems von F. Carlson [Nova Acta Reg. Soc. Sci. Upsaliensis, IV. Ser. 4, Nr. 3, 1—61 (1915) insbes. p. 49—53].

E. Lammlel.

Evgrafov, M. A.: Über eine mit der Interpolationsaufgabe von Abel-Gončarov zusammenhängende rekurrente Beziehung. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 18, 449—460 (1954) [Russisch].

Soit un système de fonctionnelles  $\{l_n(F)\}$  portant sur les fonctions entières  $F(z)$ ; on suppose  $l_n(z^k) = 0$  si  $n > k$ ,  $l_n(z^n) \neq 0$ , et on détermine la suite de polynomes  $\{P_n(z)\}$  par les conditions: degré  $P_n = n$ ,  $l_n(P_m) = \delta_{n,m}$ ; à  $F(z)$  correspond alors



une série d'interpolation (formelle)  $\sum l_n(F) P_n(z)$ . Prenant  $l_n(F) = F^{(n)}(\lambda_n)$ , l'A. étudie la détermination des coefficients successifs de la série d'interpolation d'une puissance  $z^k$ ; les résultats obtenus sont appliqués, dans diverses hypothèses sur les  $\lambda_n$ , à l'étude de la convergence des séries d'interpolation d'Abel-Gontcharoff.

G. Bourion.

**Obrechhoff, N.:** Sur le développement des fonctions analytiques suivant des polynômes orthogonaux. C. r. Acad. Bulgare Sci. 7, Nr. 2, 5—8, russ. Zusammenfassg. 8 (1954).

Soit  $D$  un domaine limité par une seule courbe rectifiable de Jordan  $C$ ,  $F(z)$  une fonction analytique régulière sur  $C$  (pouvant admettre des singularités dans  $D$ ),  $f(z)$  une fonction holomorphe dans  $D \cup C$  et  $\{P_n(z)\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , une suite de polynômes, dont  $P_n(z)$  est de degré  $n$ , satisfaisant aux relations

$$\int_C F(z) P_m(z) P_n(z) dz = 0 \text{ si } m \neq n, = 1 \text{ si } m = n.$$

Le travail est consacré à l'étude de la série de Fourier  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z)$ , où  $a_n =$

$\int_C F f P_n dz$ , et de la relation entre cette série et la fonction  $f(z)$ . Les méthodes classiques de la théorie des séries réelles de Fourier ne peuvent pas être appliquées car, dans le cas considéré, l'espace des coefficients  $\{a_n\}$  n'est pas hilbertien et l'inégalité de Bessel cesse d'être vraie. L'A. examine le cas particulier, où  $F(z) = e^{1/z}$ , et démontre entre autres l'existence et quelques propriétés des polynômes  $P_n(z)$ .

F. Leja.

**Radojčić, M.:** Sur les séries de fonctions algébriques et les produits infinis analogues, définissant des fonctions analytiques multiformes dans leurs domaines d'existence quelconques. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 7, 95—118 (1954).

Als Anwendung des von H. Behnke und K. Stein für nichtkompakte Riemannsche Flächen abgeleiteten Rungeschen Approximationssatzes (s. dies. Zbl. 38, 235) zeigte H. Florack (s. dies. Zbl. 37, 56), daß die Sätze von Mittag-Leffler und Weierstraß für beliebige nichtkompakte Riemannsche Flächen gelten. Weiter ergab sich, daß jede nichtkompakte Riemannsche Fläche das genaue Existenzgebiet einer holomorphen Funktion ist. Diese Resultate werden in der vorliegenden Arbeit mit anderen Methoden, die vom Verf. bereits früher entwickelt wurden [C. r. Acad. Sci., Paris 185, 1007—1009 (1927)], aufs neue hergeleitet.

R. Remmert.

**Lochs, Gustav:** Die Konvergenzradien einiger zur Lösung transzendenter Gleichungen verwendeter Potenzreihen. Monatsh. Math. 58, 118—122 (1954).

Zur Berechnung der positiven Wurzeln der Gleichungen  $\operatorname{tg} z = z$ ,  $\operatorname{tg} z = 2z$  und  $\operatorname{Cos} z \operatorname{cos} z = \frac{1}{2}$  haben u. a. Euler und Lord Rayleigh Potenzreihen nach einer Veränderlichen  $t$  aufgestellt, die für bestimmte Werte von  $t$  die Wurzeln liefern, falls sie für diese Werte konvergieren. Die dabei offen gebliebene Konvergenzfrage ist kürzlich von H. Waadeland (dies. Zbl. 50, 296) untersucht worden. Dabei ergab sich auf Grund einer Abschätzung der Konvergenzradien, daß die Reihen für alle in Betracht kommenden Werte von  $t$  konvergieren, ausgenommen evtl. die zu (\*)  $\operatorname{Cos} z \operatorname{cos} z = \frac{1}{2}$  gehörige Reihe für den Wert  $t = t_1$ , der die kleinste positive Wurzel von (\*) liefert. In der vorliegenden Arbeit wird diese Lücke geschlossen, indem gezeigt wird, daß die zu (\*) gehörige Reihe genau den Konvergenzradius  $t_1$  hat und für  $t = t_1$  noch konvergiert. Im Zusammenhang damit wird noch eine bequeme Methode zur Bestimmung der Koeffizienten dieser Reihe und eine asymptotische Formel für dieselben angegeben.

F. Lösch.

**Wilson, R.:** Determinantal criteria for meromorphic functions. Proc. London math. Soc., III. Ser. 4, 357—374 (1954).

Die wesentlichen Resultate Hadamards über Pole auf der Peripherie des Konvergenzkreises lassen sich mit Hilfe eines konvexen Polygons, bestimmt durch die

Punkte  $(j, \lambda_j)$ , gewinnen. Dabei ist  $\lambda_j = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |D_{n,j}|$ ; die Hankelschen Determinanten  $D_{n,j}$  werden mit den Koeffizienten der gegebenen Potenzreihe  $c_0 + c_1 z + \dots$  gebildet. Verf. betrachtet den Fall, daß die auf dem Rande des Konvergenzkreises gelegenen Singularitäten Polstellen sind, und zwar  $l_1$  Pole der Vielfachheit  $m_1$ ,  $l_2$  Pole der Vielfachheit  $m_2 < m_1$ , usw. Durch die Punkte  $(j, \lambda_j)$  mit  $\lambda_j = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [(\log |D_{n,j}|)/\log n]$  wird ein konvexes Polygon bestimmt, dessen letzter Eckpunkt  $(q, 0)$  ist;  $q$  ist die Gesamtzahl der auf dem Rande des Konvergenzkreises gelegenen Pole. Für einen Eckpunkt  $(j, \lambda_j)$  gilt  $(*) \lim_{n \rightarrow \infty} |D_{n,j}| n^{-\lambda_j} = C_j > 0$  und umgekehrt folgt aus  $(*)$ , daß  $(j, \lambda_j)$  Eckpunkt ist. Der Einfluß von  $m_1$  und  $m_2$  auf die Lage der ersten Eckpunkte wird eingehend diskutiert. *H. Wittich.*

**Wigner, E. P. and J. v. Neumann: Significance of Loewner's theorem in the quantum theory of collisions.** Ann. of Math., II. Ser. **59**, 418—433 (1954).

As it has been shown by E. Vogt components  $v_\nu$  and  $d_\nu$  of the quantum mechanical wave function of a collision can be defined between which relations of the form  $v_\nu = \sum_\mu R_{\nu\mu} d_\mu$  hold.

The „derivative matrix“  $R$  depends on the energy  $E$  of the system and the same is true of any bilinear form of  $R$  with an energy independent real vector  $\xi$ :  $R(E) = \sum_{\mu, \nu} R_{\mu\nu}(E) \xi_\mu \xi_\nu$ . The

objective of the paper is very similar to an article by Van Kampen (this Zbl. **53**, 170) who investigates the analytic nature of the collision matrix and of the derivative matrix in a one dimensional problem. Mathematically the formulation is very similar to K. Loewner's theory of monotonic matrix functions. K. Loewner investigates functions  $f$  of real symmetric matrices with characteristic values in an interval  $I$  such that if  $m_1$  and  $m_2$  are two such matrices and  $m_1 - m_2$  is positive definite,  $f(m_1) - f(m_2)$  be also positive definite. Those functions  $f$  can be extended to become an analytic function in the whole complex plane with imaginary parts positive and negative in the upper and lower half planes respectively (regular in  $I$ ). One of Loewner's intermediate formulae is identical with a postulate of the authors, but the condition regarding the positive definite character of the matrices under consideration is different from Loewner's intermediate result in as much as this condition must remain positive definite even if the energy values  $E_k$  are not in the same domain of regularity, while Loewner's intermediate formula contains only values of the variables which are all in the same domain of regularity. Apart from this point Loewner's considerations constitute a full proof of the premise under consideration. The authors prove the following theorems: (1)  $R(z)$  is either continuous and non decreasing at a singularity  $z = Z$  or tends to  $+\infty$  and  $-\infty$  as  $z$  approaches  $Z$  from the left and the right; (2)  $R'(z)$  is a continuous function of  $z$  in  $R$ 's domain of definition, and if one sets  $R(Z)$  equal to its limiting value obtained above at an apparent singularity  $Z$ , it is continuously differentiable also at the apparent singularity; (3)  $R$  satisfies the postulates mentioned in the introduction and  $Z_\nu$  is a real singularity in the sense of theorem (1),  $S = -1/R$  then  $R_\nu(z) = R(z) - 1/S'(Z_\nu)(Z_\nu - z)$  also satisfies these postulates and  $Z_\nu$  is only an apparent singularity of  $R_\nu$ ; (4) There is a circle in the complex plane about every regular point  $\xi$  of  $R$  in which the infinite continued fraction

$$R = b - 1/q_1 - 1/q_2 - \dots - 1/q_{n-1} + R_{n-1}$$

converges uniformly. It represents within that circle, by Weierstrass' theorem an analytic function; (5) The infinite continued fraction mentioned in theorem (4) converges uniformly in every closed domain which excludes the real axis; (6) The infinite continued fraction mentioned in theorem (4) is equal to  $R$  on the real points of the circle of theorem (4); (7) A function  $R$  which satisfies the postulates mentioned in the introduction can be extended over the complex plane excepting the negative real axis, as an analytic function. Its singularities are all on the real axis and, unless it is a constant, its imaginary part is positive in the upper, negative in the lower half plane; (8) All functions  $R$  satisfy the postulates mentioned in the introduction. The same applies to limits of such functions which have only isolated singularities on the positive real axis.

*M. Pinl.*

**Kareivadze, I. N. und B. V. Chyodelidze: Über das Cauchysche Integral.** Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze **20**, 211—238 u. russische Zusammenfassg. 238—244 (1954) [Grusinisch].

Es wird das Cauchysche Integral

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(t) dt}{t-z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{\varphi(t) dt}{t-z}$$



untersucht, wenn die Integrationskontur  $C = \sum_1^{\infty} C_k$  eine abzählbare Mannigfaltigkeit von glatten geschlossenen und offenen Kurven  $C_k$  darstellt. Indem die Verff. der Kontur  $C$  und der Funktion  $q(t)$  bestimmte Bedingungen auferlegen, die die gleichmäßige und absolute Konvergenz der Reihe (1) in einem beliebigen Gebiet  $G$  ( $G \cap C = 0$ ) gewährleisten, stellen sie einige Eigenschaften des betrachteten Integrals fest. Speziell wird das Verhalten der Funktion  $\Phi(z)$  in der Umgebung von  $C$  und im Unendlichen festgestellt. — Ferner beweisen die Verff. die Umkehrformel

$$\oint_C \frac{dt}{t-x} \oint_C \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau-t} = \pi^2 \varphi(x), \quad x \in C,$$

wenn  $C$  aus geschlossenen, sich nicht überschneidenden Kurven besteht, und lösen in expliziter Form die Integralgleichung

$$a(x) \varphi(x) + \frac{b(x)}{\pi i} \oint_C \frac{\varphi(t) dt}{t-x} = f(x), \quad x \in C,$$

wo  $a(x) = a_k$ ,  $b(x) = b_k$  für  $x \in C_k$ , wobei  $a_k, b_k$  Konstanten sind. — Schließlich wird die Lösung eines Grenzproblems gegeben, das in der Ermittlung der analytischen Funktion  $\Phi(z)$  mit einem vorgegebenen Sprung auf  $C$ ,  $\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t)$ , besteht.

D. A. Kreselava (Übersetzt aus Ref. Žurn. Mat. 1955, Nr. 3713).

**Gispert, Hans-Günter:** Über die Formeln von Plemelj für Cauchysche Integrale. *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg* 4, 311—318 (1954).

a) Soit  $S$  une courbe de Liapounoff limitant un domaine plan  $T$  définie paramétriquement par (1)  $\mathfrak{z}(s) = \mathfrak{x}(s) + i\mathfrak{y}(s)$ ,  $s_a \leq s \leq s_b$ . Soient  $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$  deux points quelconques de  $S$ ,  $\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2$  la distance entre  $\mathfrak{z}_1$  et  $\mathfrak{z}_2$  et  $\gamma_{\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2}$  l'angle aigu des tangentes en  $\mathfrak{z}_1$  et  $\mathfrak{z}_2$ . En supposant  $\gamma_{\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2} \leq M |\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2|^{\lambda} \leq \pi/4$ , ( $0 < \lambda < 1$ ), l'A. établit préalablement les propositions suivantes: 1.  $|\mathfrak{x}'(s_1) - \mathfrak{x}'(s_2)| \leq M |\mathfrak{s}_1 - \mathfrak{s}_2|^{\lambda}$ . 2.  $0 < K_0 \leq |\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2| s_{12}^{-1} \leq 1$ ,  $s_{12}$  = la plus petite longueur d'arc passant par  $\mathfrak{z}_1$  et  $\mathfrak{z}_2$ . 3. Soient  $\mathfrak{z}^{(1)}, \mathfrak{z}^{(2)}$  les extrémités d'un arc de  $S$ , contenu à l'intérieur du cercle de Liapounoff  $L$  de centre  $\mathfrak{z}_0 \in S$ . Soient  $AC, BD$  deux diamètres de  $L$  d'angle aigu  $\tau < \pi/2$ , et qui forment avec la normale à  $S$  en  $\mathfrak{z}_0$  un angle égal  $\tau/2$ . Pour  $z$  dans le secteur  $AB$  ( $\text{ou } C\mathfrak{z}_0D$ ),  $z = \mathfrak{z}_0$ , et  $\mathfrak{z} = \text{arc}(\mathfrak{z}^{(1)} \mathfrak{z}^{(2)})$ , on a dans ces conditions:  $z - \mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0^{-1} \geq N > 0$ ,  $N$  constante indépendante de la position de  $z$  et  $\mathfrak{z}$ . — b) Soit  $F(z)$  le potentiel logarithmique complexe défini par (2)  $F(z) =$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_S \kappa(s) \ln \frac{1}{z - \mathfrak{z}} ds \quad \text{pour } z \in T. \quad \text{En posant}$$

$$(3) \quad \frac{\partial U}{\partial x} - i \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{dF}{dz} = J(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_S \kappa(s) \frac{d\mathfrak{z}}{z - \mathfrak{z}},$$

l'A. établit pour l'intégrale du type Cauchy (3), les valeurs limites suivantes

$$J^+(\mathfrak{z}_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\mathfrak{f}(s) d\mathfrak{z}}{\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_1} + \frac{\mathfrak{f}(\mathfrak{z}_1)}{2} \quad \text{et} \quad J^-(\mathfrak{z}_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\mathfrak{f}(s) d\mathfrak{z}}{\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_1} d\mathfrak{z} - \frac{\mathfrak{f}(\mathfrak{z}_1)}{2}$$

où  $d\mathfrak{z} = ds e^{i\psi}$  et  $\mathfrak{z}(s) e^{-i\psi} = \mathfrak{f}(s)$ . — c) A l'aide des résultats mentionnés dans a) et b) l'A., en utilisant une méthode de calcul analogue à celle de Privalov et Lichtenstein, établit une nouvelle démonstration du théorème de Plemelj-Privalov, i. e.,  $J^+(\mathfrak{z})$  et  $J^-(\mathfrak{z})$  sont hôlderiennes d'ordre  $\lambda$ , ( $0 < \lambda < 1$ ).

S. Vasilache.

**Picone, Mauro:** Sul calcolo delle funzioni olomorfe di una variabile complessa. *Studies Math. Mech.*, presented to Richard von Mises, 118—126 (1954).

Es handelt sich um eine Verallgemeinerung der Integralformel von Cauchy mit dem Ziel, eine in einem gewissen Gebiet holomorphe Funktion  $f$  aus den Werten zu berechnen, die sie auf einem Teil  $C$  des Randes annimmt. Ihrer Struktur nach ist

sie von der Form

$$2\pi i f(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \oint_C f(\zeta) \cdot \left[ \frac{1}{\zeta - z} - \Phi_m(\zeta, z) \right] d\zeta,$$

wobei die Funktionen  $\Phi_m$  aus von  $f(z)$  unabhängigen Cauchy-Integralen über den restlichen Rand gebildet werden. Hinsichtlich der Einzelheiten und insbesondere aller Voraussetzungen muß auf die Arbeit verwiesen werden. Der Verf. merkt an, daß die gleiche Aufgabe bereits von G. Zin (s. dies. Zbl. 51, 309) behandelt worden ist. Die Anmerkung ist beim Lesen der Korrekturen entstanden. H. Bückner.

● **Boas jr., Ralph Philip:** *Entire functions.* (Pure and applied mathematics, a series of monographs and textbooks, Vol. V.) New York: Academic Press Inc. Publishers 1954. XI, 276 p. \$ 6,—.

During the last thirty years, a large volume of work has been done in the investigation of the properties of functions of exponential type in an angle and in the whole-plane. These results, due to a large body of research workers, interested in this field, are found scattered in several journals. The author of the book under review, himself a prominent worker in the field, has done a very useful service to those interested in the properties of entire functions, by bringing together in a book form all the important results obtained in the field and giving a systematic account of the results and the main techniques employed in the investigation of these results. The contents of the book, indicated chapterwise below, give an idea of the ground covered. The first chapter collects together the classical results like Jensen's, Carleman's and Nevanlinna's formulae and the Phragmen-Lindelöf theorems. The second chapter gives an account of the classical results on the relation between the order and type of an entire function and the coefficients in its Taylor expansion. This chapter includes the classical results on the relation between the zeros and order of an entire function, order of the canonical product, Hadamard's factorization theorem and the zeros of functions of integral order. With chapter three begins what may be called the deeper theorems of the theory of entire functions. This chapter contains all the main results known about the minimum modulus of entire functions. Chapter four deals with the relation between the growth and density of zeros for functions with real negative zeros (or zeros distributed on a half line). Chapter five gives a detailed discussion of the indicator function and the indicator diagram of a function of exponential type in an angle or in the whole plane, and may be regarded as an introductory chapter for the investigations in the remaining chapters. The results in chapter six centre round the idea that if a function is of exponential type and its growth is suitably restricted on a line, then its growths along parallel lines are similarly restricted. A large number of results of this type are proved in this chapter. Chapter seven deals with the asymptotic behaviour, along half lines, of functions of exponential type in a half plane when restrictions are placed on its growth along the boundary. Chapter eight discusses the influence of zeros of functions of exponential type on their growth with suitable additional restrictions on the growth of the function along a line. Chapter nine deals with uniqueness theorems. These are concerned with generalizations of Carlson's theorem that an entire function of exponential type less than  $\pi$  vanishing at the integral points is identically zero. Allied results when the function is assumed to be very small (instead of vanishing) at a sequence of points are also considered. The main idea in chapter ten is to derive a relation between the growth of a function (of exponential type in a half plane) along a line and its growth along a sequence of points on the line when suitable restrictions are placed on the growth of the function on the boundary of the half plane. This type of problem has attracted the attention of a large number of workers in the field and this chapter contains a systematic account of all the important results in this connection. If an entire function of exponential type is bounded along the real axis,



then its derivative is also bounded along the real axis. The generalizations of this theorem form the subject matter of chapter eleven. Restrictions on the growth of a function leads to similar restrictions on the growth of functions obtained from it by suitably restricted linear operations (derivation above is one such operator). The twelfth and last chapter contains applications of the results of the previous chapters to some problems like the completeness of sequences of entire functions, singularities of power series with finite radius of convergence, Fourier series, functions represented by Dirichlet's series and differential equations of infinite order with constant coefficients. There is an extensive bibliography running over sixteen pages. The printing and get up are attractive. In a book of this type packed with theorems and their demonstrations, it will be surprising if there are no printing mistakes. The reviewer has received from the author a long list of corrections. It is hoped that the publishers will take steps to incorporate it as part of the book or issue it as a supplement since some of the errors are serious and are likely to mislead all but an expert.

V. Ganapathy Iyer.

**Redheffer, R. M.:** On even entire functions with zeros having a density. Trans. Amer. math. Soc. **77**, 32—61 (1954).

In this paper the relation between the growth of  $F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$  for which  $\sum \lambda_n^{-2} < \infty$  and the distribution of its zeros are studied. Simple proofs and sharpened forms of many known results are given and some of these are applied to discuss the  $L^2$  completeness of  $\{e^{-i\lambda_n x}\}$  on a given finite interval. Let  $\{\lambda_n\}_0^{\infty}$  be a positive increasing sequence and let  $A(u)$  be its distribution function. The following theorems are first proved: (A) (Titchmarsh-Pfluger) if  $\lim A(u)/u = D$ , then  $\log^+ F(x) \leq o(x)$ ; (B) if  $\frac{A(u)}{u}$  is bounded and  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{A(x)}{x} - \frac{A(x')}{x'} \right] = 0$ , then  $\log^+ F(x) = o(x)$ . By constructing counter-examples, it is shown that neither of the two hypotheses are necessary for  $\log^+ F(x) = o(x)$ . For the complex plane, the following sets of conditions are shown to be equivalent: (C) (c)  $\lim \log |F(x)|/x \leq 0$ ,  $\lim A(u)/u = D < \infty$  and (c')  $\lim \log F(re^{i\theta})/r = \pi D' \sin \theta$  for some  $D' < \infty$  and all  $\theta$ ; (D) (Pfluger) (d)  $\lim A(u)/u = D$  and (d') given any  $\varepsilon > 0$ , there exists a constant  $C = C(\varepsilon)$  such that, for  $\pi - \varepsilon \geq \theta \geq \varepsilon$ ,  $\exp(\pi Dr \sin \theta) - \varepsilon r \leq F(re^{i\theta}) \leq \exp(\pi Dr \sin \theta) + \varepsilon r$  whenever  $r > C$ ; (E) (Valiron-Titchmarsh) (e)  $\lim n \lambda_n^{-1} = D$  ( $\lambda_n$  complex) and (e'). Theorems establishing inequalities between the distribution function, the upper (lower) densities and upper (lower) mean densities on the one hand and certain expressions involving  $F(z)$  and  $F'(z)$  on the other, are proved. For instance, it is shown that (F) the conditions  $\lim i F'(iy)/F(iy) = \pi D$  and  $\lim A(u)/u = D$  are equivalent. Paley and Wiener have proved that if  $A(u) = Du \leq H$ , then  $F(x) = O(x^{4H-1})$ . By a different procedure, the exponent is improved to  $4H - 2$ , which is also shown to be the best possible (in certain special sense). On the completeness of  $\{e^{-i\lambda_n x}\}$  the following are the main results obtained: (G) if  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x+xy) - A(x)}{(x+xy) - x} = D$  for a positive  $y(x)$  such that  $y' \leq 0$ ,  $(xy)' \geq 0$ ,  $\int_1^{\infty} \frac{y \log y}{x} dx = \infty$ , then  $\{e^{-i\lambda_n x}\}$  is not complete on any interval of length  $> 2\pi D$ ; (H) if  $A(u) = Du \leq H$ , the excess of  $\{e^{-i\lambda_n x}\}$  on an interval of length  $2\pi D$  does not exceed  $4H - 3/2$ . Moreover, there is a distribution  $A(u)$  satisfying  $A(u) = Du \leq H$  with excess as large as  $[4H - 2]$  or, if  $4H - 2$  is an integer, as large as  $4H - 3$ . Theorem (G) fills up a gap between a theorem of Levinson and an earlier theorem of the author. The first part of theorem (H) improves and the second part completes, a theorem of Paley and Wiener. J. A. Siddiqui

**Rahman, Qazi Ibadur: Maximum modulus and the zeros of an entire function.** Ganita 5, Nr. 2, 143—148 (1954).

Relations between the limits of indetermination of  $r^{-\varrho} \log M(r)$  and  $r^{-\varrho} n(r)$  for integral functions of finite order  $\varrho$  appear in Boas, this Zbl. 60, 223, third review; Shah, Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 28, 1—8 (1948); Buck, this Zbl. 47, 315; Singh, this Zbl. 51, 58; Lakshminarasimhan, this Zbl. 50, 302. Lakshminarasimhan's basic theorem is here generalised in such a way as to include a real function  $L(x) > 0$  and continuous for  $x > x_0$  and satisfying  $L(kx) \sim L(x)$  as  $x \rightarrow \infty$  for every constant  $k > 0$ . Various deductions, e. g.,  $\alpha e^{-(\alpha-\beta)/\alpha} \leq \varrho T$ ,  $\beta \leq \varrho t$ , are made, where

$$T = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{r^{\varrho} L(r)}, \quad t = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{r^{\varrho} L(r)}, \quad \gamma = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r^{\varrho} L(r)}, \quad \beta = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r^{\varrho} L(r)}.$$

An alternative proof, from a formula of Shah (ibid.), is given of Singh's (ibid.) result: If  $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\varrho} n(r) = \varrho \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\varrho} \log M(r)$ , then  $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} r^{-\varrho} n(r) = \varrho \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\varrho} \log M(r)$ .

N. A. Bowen.

**Jain, Mahendra Kumar: On the maximum real part of an integral function and its derivatives.** Ganita 5, Nr. 2, 203—214 (1954).

In this paper the author proves a result analogous to his own (this Zbl. 53, 238) i. e., if  $f(z)$  is an integral function of lower order  $\lambda$  ( $\lambda > 1$ ) then the maximum terms of  $f(z)$  and  $f^{(s)}(z)$  form a non decreasing sequence. Using Shah's method, he also shows that results of Shah, which the author labels as Theorem A, Theorem B, Theorem C, hold if the maximum modulus  $M(r)$  is replaced by the maximum real part  $A(r)$ . Finally applications of these results are given on the same lines as Shah has done.

C. Uluçay.

**Diamantopoulos, Th.: Les relations réciproques dans la représentation conforme plane.** Bull. Soc. math. Grèce 29, 85—93, französ. Zusammenfassg. 93—94 (1954) [Griechisch].

Dans ce travail l'A. introduit une extension de la notion du rayon de contraction des courbes planes et à l'aide des opérateurs différentiels il obtient quelques expressions géométriques de fonctions réciproques.

G. G. Legatos.

**Walsh, J. L. and D. Gaier: Zur Methode der variablen Gebiete bei der Randverzerrung.** Arch. der Math. 6, 77—86 (1954).

$w = f(z)$  bilde das einfach zusammenhängende Gebiet  $G$  mit  $w = 1$  als Randpunkt schlicht und konform in die Halbebene  $H: \Re z \leq 1$  ab, wobei  $z = 1$  und  $w = 1$  entsprechen sollen. Untersucht wird  $\arg(f(z) - 1)$ ,  $z \rightarrow 1$ , unter der Annahme, daß  $G$  in  $w = 1$  Grenzstützen besitzt. Dazu werden die Methode der variablen Gebiete und potentialtheoretische Hilfsmittel herangezogen. In ähnlicher Weise wird die Frage behandelt, für welche Randstruktur von  $G$  der Satz von Visser gilt.

H. Wittich.

**Hartman, Philip and Aurel Wintner: On conformal maps defined by Lagrange's series and by solutions of  $dw/dz = f(w)$ .** Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 3, 282—292 (1954).

Ist  $f(w)$  in  $|w| < 1$  eindeutig regulär analytisch,  $f(0) \neq 0$  und  $|f(w)| < 1$ , dann hat die durch  $w(0) = 0$  festgelegte Lösung  $w = w(z)$  von  $w = zf(w)$  die folgenden Eigenschaften: 1.  $w = w(z)$  ist eindeutig regulär analytisch in  $|z| < 1$ . 2.  $|w(z)| < 1$  für  $|z| < 1$ . 3.  $w(z)$  ist schlicht in  $|z| < 1$ . Beispiele zeigen, daß  $w(z)$  auf  $|z| = 1$  singuläre Stellen haben kann. Weiter kann das schlichte Gebiet  $D$ , das von  $w(z)$  als Bild des Kreises  $|z| < 1$  erzeugt wird, Randpunkte auf  $|w| = 1$  besitzen. Die Verff. führen das zu  $1/f(w)$  gehörige Borelsche Polygon  $B$  ein und zeigen, daß  $B$  das Gebiet  $D$  enthält. Für die durch  $w(0) = 0$  festgelegte Lösung  $w(z)$  der Differentialgleichung  $w' = f(w)$  wird gezeigt:  $w(z)$  ist schlicht in  $|z| < 1$  (sogar in  $|z| < 1 + \eta$ ,  $\eta = \eta(f) > 0$ ). Ist  $D$  das  $w$ -Bild von  $|z| < 1$ , dann enthält das Borelsche Polygon  $B$  von  $1/f(w)$  die abgeschlossene Hülle  $\bar{D}$  von  $D$ .

H. Wittich.



● Netanyahu, E.: The coefficient problem for schlicht functions in the exterior of the unit circle. (Technical Report No. 39.) Stanford, Calif.: Stanford University, Department of Mathematics 1954.

Jenkins, James A.: A general coefficient theorem. Trans. Amer. math. Soc. 77, 262—280 (1954).

In einem Gebiet  $G$  auf einer endlichen Riemannschen Fläche sind  $n$  Punkte  $P_1, \dots, P_n$  ausgezeichnet. Ein quadratisches Differential  $Q(z) dz^2$ , das auf dem Rande von  $G$  nicht negativ ist, soll in den Stellen  $P_j$  Pole der Vielfachheit  $\geq 2$  haben. Verf. betrachtet in  $G$  schlichte Funktionen und leitet eine allgemeine Beziehung zwischen den Entwicklungskoeffizienten von  $f(z)$  und  $Q(z)$  an den Stellen  $P_1, \dots, P_n$  ab. Mit diesem Satz wird für eine Klasse von Funktionen eine zuerst von O. Teichmüller ausgesprochene Behauptung, nach der zwischen den Lösungen gewisser Extremalprobleme und quadratischen Differentialen ein enger Zusammenhang besteht, genau formuliert und bewiesen. Ohne nähere Ausführung wird angegeben, daß zahlreiche Extremalaufgaben der geometrischen Funktionentheorie mit Hilfe des Satzes gelöst werden können.

H. Wittich.

Kuramochi, Zenjiro: Dirichlet problem on Riemann surfaces. I. Correspondence of boundaries. II. Harmonic measures of the set of accessible boundary points. III. Types of covering surfaces. IV. Covering surfaces of finite number of sheets. V. On covering surfaces. Proc. Japan. Acad. 30, 731—735, 825—830, 831—836, 946—950 (1954), 31, 20—24 (1955).

I. Unter den analytischen Abbildungen  $A$  einer Riemannschen Fläche  $R$  in eine nullberandete Fläche  $\underline{R}$  betrachtet Verf. eine interessante Teilmenge. Diese läßt sich in modifizierter, aber äquivalenter Form folgendermaßen beschreiben: Es sei  $u_{ab} = u(p; a, b)$ ,  $p, a, b \in \underline{R}$ ,  $a = b$  fest,  $p$  variabel, ein Normalpotential dritter Gattung auf  $\underline{R}$ , d. i. eine harmonische Funktion auf  $\underline{R} - a - b$ , die in  $a$  einen positiven und in  $b$  einen negativen logarithmischen Pol besitzt und außerhalb je einer Umgebung von  $a$  und  $b$  beschränkt ist. Wenn nun die in  $R$  definierte Funktion  $U = A \cdot u_{ab}$  eine positive superharmonische Majorante besitzt, so heißt die Abbildung  $A$  beschränktartig. Dieser Begriff ist unabhängig von der Wahl der Punkte  $a$  und  $b$  (dies entspricht dem ersten Hauptsatz in Nevanlinnas Theorie der meromorphen Funktionen, im Falle beschränkter Charakteristik: ist  $R$  die Riemannsche Zahlenkugel und  $R$  der Einheitskreis, so ist  $A$  eine beschränktartige meromorphe Funktion). Natürlich hat die gegebene Definition der beschränktartigen Abbildung  $A$  auch einen Sinn, wenn  $\underline{R}$  positiv berandet ist; dann ist aber jede analytische Abbildung von  $R$  in  $\underline{R}$  beschränktartig. Ist  $A_1$  eine analytische Abbildung von  $R_1$  in  $R$  und  $A$  eine beschränktartige Abbildung von  $R$  in  $\underline{R}$ , so ist die zusammengesetzte Abbildung  $AA_1: R_1 \rightarrow \underline{R}$  wieder beschränktartig. Wenn bei der analytischen Abbildung  $A: R \rightarrow \underline{R}$  eine Menge  $M \subset \underline{R}$  von positiver Kapazität nur endlich oft überdeckt wird, so ist  $A$  beschränktartig. Der vom Verfasser bewiesene Satz lautet nun: Ist  $A$  eine beschränktartige Abbildung des Einheitskreises  $|z| < 1$  in  $\underline{R}$ , so besitzt  $A$  auf einer Menge  $E$  von Maß  $2\pi$  auf der Peripherie  $|z| = 1$  sogenannte Winkelgrenzpunkte, d. h. bei Winkelannäherung an  $e^{i\theta}$  ist  $A(z)$  in  $\underline{R}$  konvergent, für  $e^{i\theta} \in E$ .

II. Indem man die „Enden“ einer Riemannschen Fläche  $\underline{R}$  als „ideale“ Punkte zu den Punkten von  $\underline{R}$  hinzufügt und in dieser Vereinigung eine geeignete Topologie einführt, wird  $\underline{R}$  zu einem Hausdorffschen Raum  $\underline{R}^*$  erweitert, in dem der Rand  $P = \underline{R}^* - \underline{R}$  von  $\underline{R}$  in  $\underline{R}^*$  abgeschlossen und vollständig unzusammenhängend ist. Durch eine analytische Abbildung einer Riemannschen Fläche  $R$  in  $\underline{R}$  wird  $R$  zu einer Überlagerungsfläche von  $\underline{R}^*$ ; diese Überlagerung erzeugt eine Erweiterung von  $R$  zu einem Hausdorffschen Raum  $R^*$ , in dem der Rand  $P = \underline{R}^* - R$  von  $R$  wiederum abgeschlossen und vollständig unzusammenhängend ist.  $P$  besteht aus den sogenannten Randstellen oder erreichbaren Randpunkten von  $R$  in bezug auf die

Abbildung  $A: R \rightarrow R^*$ . Ist  $B$  eine Borelsche Menge auf  $P$ , so wird das harmonische Maß  $\mu(B, R)$  der Randpunktmenge  $B$  in bezug auf  $R$  als die untere Grenze der in  $R$  positiven superharmonischen Funktionen definiert, die auf  $R + B$  stetig und auf  $B \geq 1$  sind. Es sei nun  $\hat{R}$  die universelle Überlagerungsfläche von  $R$ ,  $R$  positiv- und  $\underline{R}$  nullberandet. Ist die universelle Überlagerungsfläche des Bildgebietes  $A(\underline{R})$  in  $\underline{R}$  ein Kreis, so gilt  $\mu(P, R) \geq \mu(\hat{P}, \hat{R})$  (M. Ohtsuka, dies. Zbl. 46, 308). Verf. gibt ein Beispiel, wo das Zeichen  $>$  steht. Gilt aber  $\mu(P, R) = \mu(\hat{P}, \hat{R})$ , so gilt auch  $\mu(B, R) = \mu(\hat{B}, \hat{R})$ , wenn  $B$  irgend eine abgeschlossene Teilmenge von  $P$  und  $\hat{B}$  die über  $B$  gelegene Menge in  $\hat{P}$  ist. Wird die Fläche  $R$  durch ein metrisches Fundamentalpolygon im Kreis  $|z| < 1$  dargestellt und ist das Maß der Kreisbogen, welche das abgeschlossene Polygon und seine bezüglich der Substitutionsgruppe äquivalenten Polygone mit der Peripherie  $|z| = 1$  gemeinsam haben, gleich  $2\pi$ , so gilt  $\mu(P, R) = \mu(\hat{P}, \hat{R})$ . — III. Es sei  $\underline{R}$  null- und  $R$  positiv-berandet. Die Überlagerung von  $R$  über  $\underline{R}$  heißt vom  $D$ -Typus, wenn  $\mu(P, R) = 1$  ist. Ist  $\sigma$  die Spurabbildung der universellen Überlagerungsfläche  $|z| < 1$  von  $R$  auf  $\underline{R}$ ,  $A$  die Spurabbildung von  $R$  in  $\underline{R}$  und besitzt die Abbildung  $A\sigma$  auf der Peripherie  $|z| = 1$  fast überall „Winkelgrenzpunkte“, so heißt die Überlagerung von  $R$  über  $\underline{R}$  vom  $F$ -Typus. Eine beschränktartige Überlagerung (Abbildung) ist vom  $F$ -Typus; eine Überlagerung vom  $F$ -Typus ist vom  $D$ -Typus. Es werden die Beziehungen zwischen einer Riemannschen Fläche  $R$  und beliebigen Überlagerungsflächen  $R_1$  und  $R$  hinsichtlich des harmonischen Maßes ihrer Ränder  $P_1$  und  $P$  untersucht. Verf. beweist u. a.: Ist  $R$  eine Überlagerung von  $\underline{R}$ ,  $R_1$  eine Überlagerung von  $R$ , und ist die universelle Überlagerungsfläche der Projektion von  $R$  in  $\underline{R}$  ein Kreis, so gilt  $\mu(\hat{P}_1, \hat{R}_1) \geq \mu(\hat{P}, \hat{R})$  wo  $\hat{R}_1$  und  $\hat{R}$  die universellen Überlagerungsflächen von  $R_1$  und  $R$  bezeichnen. — IV. Hier behandelt Verf. endlich-blättrige Überlagerungen: ist  $n(p)$  die Anzahl der über  $p \in \underline{R}$  gelegenen Punkte aus  $R$ , so ist  $n(p)$  für alle  $p \in \underline{R}$  unterhalb einer festen Schranke. Ist nun  $R$  eine solche endlichblättrige Überlagerung über einer nullberandeten Fläche  $\underline{R}$ , so sind alle Randpunkte aus  $P = R^* - R$  regulär in bezug auf das Dirichletsche Randwertproblem, ausgenommen eine Menge  $P_1 \subset P$ , deren Projektion in  $\underline{R}^*$  eine  $F_\sigma$ -Menge vom harmonischen Maß null ist. Ist  $R$  positiv-berandet,  $g(p, q)$  die Greensche Funktion und gilt  $\lim_{p \rightarrow q} g(p, q) = 0$  für eine Randstelle  $q \in P$ , so ist  $q$  regulär. — V. Es sei  $\underline{R}$  nullberandet. Einer reellwertigen Funktion  $f$  auf  $P = R^* - R$  wird die Ober- und Unterfunktion  $\bar{H}_f$  bzw.  $\underline{H}_f$  (im Sinne von Perron-Brelot) zugeordnet:  $\bar{H}_f$  ist die untere Hülle jener auf  $R^*$  von unten halbstetigen Funktionen  $v$  mit  $v(q) \geq f(q)$ ,  $q \in P$ , die auf  $R$  superharmonisch sind. Es ist  $H_f = -\bar{H}_{(-f)}$ . Im Falle  $\underline{H}_f = \bar{H}_f$  heißt  $f$  lösbar (Brelot). Verf. zeigt, daß alle stetigen (und somit auch alle halbstetigen) Funktionen  $f$  lösbar sind, falls die Überlagerung von  $R$  über  $\underline{R}$  vom  $F$ -Typus ist (vgl. Teil III). Wenn die Fläche  $\underline{R}$  positiv-berandet ist, so läßt sie sich derart zu einem Hausdorffschen Raum  $\underline{R}^*$  erweitern, daß das vorangehende Resultat und die Resultate in Teil IV noch gültig bleiben.

A. Pfluger.

**Krasner, Mare:** Prolongement analytique dans les corps valués complets. *Éléments analytiques, préliminaires du théorème d'unicité*. C. r. Acad. Sci., Paris 239, 468—470 (1954).

In a series of notes the author treats the analytic continuation of functions over a non-archimedean valued field  $K$ , which is supposed to be complete and algebraically closed. A function  $f(x)$  defined on a quasiconnected domain  $D \leq K' = K \cup \{\infty\}$  (see Krasner, this Zbl. 55, 268) with values in  $K$  is called an analytic element on  $D$  if it is the limit (uniform on  $D$ ) of a sequence of functions which are rational over  $K$ . Then the following uniqueness theorem is stated: If two analytic



elements  $f(x)$  and  $f^*(x)$  on the non-disjoint domains  $D$  and  $D^*$  coincide on a subset of  $D \cap D^*$  which has limitpoint in  $D \cap D^*$  then they are equal all over  $D \cap D^*$ . In preparation of the proof some known results on Taylor expansions are given [see Krasner, C. r. Acad. Sci., Paris **222**, 37—40, 165—167 (1946) and Schöbe, Thesis 1930].

*J. Verhoeff.*

**Krasner, Marc:** Prolongement analytique dans les corps valués complets. Démonstration de la loi d'unicité. Fonctions analytiques uniformes. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 745—747 (1954).

The uniqueness theorem stated in the note reviewed above is proved here. After this two analytic elements  $f(x)$  and  $f^*(x)$  are called equivalent  $f \sim f^*$  if there is a sequence of analytic elements  $f_i(x)$  ( $i = 0, \dots, s$ ) such that  $f_i$  and  $f_{i+1}$  coincide on the intersection of their domains and with  $f_0 = f$  and  $f_s = f^*$ . Without proof the author states that  $f$  and  $f^*$  coincide on the intersection of their domains as soon as  $f \sim f^*$ . Thus if  $F$  is a class of equivalent analytic elements, one can uniquely define a function  $F(x)$  on the union of the domains of the elements belonging to  $F$ . Such a function is called uniform analytic.  $F(x)$  is said to be a totally uniform analytic continuation of each  $f \in F$ .

*J. Verhoeff.*

**Lammel, Ernesto:** Verallgemeinerungen der Theorie der Funktionen komplexer Variabler. 2 Sympos. Probl. mat. Latino América, Villavicencio-Mendoza 21—25 Julio 1954, 191—197 (1954) [Spanisch].

Verf. erhält mittels hyperkomplexer Methoden Polynomlösungen einiger homogener partieller Differentialgleichungen. Seine Ergebnisse sind mit Resultaten von Miles und Williamson [Canadian J. Math. **8**, 426—431 (1956)] und vom Referenten (dies. Zbl. **70**, 338) verbunden. Verf. behandelt kurz die zu diesen Differentialgleichungen gehörige Funktionentheorie und zitiert insbesondere das von ihm in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **45**, 360) bewiesene Analogon für den Riemannschen Abbildungssatz in der zu  $u''_{xx} - u''_{yy} = 0$  gehörigen Funktionentheorie.

*J. Horváth.*

**Martinelli, Enzo:** Teoremi integrali nella teoria delle funzioni di più variabili complesse. Rend. Sem. mat. fis. Milano **24**, 172—182 (1954).

Italianische Fassung einer früheren, in französischer Sprache geschriebenen Arbeit des Verfassers (vgl. dies. Zbl. **52**, 308).

*F. Sommer.*

**Mehring, Johannes:** Kernfunktion und Regularitätsgebiete im Raum von zwei komplexen Veränderlichen. Diss. math.-naturw. Fakultät Münster **4**, 5—7 (1954).

Referat über eine Dissertation, deren Hauptergebnisse in erweiterter Form in einer Arbeit von F. Sommer und H. Mehring (vgl. dies. Zbl. **70**, 303) niedergelegt sind.

*F. Sommer.*

**Stoll, Wilhelm:** Die beiden Hauptsätze der Wertverteilungstheorie bei Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. I. II. Acta math. **90**, 1—115 (1953); **92**, 55—169 (1954).

Die vorliegenden, sehr umfangreichen Arbeiten stellen eine Verallgemeinerung der Theorie der meromorphen Kurven [H. Weyl, J. Weyl, dies. Zbl. **19**, 172; J. Weyl, Ann. of Math., II. Ser. **42**, 371—408 (1941); Ahlfors, Acta Soc. Sci. Fennicae, n. Ser. A **3**, Nr. 4 (1941)] und der H. Kneserschen Erweiterung der Wertverteilungslehre (dies. Zbl. **16**, 126; **18**, 410) auf Funktionen auf der Hyperkugel dar. Verf. betrachtet meromorphe Abbildungen  $M^n \ni x \rightarrow w(x) = (w_1(x), \dots, w_k(x)) \in P^{k-1}$  der komplexen Mannigfaltigkeit  $M^n$  in den komplexen projektiven Raum der Dimension  $k-1$ . Da  $w_1(x), \dots, w_k(x)$  nicht als teilerfremd und holomorph vorausgesetzt werden können, erklärt Verf. als meromorphe Fläche  $W$  die Vorgabe 1. einer offenen Überdeckung  $\mathcal{U}$  von  $M^{2n}$ , 2. einer meromorphen Abbildung  $w(x)$  für jedes  $U \in \mathcal{U}$  mit  $w_{\alpha_1}(x) = \lambda(x) w_{\alpha_2}(x)$  in  $U_1 \cap U_2$ , wobei  $\lambda(x) \not\equiv 0$  und meromorph in  $U_1 \cap U_2$  sei.  $*P^{k-1}$  sei der zu  $P^{k-1}$  duale Raum,  $(w, *a)$  das (vom Koordinatensystem unabhängige) innere Produkt von  $w \in P^{k-1}$  und  $*a \in *P^{k-1}$ . Ist  $w(x)$  reduziert, d. h. der g. g. T. von  $w_1(x), \dots, w_k(x)$  gleich 1, so sei  $\mathfrak{N}(*a)$  der Träger des Divisors von  $(w(x), *a)$  und  $v(x_0, *a)$  die Ordnung von  $(w(x), *a)$  in  $x_0$ . Nun sei  $\omega(x)$  eine auf  $M^n$  geschlossene Differentialform vom Doppelgrad  $(n-1, n-1)$ , deren zugeordnete quadratische Form mit  $(-i)^{n-1}$  multipliziert positiv definit

und hermitesch ist. Ist  $M^n$  eine Kählersche Mannigfaltigkeit mit der Fundamentalform  $\Omega$ , so erfüllt  $\omega = A^{n-1} \Omega$  diese Forderungen. Ist  $d = d_1 + d_2$  die kanonische Zerlegung der Ableitung und  $d^\perp = i(d_1 - d_2)$ , so sei unter  $\psi_G$  diejenige auf  $\bar{G} - g$  stetige Funktion mit  $(d d^\perp \psi) \wedge \omega = 0$  in  $\bar{G} - g$  ( $G$  und  $g$  offen, relativ kompakt und  $g \subset G$ ) verstanden, für welche  $\psi_G = 0$  auf  $\bar{G} - G$ ,  $\psi_G = R(G) = \text{const}$  auf  $\bar{g} - g$  und  $\int_{\text{Rd } g} d^\perp \psi_G \wedge \omega = 2\pi$  ist. Mit

$G_t = \{x: \psi_G(x) > R - t\}$  und  $n(G_t, *a) = \int_{\mathfrak{N}(*a) \cap G_t} \nu(x, *a) \omega(x)$  sei

$$N(G, *a) = \int_0^{R(G)} n(G_t, *a) dt = \int_{\mathfrak{N}(*a)} \psi_G(x) \nu(x, *a) \omega(x)$$

die Anzahlfunktion und

$$m(\text{Rd } G_t, *a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{Rd } G_t} \log \frac{|\text{iv}(x)|}{|\langle \text{iv}(x), *a \rangle|} d^\perp \psi_G(x) \wedge \omega(x)$$

die Schmiegefunktion. Dann gilt

$$T(G) = N(G, *a) + m(\text{Rd } G, *a) - m(\text{Rd } g, *a)$$

unabhängig von  $*a$ . Nach bekanntem Vorbild werden  $T(G)$  und der Flächeninhalt des über  $G_t$  liegenden Teiles der meromorphen Fläche zueinander in Beziehung gesetzt. Bezüglich weiterer Aussagen, die sich um den 1. Hauptsatz gruppieren, sei auf die Arbeit selbst verwiesen. Der zweite Teil der Arbeit befaßt sich mit dem 2. Hauptsatz. Es sei  $\beta(x)$  eine auf  $M^n$  holomorphe Differentialform vom Doppelgrad  $(n-1, 0)$ . Mit Hilfe der „Ableitungen“  $f^{(v)}(x)$  einer auf  $M^n$  meromorphen Funktionen, definiert durch

$$df \wedge \beta = f' dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n, \quad f^{(v)} = (f^{(v-1)})',$$

kommt man zu den assoziierten Flächen  $W^p$ , die beim Beweis des 2. Hauptsatzes eine wesentliche Rolle spielen. Zu diesem gelangt Verf. über die sog. Differenzenformel. Der zweite Hauptsatz lautet dann im wesentlichen: ist für fast alle  $G$   $\eta(G) \leq \varepsilon T(G)$ , wobei  $\eta(G)$  ein Maß für  $\{x: d\psi(x) = 0\}$ ,

$$\log [\{\sup R(G)\} - R(G)]^{-1} \leq \varepsilon T(G)$$

und sind je  $k$  der Vektoren  $*a_1, \dots, *a_q$  linear unabhängig, so ist für fast alle  $G$

$$\sum_{v=1}^q m(\text{Rd } G, *a_v) \leq (k + \varepsilon) T(G).$$

Daraus entspringen sofort die bekannten Defektrelationen und weitere im Spezialfall  $n=1$  bekannte Sätze. — Bezüglich Einzelheiten wie Voraussetzungen zu den angegebenen Aussagen sei auf die Arbeit selbst verwiesen.

H. Röhrl.

**Berezin, F. A. und I. I. Pjateckij-Šapiro: Homogene Erweiterungen des komplexen Raumes.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 99, 889–892 (1954) [Russisch].

Die kompakte komplexe Mannigfaltigkeit  $M$  wird Erweiterung des komplexen affinen Raumes  $C$  genannt, wenn eine analytische Abbildung  $f$  von  $C$  in  $M$  mit folgenden Eigenschaften existiert: 1. Die Abbildung von  $C$  auf  $f(C)$  ist umkehrbar eindeutig. 2.  $f(C)$  ist überall dicht in  $M$ . — Die kompakte komplexe Mannigfaltigkeit  $M$  heiße homogen, wenn die Gruppe ihrer analytischen Homöomorphismen transitiv ist. Behauptet wird, daß die homogenen Erweiterungen  $E$  des komplexen affinen Raumes sich auch durch jede der folgenden drei Eigenschaften charakterisieren lassen. (I)  $E$  ist eine homogene einfach zusammenhängende algebraische Mannigfaltigkeit. (II)  $E$  ist eine homogene komplexe Mannigfaltigkeit, derart daß der Körper der auf  $E$  meromorphen Funktionen isomorph ist zum Körper der rationalen Funktionen, dessen Dimension gleich der (komplexen) Dimension von  $E$  ist. (III)  $E$  ist der Raum der Klassen einer komplexen halbeinfachen Gruppe  $G$  modulo einer komplexen Untergruppe, welche die maximale auflösbare Untergruppe von  $G$  enthält. Die Beweise der Äquivalenz der Definition mit den Eigenschaften I und II scheinen dem Ref. nicht ausreichend zu sein.

W. Thimm.

### Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

• Centro Internazionale Matematico Estivo (C. I. M. E.): Equazioni differenziali non lineari. (3<sup>o</sup> Cielo-Varenna, Villa Monastero, 15–24 settembre 1954. Roma: Istituto Matematico dell'Università 1954. 7 nr.

Die Arbeiten werden in diesem Zbl. einzeln angezeigt.



• **Legras, J.:** Résolution pratique des équations différentielles. Paris: Dunod 1954. VIII, 114 p. Broché 880 f.

Das für Ingenieure geschriebene Bandchen behandelt die wichtigsten Methoden zur Lösung von Anfangswertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungen, und zwar weniger unter allgemeinen Gesichtspunkten als durch Beschreibung der Verfahren an Hand von Beispielen. Aus dem Inhalt: Wiederholung der Grundtatsachen über Matrizenkalkül, Laplace-Transformation und Fourier-Reihen. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten; Stabilitätsfragen und Gewinnung periodischer Lösungen bei periodischer rechter Seite. Allgemeine lineare Differentialgleichungen; Poincarésche Reihenentwicklung bei quasi-linearen Differentialgleichungen sowie deren Lighthillsche Verallgemeinerung. Exakt integrierbare Typen, Isoklinenmethode und Runge-Kutta-Methode. *H. Witting.*

**Okiljević, Blažo:** Contribution à la théorie de S. Lie sur les transformations infinitésimales pour l'intégration des équations différentielles ordinaires. Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 6, 185–197 u. französ. Zusammenfassg. 198 (1954) [Serbisch].

Après avoir constaté les deux méthodes différentes de S. Lie pour définir les transformations infinitésimales, l'A. applique la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles de Charpit à l'étude des transformations considérées des équations différentielles ordinaires du second ordre. De cette manière est établie la forme générale d'équations admettant la transformation infinitésimale conforme,  $V(f) = a x \xi f / \xi x + b y \eta f / \eta y$ , prolongée, à savoir:  $y'' = x^{b/a-1} P(y^a/x^b, y'/x^{b-a})$ ,  $P$  désignant une fonction arbitraire des arguments qu'elle implique. Dans le cas d'une équation différentielle ordinaire d'ordre  $n$ , cette dernière, pour admettre la transformation considérée, prolongée  $n$  fois, admet la forme suivante:

$$y^{(n)} = x^{b/a-n} P\{y^a/x^b, y'^a/x^{b-a}, y''^a/x^{b-2a}, \dots, [y^{(n-1)}]^a/x^{b-(n-1)a}\}$$

la fonction  $P$  étant arbitraire par rapport aux arguments qui y figurent. Résolvant la problème analogue pour les transformations infinitésimales projectives d'un système des deux équations du premier ordre,  $V(f) = a x \partial f / \partial x + b_1 y_1 \partial f / \partial y_1 + b_2 y_2 \partial f / \partial y_2$ , celui-ci admet la forme suivante:  $y_i' = x^{b_i/a-1} P_i(y_1^a/x^{b_1}, y_2^a/x^{b_2})$ , ( $i = 1, 2$ ),  $P_1$  et  $P_2$  étant des fonctions arbitraires des arguments qui y figurent. Dans le cas d'un système des  $n$  équations différentielles ordinaires du premier ordre, pour admettre une transformation infinitésimale projective,

$$V(f) = a x \partial f / \partial x + b_1 y_1 \partial f / \partial y_1 + b_2 y_2 \partial f / \partial y_2 + \dots + b_n y_n \partial f / \partial y_n,$$

le système en question se présente sous la forme suivante:

$$y_i' = x^{b_i/a-1} P_i(y_1^a/x^{b_1}, y_2^a/x^{b_2}, \dots, y_n^a/x^{b_n}).$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ ), les  $n$  fonctions  $P_i$  étant arbitraires par rapport aux arguments qui y figurent. Les résultats obtenus représentent une extension immédiate des recherches de S. Lie et de W. Stekloff concernant une équation différentielle ordinaire du premier ordre généralisant celle qui est homogène de la forme classique. Pour intégrer les équations obtenues l'A. applique la méthode de N. Saltykow d'intégration moyennant la théorie des invariants différentiels. *N. Saltykow.*

**Agostinelli, Cataldo:** Su i sistemi canonici che ammettono particolari classi di soluzioni stazionarie. Atti Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. fis. math. natur. 88, 121–126 (1954).

Verf. findet die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, daß  $m$  Koordinaten  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) eines kanonischen Systems des  $2n$ -dimensionalen Phasenraumes ( $n > m$ ) stationär bleiben. Sind diese Bedingungen erfüllt, so reduziert sich die Anzahl der Unbekannten des betrachteten Systems auf  $2n - 2m$ .

*V. Válcovic.*

**Petrescu, Șt.:** Sur les invariants de l'équation différentielle du troisième ordre. I. Acad. Republ. popul. Române, Fil. Iași, Studii Cerc. ști. 2, 35–60, russ. und französ. Zusammenfassg. 60–63, 63–65 (1951) [Rumänisch].

L'A. cherche les invariants de l'équation différentielle  $y''' = F(x, y, y', y'')$  vis-à-vis du groupe ponctuel  $\bar{x} = \bar{x}(x)$ ,  $\bar{y} = \lambda(x)y + \mu(x)$ . En employant les notations de G. Vrănceanu (v. Leçons de Géométrie Différentielle I, Bucarest 1957), il trouve en général quatre formes de Pfaff invariants associées à l'équation et les invariants cherchés sont les invariants de ces quatre formes. Il y a sept cas d'exception, que l'A. détermine, mais qu'il n'étudie pas en détail.

M. Haimovici.

Viktorovskij, E. E.: Über eine Verallgemeinerung des Begriffs der Integralkurven für ein unstetiges Richtungsfeld. Mat. Sbornik, n. Ser. 34 (76), 213—248 (1954) [Russisch].

Eine ausführliche, alle erforderlichen Beweise bringende Darstellung der Ergebnisse des Verf., über die er in der Arbeit mit gleichem Titel (dies. Zbl. 52, 316) eine kurze Übersicht gegeben hat. Es handelt sich um die Existenz und Mannigfaltigkeit von in gewissem Sinn verallgemeinerten Lösungen  $u_i(x)$  eines Systems von Differentialgleichungen  $y'_i(x) = f_i(x, y)$  ( $y$  steht für  $y_1(x), \dots, y_n(x)$ ),  $i = 1, \dots, n$ ,  $(x, y) \in G$ , mit gegebenen Anfangswerten unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über die Funktionen  $f_i$ . Nähere Angaben s. im Referat über die angegebene Arbeit. Die Existenz einer verallgemeinerten Lösung  $u_i(x)$  im Intervall  $X = [x_0, x_0 + \alpha]$  mit den Anfangswerten  $u_i(x_0) = y_{i0}$ ,  $(x_0, y_{i0}) \in G$ , wird durch eine Konstruktionsmethode, die sich weitgehend der Hilfsmittel der Mengenlehre und Maßtheorie bedient, bewiesen. Für eine Folge von Zerlegungen  $R^m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , des Intervalles  $X$  in Teilintervalle  $I_k^m = [x_{k-1}^m, x_k^m]$ ,  $k = 1, \dots, k_m$ , deren Längen gleichmäßig nach Null streben, wird mit Hilfe von in  $G$  meßbaren positiven Funktionen  $p_i(x, y)$  und nichtnegativen Zahlen  $\underline{l}_i^{mk}$  und  $\bar{l}_i^{mk}$ , für die  $\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{i, k} \{\underline{l}_i^{mk}, \bar{l}_i^{mk}\} = 0$  ist, ein

System von Funktionen  $\varrho_i^m(x)$  konstruiert:

$$\varrho_i^m(x_0) = 0, \quad \varrho_i^m(x) = \int_{\mathfrak{G}^m(x)} f_i(x, y) p_i(x, y) dy \bigg/ \int_{\mathfrak{G}^m(x)} p_i(x, y) dy \quad \text{für } x_0 < x \leq x_0 + \alpha$$

mit

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}^m(x) &= E_y \left[ y \in P; -\underline{l}_i^{mk} - \int_{x_{k-1}^m}^x M(x) dx \right. \\ &\quad \left. \leq y_i - y_{i0} - \int_{x_0}^{x_{k-1}^m} \varrho_i^m(x) dx \leq \bar{l}_i^{mk} + \int_{x_{k-1}^m}^x M(x) dx \right] \quad \text{für } x \in I_k^m, \\ M(x) &= \max_i \left\{ \text{vrai max}_{y \in G(x)} |f(x, y)| \right\} + \gamma \quad \text{mit beliebigem festen } \gamma > 0, \end{aligned}$$

deren Summierbarkeit aus dem Fubinischen Satz gefolgert wird. Die Folge der gleichmäßig beschränkten und gleichgradig stetigen Funktionen  $\left\{ y_{i0} + \int_{x_0}^x \varrho_i^m(x) dx \right\}$  konvergiert bei  $m \rightarrow \infty$  auf Grund des Arzelàschen Satzes für alle  $i$  gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion  $u_i(x)$ , die alle erforderlichen Eigenschaften besitzt. Die Gesamtheit  $\{u_i(x)\}$  bildet eine verallgemeinerte Lösung. Andererseits läßt sich jede verallgemeinerte Lösung durch diesen Prozeß bei geeigneter Wahl der Zerlegungsfolge  $R^m$ , der Funktionen  $p_i$  und der Zahlen  $\underline{l}_i^{mk}$  und  $\bar{l}_i^{mk}$  gewinnen. Wendet man diese Methode auf ein Gleichungssystem an, das den Carathéodoryschen Bedingungen genügt, so erhält man einen im Vergleich zu Carathéodory weit kürzeren Beweis des Existenzsatzes, der auch angeführt wird. Wählt man im Falle einer Gleichung ( $n = 1$ ) alle Zahlen  $\underline{l}_i^{mk} = \bar{l}_i^{mk} = 0$  und als Funktionenfolge  $\varrho_i^m(x)$  an Stelle der obigen die Folge  $R_i^m(x) = \text{vrai max}_{y \in \mathfrak{G}^m(x)} f(x, y)$  (vrai min), so liefert diese Methode die maximale (minimale) verallgemeinerte Lösung. Im Falle der Carathéodoryschen Bedingungen ergibt sich hierdurch eine konstruktive Methode zur Bestimmung der maximalen (minimalen) Lösung durch Annäherung von oben (unten). — Ferner wird



gezeigt, daß das Ausgangsgleichungssystem mit einem anderen gleichbedeutend ist, bei dem die rechten Seiten  $f_i(x, y)$  zuvor einem gewissen Mittelungsprozeß mit positiven Gewichtsfunktionen unterworfen sind. Daraus ergibt sich eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein Funktionensystem  $\{a_i(x)\}$  eine verallgemeinerte Lösung darstellt. Im Falle  $n = 1$  wird noch eine weitere derartige Bedingung bewiesen, nämlich daß für jedes Intervall  $I \subseteq G(x)$  ( $u(x) \in I$ ) und jedes  $\varepsilon > 0$  die Ungleichung gilt:  $\text{mes}_y E[y \in I; |u'(x) - f(x, y)| < \varepsilon] > 0$  oder gleichzeitig  $\text{mes}_y E[y \in I; f(x, y) > u'(x)] > 0$  und  $\text{mes}_y E[y \in I; f(x, y) < u'(x)] > 0$ .

Ferner wird auf einen Zusammenhang der vorliegenden Theorie mit der Theorie der Lösung von Differentialgleichungen „in Kontingenzen“ von Zaremba und Marchaud (dies. Zbl. 9, 397; 14, 157 bzw. 10, 258; 13, 263) hingewiesen. Es folgen die Beweise der Tatsache, daß sich verschiedene topologische Eigenschaften der Integralkurven von Differentialgleichungssystemen auf die verallgemeinerten Integralkurven übertragen lassen. Diese Eigenschaften sind in dem oben erwähnten Referat aufgezählt. Darüber hinaus wird gezeigt, daß die grundlegenden Eigenschaften verallgemeinerter dynamischer Systeme ohne Voraussetzung der Einzigkeit (s. Minkvič, dies. Zbl. 37, 358) sich unmittelbar auf Systeme der Abbildungen übertragen lassen, die durch die verallgemeinerten Integralkurven geliefert werden. — Den Abschluß bilden nähere Angaben darüber, daß sich die Methode auch auf nicht-lineare Integralgleichungen vom Volterraschen Typus anwenden läßt unter Bedingungen, die ebenfalls in jenem Referat angegeben sind. *E. Svenson.*

**Gagliardo, Emilio:** Un'osservazione sui criteri di unicità per gli integrali di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 23, 214—223 (1954).

L'A. osserva come, con riferimento ad opportune classi di soluzioni, si possano dare dei nuovi criteri di unicità per il problema di Cauchy relativo all'equazione  $y' = f(x, y)$ , i quali non sussistono quando le soluzioni sono intese nel senso di Carathéodory. All'uopo, detta soluzione di tipo  $D$  (risp. di tipo  $A$ ) dell'equazione differenziale suddetta ogni funzione  $y(x)$  dotata in ogni punto di numeri derivati destri finiti per la quale risulti quasi ovunque  $y'(x) = f(x, y(x))$  [risp. continua e dotata in ogni punto di derivata destra, per la quale risulti ovunque  $D^+y(x) = f(x, y(x))$ ], dimostra il teorema: Sia  $f(x, y)$  una funzione reale definita nel rettangolo  $R: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ , ivi soddisfacente alla relazione  $f(x, y) \leq g(x)$  con  $g$  sommabile in  $[a, b]$ . Per ogni punto  $t$  dell'intervallo  $[a, b]$  si possano trovare un punto  $t > t$  e una funzione  $h$  misurabile in  $[t, t]$  e sommabile in ogni intervallo  $[t + \delta, t]$  con  $\delta > 0$ , tali che risulti:

$$\min_{\delta \rightarrow 0+} \lim_{t \rightarrow \delta} \int_{t+\delta}^t \left[ h(x) - \frac{1}{x-t} \right] dx = -\infty \quad (\text{risp. } \neq +\infty)$$

e si abbia:  $f(x, y_1) - f(x, y_2) \leq h(x)(y_1 - y_2)$  per quasi tutti i punti  $x$  di  $[t, t]$  e per  $y_1 > y_2$ . Allora le eventuali soluzioni di tipo  $D$  (risp. di tipo  $A$ ) dell'equazione  $y' = f(x, y)$  sono, a destra del punto iniziale, univocamente determinate dal valore iniziale. L'A. dà inoltre due criteri di unicità per il problema di Cauchy relativo all'equazione differenziale presa in esame, con riferimento ad altre due classi distinte di soluzioni. *F. Cafiero.*

**Sarantopoulos, Spyridon:** Sur l'existence des intégrales holomorphes des équations différentielles du premier ordre dans le cas singulier. Sur la formule (21). Bull. Soc. math. Grèce 29, 1—24 (1954).

L'A. completa una precedente ricerca (questo Zbl. 56, 369) e dimostra successivamente che data l'equazione differenziale

$$x^{\mu+1} dy/dx = \alpha y + x \varphi(x) + \delta x^\mu y$$

con  $\mu$  intero,  $\mu \geq 1$ ,  $\varphi(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots$  olomorfa in un intorno di  $x=0$ , supposto che  $\delta$  non sia intero positivo, allora condizione necessaria e sufficiente perchè questa possieda un integrale  $y(x)$  olomorfo in un di  $x=0$  con  $y(0)=0$ , è che risulti  $\Phi_\nu(\alpha)=0$ , ( $\nu=0, 1, \dots, \mu-1$ ) essendo la trascendente intera  $\Phi_\nu(x)$ , definita della relazione

$$\Phi_\nu(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \beta_{\mu\lambda+\nu} x^\lambda / (\nu+1-\delta)(\nu+1+\mu-\delta) \dots (\nu+1+\mu(\lambda-1)-\delta).$$

Se poi  $\delta$  è un numero intero positivo,  $\delta = h+1+\mu(l-1)$  alla condizione  $\Phi_h(\alpha)=0$  deve invece sostituirsi l'altra  $\varphi_h(x)=0$ , dove

$$\varphi_h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{\mu(l+k)+h} x^k / k! \mu^k.$$

Tanto nell'uno che nell'altro caso il raggio di convergenza di  $y(x)$  non è inferiore al raggio di convergenza di  $\varphi(x)$ . *G. Sansone.*

**Wintner, A.:** On the bound of regularity of the solutions of analytic differential equations of first order. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 5, 145—149 (1954).

In  $|z| < a$ ,  $|w| < b$ ,  $a > b/M$ , sei  $f(z, w)$  regulär analytisch und vom Betrag  $\leq M$ . Nach der Methode der schrittweisen Näherung folgt, daß die Lösung  $w(z)$ ,  $w(0)=0$ , der Differentialgleichung  $w' = f(z, w)$  in  $|z| < b/M$  eindeutig regulär analytisch ist und die Eigenschaft  $|w(z)| < b$  hat. Verf. zeigt: a) Es gibt ein  $\varepsilon = \varepsilon(f)$  derart, daß  $w(z)$  in  $|z| < (1+\varepsilon)b/M$  regulär analytisch ist. b) Für hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  gilt entweder  $|w(z)| < b$  in  $|z| < (1+\varepsilon)b/M$  oder  $w(z) \equiv cz$ ,  $|c| = |f(0, 0)|$ , also  $\sup_{|z| < b/M} |w(z)| < b$ , falls  $w(z) \not\equiv cz$ . Das  $\varepsilon(f)$  in a) kann durch keine absolute Konstante  $\varepsilon^*$  ersetzt werden, weil stets Lösungen angegeben werden können, die für  $\varepsilon^* > 0$  in  $|z| < (1+\varepsilon^*)b/M$  eine Singularität besitzen (Druckfehler bei diesen Beispielen; es muß heißen:  $f(0) = 1 \Big| \begin{smallmatrix} n_1 \\ 2 \end{smallmatrix} \Big|, c_n = n \Big| \begin{smallmatrix} n_1 \\ 2 \end{smallmatrix} \Big|$ ).

*H. Wittich.*

**Sugiyama, Shohei:** Note on singularities of differential equations. Kōdai math. Sem. Reports 1954, 81—84 (1954).

In der Differentialgleichung  $dz/dt = \dot{z} = f(z, \bar{z})$ ,  $z = x + iy$  und  $f(0, 0) = 0$ , soll  $f$  in einer Umgebung von  $(0, 0)$  eindeutig regulär analytisch sein. Nach einfachen Bemerkungen über den Index der Stelle  $z=0$  betrachtet Verf. die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen an der Stelle  $z=0$ :  $\dot{z} = az + b\bar{z}$ ,  $\dot{z} = z^2$ ,  $\dot{z} = z^3$  und  $\dot{z} = z^n$ ,  $\dot{z} = \bar{z}^n$ ,  $n$  positiv ganz.

*H. Wittich.*

**Gubař, N. A.:** Charakterisierung zusammengesetzter singulärer Punkte eines Systems von zwei Differentialgleichungen mit Hilfe grober singulärer Punkte benachbarter Systeme. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 95, 435—438 (1954) [Russisch].

Es handelt sich um mehrfach singuläre Punkte des dynamischen Systems  $\frac{dx}{dt} = P(x, y)$ ,  $\frac{dy}{dt} = Q(x, y)$   $P, Q$ ; analytisch.  $\text{Rg} \begin{pmatrix} P_x & P_y \\ Q_x & Q_y \end{pmatrix} = 1$ . *Adam Schmidt.*

**Ura, Taro et Yoshikazu Hirasawa:** Sur les points singuliers des équations différentielles admettant un invariant intégral. Proc. Japan Acad. 30, 726—730 (1954).

Si l'équation  $X(x, y) dx + Y(x, y) dy$  admet  $(0, 0)$  comme point singulier isolé et admet un invariant intégral positif, alors le point  $(0, 0)$  est soit un centre (c. à d. les trajectoires voisines de  $0, 0$  sont fermées) soit un col généralisé (c. à d. qu'il n'y a qu'un nombre fini de lignes intégrales tendant vers  $(0, 0)$ ). Les fonctions  $X, Y$  sont assujetties à vérifier les conditions usuelles de Lipschitz. *G. Reeb.*

**Kato, Tizuko:** Sur les points singuliers des équations différentielles ordinaires du premier ordre. I—III. Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 2, 13—17 (1951); 4, 36—39 (1953); 5, 1—4 (1954).

I. Let  $P(x, y)$  and  $Q(x, y)$  be coprime polynomials in  $y$  with coefficients regular



for  $|x| < 1$  set  $P_0(y) = P(0, y)$ ,  $Q_0(y) = Q(0, y)$  and let  $P_0^c(y)/Q_0^c(y) = P_0(y)/Q_0(y)$  with  $P_0^c(y)$  and  $Q_0^c(y)$  coprime. Let  $y(x)$  satisfy the differential equation  $x^{\sigma+1} y' = P(x, y) Q(x, y)$  with  $\sigma$  a positive integer. The object of this paper is to prove that, if no combination of residues of  $Q_0(y)/P_0(y)$  has a purely imaginary sum, then, as  $x \rightarrow 0^-$  either  $y(x)$  approaches a zero of  $P_0(y)$ , or there is a decreasing sequence  $x_n$  such that  $y(x_n)$  approaches a multiple zero of  $P_0^c(y)$ . —

II. Let  $P(x, y)$  and  $Q(x, y)$  be polynomials in  $y$  with coefficients regular in  $x$  for  $|x| < 1$ , and set  $P_0(y) = P(0, y)$  and  $Q_0(y) = Q(0, y)$ . Suppose that the equation  $Q_0(y) dy = P_0(y) dt$  has a solution  $\Phi(t)$  that is holomorphic in a horizontal strip in the  $t$ -plane and has a real period  $\omega$ . Sufficient conditions are given in order that certain solutions of the equation  $Q(x, y) x dy = P(x, y) dx$  be expressible as  $\sum p_k(c - \ln x) x^k$  where the coefficients  $p_k(c + t)$  are  $\omega$ -periodic in  $t$ ,  $p_0(c + t) = \Phi(c + t)$ , and the constant  $c$  is chosen so as to satisfy an initial condition. —

III. Let  $t_0 > 0$  be large in magnitude, let  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  be polynomials and let  $Q(x, 0) = 0$ . If the equation  $y dy dt = P(e^t, y)/Q(e^t, y)$  has a solution  $y(t)$  such that  $y(t_0 - m\omega) = 0$  for  $m = 0, 1, 2, \dots$  and some  $\omega > 0$  and, if  $y dy/dt = P(0, y)/Q(0, y)$  has a periodic solution  $\Phi(t, t_0)$  of real period  $\omega$  such that  $\Phi(t_0, t_0) = 0$ , then in a certain domain of the complex  $t$ -plane

$$y(t) = \Phi(t, t_0) \left[ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} p_j(t, t_0) e^{it} \right],$$

where the functions  $p_j$  have period  $\omega$  and the points  $t_0 - m\omega$  are algebraic critical points of the  $p_j$ .

F. A. Ficken (Math. Rev. 14, 274; 15, 126).

N. Levinson (Math. Rev. 16, 1023).

Beljutina, L. N.: Über Bedingungen für die Existenz eines Wirbelpunktes. Priklad. Mat. Mech. 18, 511 (1954) [Russisch].

Es werden für die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + A_{11}x^2 + A_{12}xy + A_{22}y^2}{y + B_{11}x^2 + B_{12}xy + B_{22}y^2}$$

Bedingungen der Existenz eines Wirbelpunktes im Ursprung angegeben, ausgedrückt durch die Koeffizienten der Gleichung, und zwar  $\alpha A - \beta B = 0$ ,

$[A_{11} \times B - (3 B_{11} - \alpha) \times A - (3 A_{22} + \beta) \beta A] (5 B + \alpha) - B_{22} \beta A (5 A + \beta) = 0$ ,  
 $[A_{11} \times B^2 - (3 B_{11} - \alpha) \times AB - (3 A_{22} + \beta) \beta AB - B_{22} \beta A^2] (A_{11}^2 + B_{22}^2 + A_{11}A + B_{22}B) = 0$  mit  $\alpha = -(A_{12} + 2 B_{11})$ ,  $\beta = -(B_{12} + 2 A_{22})$ ,  $A = A_{11} + A_{22}$ ,  
 $B = B_{11} - B_{22}$ . Diese Bedingungen werden erhalten durch eine Transformation der Gleichung mittels einer Drehung des Koordinatensystems  $x, y$  um den Ursprung um den Winkel  $q = \arctg[(A_{11} - A_{22})/(B_{11} + B_{22})]$  und Anwendung von Ergebnissen von Kapteyn [Akad. Amsterdam Versl. 19, 1446—1457 (1911) und 21, 27—33 (1912)], Dulac [Bull. Sci. math. II. Sér. 32, 230—252 (1908)] und Bautin (dies. Zbl. 23, 36) auf die transformierte Gleichung. Das jeweilige Verschwinden eines dieser Ausdrücke erschöpft alle Möglichkeiten der Existenz eines Wirbelpunktes.

E. Svenson.

Matsumura, Soji: On the solutions of some differential equations. J. Osaka Inst. Sci. Technol., Part. I 5/6, 51—53 (1954).

Massera, J. L.: Théorie de la stabilité. C. I. M. E., Equazioni differenziali non lineari. 66 p. (1954).

Ausarbeitung einer Vorlesung über die zweite Methode von Ljapunov und die Stabilität bei linearen Systemen sowie die Stabilität nach der ersten Näherung, und zwar bis zum neuesten Stand der Forschung. Die vom Verf. erzielten Ergebnisse sind in der Arbeit dies. Zbl. 70, 310 zusammengestellt.

W. Hahn.

Kamenkov, G. V. und A. A. Lebedev: Bemerkungen zu der Arbeit über die Stabilität in einem endlichen Zeitintervall. Priklad. Mat. Mech. 18, 512 (1954) [Russisch].

Vgl. dies. Zbl. 55, 321.

**Duijvestijn, A. J. W.:** Einige Aspekte eines Typs von Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1954—011, 13 S. (1954) [Holländisch].

Etude des intégrales de l'équation  $y'' + \varphi(x) y = 0$ , avec  $\varphi(x) = \sum_0^m \beta_k x^{-k}$  (cette équation résulte de celle de Schrödinger dans le passage en coordonnées polaires). L'A. examine le comportement de ces intégrales au voisinage de l'origine et à l'infini, en ce qui concerne notamment leur amplitude  $A(x)$  et leur phase  $P(x)$  définies par  $y = C \cdot A(x) \exp i P(x)$ . Pour quelques choix particuliers des  $\beta_k$ , l'A. obtient exactement le premier terme du développement asymptotique.

*Ch. Blanc.*

**Lidskij, V. B.:** Über die Anzahl der im Quadrat integrierbaren Lösungen des Differentialgleichungssystems  $-y'' + P(t) y = \lambda y$ . Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **95**, 217—220 (1954) [Russisch].

L'A. étudie le nombre des solutions linéairement distinctes du système considéré des équations linéaires au paramètre  $\lambda$  complexe, la variable  $t$  étant réelle, telles que

l'on ait  $\int_0^\infty \sum_{s=1}^n y_s(t) \bar{y}_s(t) dt < \infty$ ,  $0 \leq t \leq \infty$ . Généralisant le théorème de

D. B. Sears (ce Zbl. **54**, 42), démontré dans le cas d'une équation, l'A. donne, pour le système des  $k$  équations, deux théorèmes: — I. Supposons  $(P(t)h, h) \geq -q(t)(h, h)$  où l'on a la fonction continue  $q(t) > \delta \geq 0$  et  $\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{q(t)}} = \infty$ ,  $(g, h)$  désignant le produit scalaire des deux vecteurs  $g$  et  $h$ .

Si la fonction  $q(t)$  vérifie l'une des conditions: 1.  $q(t)$  représente une fonction monotone, ou 2.  $q(t)$  étant différentiable,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|q'(t)|}{q^{3/2}(t)} < \infty$ : alors le système des  $k$  équations considérées, pour chaque valeur de  $\lambda$ , admet précisément  $k$  racines requises. — II. Les éléments de la matrice  $P(t)$  étant différentiables, supposons que l'on ait pour chaque vecteur constant  $h$  et pour toutes les valeurs  $t > a$ ,

$$(P(t)h, h) < 0; (P'(t)h, h) \leq \frac{2+\varepsilon}{t}(P(t)h, h), (\varepsilon > 0);$$

alors toutes les racines du système considéré vérifient les conditions requises.

*N. Saltykow.*

**Hale, Jack K.:** On boundedness of the solutions of linear differential systems with periodic coefficients. Rivista Mat. Univ. Parma **5**, 137—167 (1954).

In (1)  $y_k'' + \sigma_k(\lambda)^2 y_k + \lambda \sum_{i=1}^n \varphi_{ki}(x, \lambda) y_i = 0$  ( $-\infty < x < +\infty$ ,  $k = 1, \dots, n$ )

seien die  $\sigma_k$  verschiedene reelle positive Zahlen,  $\lambda$  ein reeller Parameter, die Funktionen  $\varphi_{ki}(x)$  reell und mod  $T = 2\pi/\omega$  periodisch, außerdem in  $(0, T)$   $L$ -integral. Gilt  $\varphi_{ki}(x) = \varphi_{ki}(-x)$  oder  $\varphi_{ki}(x) = \varphi_{ik}(x)$ , und ist  $m\omega \neq \sigma_k \pm \sigma_i$  ( $m = 1, 2, \dots$ ), dann ist für hinreichend kleine  $|\lambda|$  die absolut konvergente Lösung von (1) beschränkt. — Während Ref. (dies. Zbl. **48**, 70) nur für  $\varphi_{ki}(x) = \varphi_{ki}(-x)$ , nicht aber für  $\varphi_{ki}(x) = \varphi_{ik}(x)$  mit Hilfe des Floquetschen Theorems einen entsprechenden Satz bewies, hat Cesari (dies. Zbl. **25**, 326) diesen Satz bewiesen, indem er aber an Stelle der  $L$ -Integrabilität die Existenz absolut konvergenter Fourierreihen des  $\varphi_{ki}(x)$  voraussetzte. Der hier durchgeführte Beweis schließt sich an den Beweisgang von Cesari an.

*W. Haacke.*

**Gambill, Robert A.:** Stability criteria for linear differential systems with periodic coefficients. Rivista Mat. Univ. Parma **5**, 169—181 (1954).

Verf. gibt im Anschluß an die vorstehend besprochene Arbeit von Hale einige Verallgemeinerungen, die sich einerseits auf die Berücksichtigung geringer Dämpfung, andererseits auf die Abschwächung der Voraussetzungen für die  $\varphi_{ki}(x)$  beziehen.

*W. Haacke.*



**Cesari, Lamberto and Jack K. Hale:** Second order linear differential systems with periodic  $L$ -integrable coefficients. *Revista Mat. Univ. Parma* **5**, 55–61 (1954).

Für ein System von zwei Differentialgleichungen wird mit der Beweismethode der Volterraschen Integralgleichungen folgender Satz bewiesen: In (1)  $Y' = A Y + \Phi(x, \lambda) Y$  sei  $\lambda$  ein komplexer Parameter,  $\Phi(x, \lambda) [= (q_{ik}(x, \lambda)), i, k = 1, 2]$  eine komplexwertige Matrizenfunktion der reellen Veränderlichen  $x$ , in  $x \bmod T = 2\pi/\omega$  periodisch, in  $(0, T)$   $L$ -integrabel, für fast alle Werte von  $x$  in  $\lambda = 0$  stetig. Weiter sei  $\Phi(x, 0) = 0$  und  $|q_{ik}(x, \lambda)| \leq \omega(x)$  in  $(0, T)$  für alle  $|\lambda| \leq \lambda_0$ , wobei  $\omega(x)$  in  $(0, T)$   $L$ -integrabel sei. Die Eigenwerte von  $A$  seien  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$ . Dabei gelte  $\operatorname{Re}(\varrho_j) < 0$  oder  $\varrho_j = \pm i\sigma$  bei  $m\omega = 2\sigma$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) und  $\int_0^T (q_{11} + q_{22}) dx < 0$  für alle  $|\lambda| \leq \lambda_0$ . Dann ist die absolut konvergente Lösung  $Y$  von (1) in  $(0, +\infty)$  für hinreichend kleine  $|\lambda|$  beschränkt. Dieser Satz wird dann auf  $y'' + \psi(x, \lambda)y' + \varphi(x, \lambda)y + \sigma^2 y = 0$  modifiziert. W. Haacke.

**Hale, Jack K.:** Evaluations concerning products of exponential and periodic functions. *Revista Mat. Univ. Parma* **5**, 63–81 (1954).

The present paper is motivated by recent research on linear and nonlinear differential systems, precisely by the application of a casting out method of successive approximations developed by L. Cesari (this Zbl. **25**, 326), J. K. Hale (this Zbl. **58**, 78), R. A. Gambill and J. K. Hale (this Zbl. **71**, 303), and based on the following concept of mean value  $m\{f\}$ : if  $f(x) = e^{ax} q(x)$ , where  $a$  is a complex number, and  $q(x)$  a complex-valued periodic function of given period  $T$ ,  $L$ -integrable in  $[0, T]$ , whose Fourier series is  $q(x) \sim \sum c_n \exp(in\omega x)$ ,  $\omega = 2\pi/T$ , then let  $m\{f\} = c_n$  if  $a + in\omega = 0$  for some  $n$ ,  $m\{f\} = 0$  otherwise (L. Cesari, loc. cit.).

If  $C_\omega$  is the class of all functions (\*)  $f(x) = \sum_{j=0}^n \exp(a_j x) q_j(x)$  which are finite sums of products of exponential and periodic functions ( $T$  fixed), then  $m\{f\}$  can be defined as an additive functional. A function  $f(x) \in C_\omega$  has a primitive  $F(x) \in C_\omega$  if and only if  $m\{f\} = 0$ , and then there exists only one primitive  $F(x) \in C_\omega$  with  $m\{F\} = 0$  which is denoted by  $\int f(x) dx$ . In the present paper the author studies properties of the functions  $f \in C_\omega$  which are connected with the „Faltungsintegral“. Here are some of the main statements. I. If  $f \in C_\omega$  is given by (\*) and  $m\{f\} = 0$ ,  $m\{q_j\} = 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , then there exists a finite (non trivial) decomposition (\*\*)  $f = \sum_{s=1}^m f_s$ ,

$f_s \in C_\omega$ , such that  $\int f(x) dx = \sum_{s=1}^m \int_{\xi_s}^x f_s(x) dx$  for some numbers  $\xi_s$ ,  $0 \leq \xi_s < T$ ,  $s = 1, \dots, m$ , independent of  $x$ . Examples are given to show that  $m$  may be  $\neq n$ .

II. If  $f \in C_\omega$  is given by (\*) there are constants  $N(a_j, T)$  depending only on  $a_j$  and  $T$  such that  $|\int f(x) dx| \leq \sum_{j=1}^n N(a_j, T) \int_0^T |q_j(x)| dx$ . These statements are used

in the papers quoted above.

L. Cesari.

**Miroljubov, A. A.:** Lösung einer Klasse linearer Differenzen-Differentialgleichungen. *Mat. Sbornik, n. Ser.* **34(76)**, 357–384 (1954) [Russisch].

Eine Weiterführung der Arbeiten von Leont'ev über Differenzen-Differentialgleichungen [Mat. Sbornik., n. Ser. **24(66)**, 347–374 (1949), sowie Trudy Gorkovsk. gos. ped. Inst. (fis.-mat. Fak.) **14**, 3–30 (1951)]. Untersucht wird die Gleichung

$M[f(x)] = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^m (a_{pq} x + b_{pq}) f^{(p)}(x + h_q) = F(x)$  mit konstanten Koeffizienten ( $a_{nm} \neq 0$ ,  $a_{n0} \neq 0$ ) und reellen (ansteigend angeordneten) Differenzen  $h_q$ .  $F(x)$  ist in einem Gebiet  $G$  analytisch vorausgesetzt. Zugrunde gelegt wird der komplexe Bereich, und die Behandlung erfolgt durch rein funktionentheoretische

Methoden. Es wird eine vollständige Lösung angegeben durch Aufstellung einer partikulären Lösung der inhomogenen und der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung. — Durch die Integraltransformation

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_L f^*(x, z) F(z) dz$$

über einen einmal geknickten, sonst geradlinigen Integrationsweg  $L$  wird die Gleichung auf eine spezielle Gleichung derselben Art mit der rechten Seite  $1/(z - x)$  mit einem Hilfsparameter  $z$  zurückgeführt. Diese besitzt eine Lösung in Integralform

$$f^*(x, z) = \int_0^{\infty e^{i\psi}} \gamma(t, z) e^{tx} dt \quad \text{längs eines geeigneten Strahles } \arg t = \psi, \quad \text{wobei} \\ \gamma(t, z) \text{ eine partikuläre Lösung der gewöhnlichen linearen Gleichung} \\ - \frac{d}{dt} (\gamma(t, z) \theta(t)) + \gamma(t, z) \theta_1(t) = e^{-tz}$$

ist. Die hier auftretenden Funktionen  $\theta(t)$  und  $\theta_1(t)$  entstehen durch Bildung von  $M[e^{tx}]$ .  $\theta(t)$  wird die charakteristische Funktion des Differenzen-Differentialoperators  $M[f(x)]$  genannt. Ihre Nullstellen, die alle in einem vertikalen Streifen liegen, rufen die Singularitäten der im Verlauf der Rechnung auftretenden verschiedenen Hilfsfunktionen hervor. — Während so nur der Gedankengang der Lösungsmethode skizziert ist, bedarf sie einer präzisen Untermauerung bezüglich der verschiedenartig gestalteten Regularitätsgebiete der Hilfsfunktionen und der Lösung, die den Hauptinhalt der Arbeit bildet. Das geschieht mit Hilfe von Abschätzungen und funktionentheoretischen Kriterien sowie einer Reihe von funktionentheoretischen Hilfssätzen, insbesondere über das Verhalten der Funktion  $\gamma(t, z)$ . Aus zwei Lösungen, die jeweils in gewissen Teilgebieten der Ebene regulär sind, wird schließlich eine endgültige Lösung der Gleichung zusammengesetzt, die ihr innerhalb einer geschlossenen, ganz in  $G$  gelegenen Kurve  $S$  genügt und in der ganzen Ebene regulär ist mit Ausnahme zweier von  $S$  in verschiedenen Richtungen ausgehenden horizontalen Halbstreifen und zweier ebenfalls horizontaler Schnitte, deren Lage von den Parametern der Gleichung abhängt. — Ein zweiter Teil ist der Behandlung der homogenen Grundgleichung gewidmet ( $F(x) = 0$ ), durchgeführt mit gleichartigen Hilfsmitteln. Gesucht wird die allgemeine analytische Lösung  $f(x)$ , die längs einer horizontalen, abgeschlossenen Strecke der Länge  $h_m$  und damit in einem horizontalen Streifen regulär ist. Wieder wird  $f(x)$  aus zwei Lösungen  $f_1(x)$  und  $f_2(x)$  zusammengesetzt, die in gewissen Teilgebieten der Ebene regulär sind und deren Wachstum längs eines beliebigen, zur reellen Achse nicht parallelen Strahles (mit einem Ausgangspunkt, der das eine Mal in einer gewissen linken, das andere Mal rechten Halbebene liegt) abgeschätzt werden kann: sie haben dort exponentiellen Charakter. Dank dieser Feststellung läßt sich auf jede dieser beiden Funktionen eine Laplace-Transformation mit einem Integrationsweg längs eines solchen Strahles ausüben und auf diese Art und Weise eine Zurückführung von  $f_1(x)$  und  $f_2(x)$  auf die Leont'ev'schen Elementarlösungen  $y_j(x)$  der Gleichung, die den Nullstellen ihrer charakteristischen Funktion zugeordnet sind, vornehmen. Es wird gezeigt, daß diese Elementarlösungen eine vollständige Basis der Klasse der analytischen Lösungen der Gleichung bilden, d. h.  $f_1(x)$  und  $f_2(x)$  lassen sich darstellen in der Form  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_k} c_j y_j(x)$ , also als Grenzwerte gewisser Teilfolgen der Teilsummen der Reihe aller Elementarlösungen, während die Reihe  $\sum_{j=1}^{\infty} c_j y_j(x)$  selbst im allgemeinen divergiert, wofür Leont'ev Beispiele angibt. Hierbei weist Verf. nochmals auf einen von Leont'ev festgestellten Fehler bei Hilb [Math. Ann. 78, 137–170 (1918)] und Wright (dies. Zbl. 33, 120) hin. Diese Autoren stellen nämlich die allgemeine Lösung durch eine Reihe der Elementarlösungen dar. Ihre Ergebnisse werden aber erst korrekt, wenn



man bei der Grenzwertbildung nur eine geeignete Auswahl der Teilsummen der Reihe zuläßt.

*E. Svenson.*

**Reißig, Rolf:** Periodische Erregung eines einfachen Schwingers mit Flüssigkeitsdämpfung und Gleitreibung. *Forsch. Fortschr.* 28, 91—94 (1954).

Im Anschluß an frühere und im Zusammenhang mit weiteren Arbeiten (dies. Zbl. 56, 511, 58, 72, 66, 335) wird die Differentialgleichung  $x'' + 2Dx' + \mu \operatorname{sg} x' + x = \Phi(\eta\tau)$  einer periodisch erregten Schwingung eines Massenpunktes mit zäher und trockener Reibung untersucht. Der Punktbevægung wird eine Phasenbahn im Phasenraum  $x, y = x', z = \tau$  zugeordnet. Zu unterscheiden sind die beiden Fälle großer bzw. mäßiger Gleitreibung mit  $2\mu \geq M - m$  bzw.  $< M - m$ , wobei  $M = \operatorname{Max} \Phi$ ,  $m = \operatorname{Min} \Phi$ . Im ersten Falle strebt die Bewegung bei noch so großer Anfangsstörung zur Ruhe; im zweiten gegen eine eindeutige, vom Anfangszustand unabhängige periodische Bewegung. Ihre Periode ist gleich der der Erregung, falls die Bewegung pausenlos, ohne Stillstände verläuft, dagegen möglicherweise ein Bruchteil der Erregerperiode, falls die Bewegung durch Stillstände unterbrochen wird.

*R. Zurmühl.*

**Graffi, Dario:** Questioni varie sulle oscillazioni non lineari. *C. I. M. E., Equazioni differenziali non lineari.* 30 p. (1954).

Nach einer allgemeinen Übersicht über verschiedene Formen der Differentialgleichungen von nichtlinearen Schwingungen und ihren Zusammenhang mit physikalischen Problemen wird ein Existenzbeweis für periodische Lösungen der „verallgemeinerten Liénard-Gleichung“  $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + q(x) = p(t)$  gegeben. Durch Integration über eine Periode werden für eine homogene Gleichung Mittelwertsätze abgeleitet, deren Anwendung zur Abschätzung der Schwingungszeiten von nichtlinearen gedämpften Schwingungen gezeigt wird. Bei inhomogenen Gleichungen können die Mittelwertsätze zur Abschätzung der Schwingungsamplituden verwendet werden.

*K. Magnus.*

**Barbălat, I.:** Une propriété globale des trajectoires d'un système d'équations différentielles équivalent à l'équation des oscillations non linéaires de Liénard. *Acad. Republ. popul. Romine. Bul. şti. Sect. Şti. mat. fiz.* 6, 853—858, russ. u. französ. Zusammenfassg. 859—860 (1954) [Rumänisch].

Soit le système  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = -F(x)$ ,  $y = -\int_0^x f(\xi) d\xi$  avec les hypothèses suivantes: 1°  $f$  est continue pour tout  $x$ ; 2° il existe  $a > 0$ , tel que  $F(x) \leq 0$  pour  $0 < x < a$ ,  $F(x) > 0$  pour  $-a \leq x \leq 0$ ,  $F(a) = F(-a) = 0$ ,  $f(x) > 0$  pour  $x > a$  et il existe des points aussi voisins que l'on veut de 0 pour lesquels  $F(x) > 0$ ; 3° il existe  $b > 0$  tel que  $F(x)/x > 1$  pour  $|x| > b$ ;  $F(x)/x$  est croissante pour  $x > 0$  et décroissante pour  $x \leq 0$ . Le système admet un cycle limite, stable, unique et toute trajectoire tend vers le cycle limite.

*M. Haimovici.*

**Montaldo, Oscar:** Sul sistema di due equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine omogenee nelle derivate prime. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari* 24, 1—9 (1954).

L'A. étudie les systèmes  $\ddot{x} = \Phi_n(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ ,  $\ddot{y} = \Psi_n(x, y, \dot{x}, \dot{y})$  ( $n \geq 2$ ) où  $\Phi$  et  $\Psi$  sont des formes homogènes de degré  $n$  en  $\dot{x}$  et  $\dot{y}$  qui vérifient les cinq propriétés démontrées par E. Kasper dans le cas  $n = 0$ . Il en est ainsi si et seulement si  $\Phi_n = \varphi(x, y)\dot{x}^n$  et  $\Psi_n = \psi(x, y)\dot{x}^n + \frac{1}{2}n\varphi(x, y)\dot{x}^{n-1}\dot{y}$ .

*G. Reeb.*

**Conti, Roberto:** Studio di un sistema piano autonomo non lineare dipendente da un parametro. *C. I. M. E., Equazioni differenziali non lineari.* 4 p. (1954).

This is an abstract of a paper reviewed before (this Zbl. 56, 89). *M. M. Peicoto.*

**Halanay, A.:** Relativement à la méthode du petit paramètre. *Acad. Republ. popul. Romine. Bul. şti. Sect. Şti. mat. fiz.* 6, 483—486, russ. u. französ. Zusammenfassg. 486—487, 487—488 (1954) [Rumänisch].

Soit le système (1)  $dx/dt = X_0(x, y, t)$ ,  $dy/dt = Y_0(x, y, t)$ ,  $X_0(x, y, t + T) = X_0(x, y, t)$ ,  $Y_0(x, y, t + T) = Y_0(x, y, t)$ . Si (1) a une solution périodique asymptotiquement stable en grand, alors pour  $\mu$  suffisamment petit le système (2)  $dx/dt = X_0 + \mu X_1(x, y, t, \mu)$ ,  $dy/dt = Y_0 + \mu Y_1(x, y, t, \mu)$  avec  $X_1(x, y, t + T, \mu) = X_1(x, y, t, \mu)$ ,  $Y_1(x, y, t + T, \mu) = Y_1(x, y, t, \mu)$  a une solution périodique. Si  $X_0, Y_0$  dans (1) ne dépendent pas de  $t$  et ce système a un cycle limite, alors (2) admet une solution périodique au voisinage de ce cycle limite. Si le système  $dx/dt = X_0(x, t)$  a une solution périodique  $x = x_0(t)$  asymptotiquement stable et telle que le système correspondant du mouvement troublé ne dépende pas explicitement de  $t$ , pour  $\mu$  suffisamment petit, le système  $dx/dt = X_0(x, t) + \mu X_1(x, t, \mu)$  a une solution périodique. M. Haimovici.

**Villari, Gaetano:** Sul comportamento asintotico degli integrali di una classe di equazioni differenziali non lineari. *Rivista Mat. Univ. Parma* 5, 83—98 (1954).

In der nichtlinearen Differentialgleichung (1)  $x^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^n A_i(t) f_i[x^{(n-i)}(t)]$  seien die  $f_i(z)$  für  $z \geq z_0$  stetig,  $|f_i(z)| \leq h|z|^{p_i}$ ,  $A_i(t)$  für  $t \geq t_0$  stetig,  $|A_i(t)| \leq h t^{-(n+p_i(i-1)+\lambda_i)}$  bei reellen positiven Konstanten  $h, p_i, \lambda_i$ . Dann existieren Konstanten  $c_1, \dots, c_n$  so, daß  $x(t) = \sum_{i=1}^n \frac{t^{n-i}}{(n-i)!} u_i(t)$  eine Lösung von (1) ist, wobei  $\lim_{t \rightarrow \infty} u_i(t) = c_i$  gilt. — Als Spezialfälle werden Sätze formuliert für  $c_1 = \dots = c_{n-1} = 0$ , für  $A_1(t) = \dots = A_{n-1}(t) = 0$  sowie für den Fall, daß die  $f_i(z)$  einer Lipschitzbedingung genügen. Hier wird die Existenz mehrerer Lösungen mit gleichem asymptotischen Verhalten bewiesen. — Der Beweis erfolgt durch Diskussion eines nichtlinearen Integralgleichungssystems für die  $u_i(t)$ . W. Haacke.

### Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

● **Geronimus, Ja. (J.) L.:** W. A. Steklow. *Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik.* Übersetzt aus: Skizzen über die Arbeiten russischer Koryphäen der Mechanik. Berlin: VEB Verlag Technik 1954. 84 S. kart. 5. 60 DM.

Der erste Abschnitt des Heftes bringt eine Lebensbeschreibung V. A. Steklovs (1864—1926), die folgenden Abschnitte gehen auf einige Hauptgebiete seiner umfangreichen Tätigkeit ein, wobei im Zusammenhang mit den Arbeiten anderer russischer und europäischer Gelehrter die Bedeutung seiner besonderen Leistungen herausgestellt wird. Der 2. und 3. Abschnitt betrifft die Bewegung eines starren Körpers in einer inkompressiblen Flüssigkeit, der 4. Potentialtheorie. In diesem Zusammenhang hat Steklov die Theorie der Entwicklung nach allgemeinen Eigenfunktionen aufgebaut; diese Untersuchungen werden im 5. Abschnitt dargestellt, während der 6. seine Beiträge über die Abgeschlossenheit von Orthogonalsystemen betrachtet. Der 7. Abschnitt gibt eine Gesamtübersicht über Steklovs Schaffen, wobei unter den angewandt-mathematischen Arbeiten die asymptotischen Entwicklungen der Eigenfunktionen und Fehleruntersuchungen über Quadraturformeln hervorzuheben sind; weiter werden allgemeine Mechanik, Festigkeitslehre, mathematische Physik und Hydrodynamik erwähnt. Das anschließende Literaturverzeichnis führt nur die in dieser Biographie erwähnten Quellen (sowohl von Steklov wie von den anderen Forschern) auf. Dabei ist stets die deutsche Übersetzung zusammen mit dem russischen Originaltitel genannt. Den Abschluß bildet eine Liste „Sammelwerke und Zeitschriften“, die von den letzteren jedoch nur die Namen nennt ohne Hinweise auf die darin enthaltenen Veröffentlichungen. Die Darstellung gewährt einen guten Überblick über Steklovs Lebenswerk und seine Rolle in der Geschichte der mathematischen Physik. Die deutsche Übertragung liest sich flüssig. U. T. Bödewadt.



● Smirnov, M. M.: *Übungsaufgaben zur mathematischen Physik*. Moskau:

Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1954. 87 S. R. 1.35 [Russisch].

Dieses 1954 in 2. erweiterter Auflage herausgekommene Buch enthält Übungsaufgaben zur Ergänzung der regelmäßigen Vorlesungen über die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Behandelt werden quasilineare Gleichungen 2. Ordnung, für die im ersten Abschnitt die Transformation auf die Normalform gezeigt wird (11 Aufgaben). Der zweite Abschnitt bringt Aufgaben, zu denen die allgemeine Lösung mit Hilfe der Charakteristiken anzugeben ist (46 Aufgaben). Am zahlreichsten sind die Aufgaben des dritten Abschnitts, deren Lösungen nach der Methode der Separation der Veränderlichen gefunden werden sollen. Diese Methode wird einleitend noch einmal dargestellt, dann folgen 37 Aufgaben über hyperbolische, 28 über parabolische und 22 über elliptische Differentialgleichungen. Der zweite Teil des Buches enthält die Lösungen und auch Anleitungen zur Behandlung der Aufgaben. — Die Aufgaben sind mit Geschick ausgewählt, so daß der Übende die hauptsächlichsten Methoden an homogenen und inhomogenen Gleichungen mit Anfangs- und Randbedingungen verschiedener Art erproben kann.

U. T. Bödewadt.

Beckert, Herbert: *Einige Probleme aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen*. *Forsch. Fortschr.* **28**, 297—301 (1954).

This is a lecture delivered at the University of Leipzig in 1954. It is a partial survey of the Theory of partial differential equations, to the advance of which the author has made himself many contributions. Quite naturally he is insisting, although not exclusively, on developments which are closely connected with his own research work. First he mentions the great variety of methods which have been successively created to solve the various problems met in the theories of elliptic, of hyperbolic and of parabolic equations. There is the method of integral equations, that of the calculus of variations and the method of functional operators, as well as the topological methods due to J. Schauder and J. Leray. All these methods have their limitations and many difficulties are still to be overcome. The author goes so far as to say that these difficulties are at present discouraging many from working in this field. This remark might have been true a few years ago but considerable research work has been done recently and some of the difficulties mentioned have been reduced if not totally overcome (Gårding, Browder, Leray and others). The author deals first with the classical mixed problem in the theory of the partial differential equations of the hyperbolic type. In this connection, it is well known that problems in the plane differ widely from problems in higher dimensional spaces. The method of the characteristics, so successful in the former has no perfect analogue in the latter. The author mentions that he has been able to overcome certain difficulties by studying quasilinear systems of partial differential equations of the hyperbolic type and of the first order, to which equations of the second order are equivalent in the plane. In particular he has obtained important results about the partitions of the domain in which the system is defined. In general, the Cauchy-Kowalesky existence theorem does not hold and the solutions, considered in the large, are not analytic. Analysing a little more in detail the non-linear case, the author points to two main difficulties: the derivatives of the solution obtained by continuation may not remain bounded and the characteristics may bring about discontinuities of a special kind; they may be called topological discontinuities. This makes it clear that small variations of the initial conditions do not generally produce continuous variations of the solution in the large. Considering problems of the elliptic type, the author mentions the main methods of attack: theory of integral equations, theory of the calculus of variations and topological methods. He points out the great difficulty offered by certain problems in connection with equations of degree higher than two and with systems. However such difficulties have been, to a certain extent, overcome

in recent years. The author makes a very brief mention of problems which may be of the hyperbolic type in a domain and of the elliptic type in another. Such problems have been much studied since 1954. In his conclusion, the author gives a striking example of some of the difficulties which one may come across in problems which are apparently extremely simple. This example is taken from the classical theory of surfaces in a euclidean three-dimensional space.

*C. Racine.*

**Rachajsky, B.: Intégrales de S. Lie et les transformations de contact.** Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 6, 162—171 und französ. Zusammenfassg. 171 (1954) [Serbisch].

L'A. étudie le lien de la théorie des intégrales de S. Lie et des transformations de contact. Comme il est bien connue, toute équation aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue peut être transformée en une équation fonctionnelle, au moyen d'une transformation de contact de classe zéro. L'A. précise qu'une équation semi-linéaire (c. à d. admettant l'intégrale de S. Lie) de la classe  $q$  se transforme en une équation fonctionnelle, au moyen d'une transformation de contact de classe  $q$ . L'A. réussit de le démontrer grâce, à la théorie, des fonctions caractéristiques de transformations de contact de N. Saltykow, de la forme:  $z = \varphi(x_1, \dots, x_{n-q}, x'_1, \dots, x'_n)$ ,  $x_{n-q+k} = \varphi_k(x_1, \dots, x_{n-q}, x'_1, \dots, x'_n)$  ( $k = 1, 2, \dots, q$ ),  $p_r = \partial S / \partial x_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n - q$ ),  $\partial S / \partial x'_s + (\partial S / \partial z') p'_s = 0$ , ( $s = 1, 2, \dots, n$ ),

$S = \varphi - \sum_{k=1}^q q_k p_{n-q+k}$ ,  $S$  désignant la dite fonction caractéristique. On profite dans ce but, de la forme générale des équations aux dérivées partielles semi-linéaires établie par N. Saltykow [Atti IV. Congr. internaz. Mat. 2, 77 (1909)]. Les équations correspondantes s'expriment en fonctions des polynômes caractéristiques de la forme  $v_r = p_r + \sum_{k=1}^q s_{kr} p_{n-q+k}$ . Le problème posé par l'A. sur la formation de la transformation de contact de classe  $q$ , se ramène à la solution d'un système généralisé d'équations de Charpit donnant les caractéristiques d'un système normal d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue. Ce dernier admet à titre d'intégrales, les fonctions des polynômes caractéristiques cités. Ces intégrales sont définies par le système suivant d'équations aux différentielles totales

$$dz = \sum_{r=1}^{n-q} v_r dx_r, \quad dx_{n-q+k} = \sum_{r=1}^{n-q} s_{kr} dx_r \quad (k = 1, 2, \dots, q),$$

les  $v_r$  et  $s_{kr}$  étant les polynômes caractéristiques et leurs coefficients indiqués antérieurement.

*N. Saltykow.*

**Hartman, Philip and Aurel Wintner: Regular binary Pfaffians and non-parabolic partial differential equations.** Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 3, 347—362 (1954).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 55, 84) bewiesen Verff., daß die Lösungen der Klasse  $C^2$  eines überbestimmten Systems  $f^j(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) = 0$  ( $j = 1, 2, 3$ ) bei Erfüllung gewisser Ungleichungen zu  $C^{n-1}$  gehören, falls die  $f^j$  in  $C^n$  ( $n \geq 2$ ) liegen. In der vorliegenden Arbeit werden weitere Resultate dieses Typus hergeleitet und auf Probleme der Differentialgeometrie angewandt. U. a. wird bewiesen, daß eine Fläche ohne Nabelpunkte der Klasse  $C^2$  dann und nur dann zur Klasse  $C^3$  gehört, falls die Gaußsche und mittlere Krümmung zur Klasse  $C^1$  gehören. Es folgen noch Regularitätssätze der gleichen Art über Transformationen einer Riemann-Metrik auf bekannte Normalformen.

*H. Beckert.*

**Tichonov, A. N. und A. A. Samarskij: Über unstetige Lösungen einer quasilinearen Gleichung erster Ordnung.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 99, 27—30 (1954) [Russisch].

1. En considérant l'équation quasilineaire

$$(1) \quad \partial A(t, x, u) / \partial x + \partial B(t, x, u) / \partial t = F(t, x, u)$$



comme une conséquence de la „loi intégrale de conservation“ (2)  $\int_C (A dt - B dx) = \iint_S F dx dt$ , où  $S$  est un domaine arbitraire du plan  $(x, t)$ , limité par la courbe  $C$ , les AA. étudient les solutions discontinues de (1) en partant de (2), dont les solutions peuvent être considérées comme des solutions généralisées de (1). Pour simplifier les calculs on ne considère que les solutions  $u = u(x, t)$  de (2) continues et dérivables partout sauf sur un nombre fini de courbes telles que la limite de  $u$  existe des deux côtés de celles-là. On prend en outre  $u(x, 0) = q(x)$  avec  $q(x)$  fonction continue par morceaux, définie sur un intervalle  $(a, b)$  de l'axe  $x$  et dont la dérivée possède un nombre fini de points de discontinuité. On suppose que  $A, B, F, A_u, B_u$  sont dérivables par rapports à tous leurs arguments, et que  $f = A_u/B_u$  est une fonction monotone décroissante de l'argument  $u$ . 2. Pour  $q(x)$  continue et dérivable sur  $(a, b)$ , la solution s'obtient à l'aide des caractéristiques définies par

$$dx dt = f(t, x, u), \quad du dt = g(t, x, u) \quad (g = (F - A_x - B_t)/B_u), \quad \text{pour } t \leq t_0,$$

où les caractéristiques correspondant à la condition initiale  $u(x, 0) = q(x)$  ne se rencontrent pas. Dans 3., 4., 5. les AA. exposent sans démonstration divers théorèmes et résultats concernant les solutions de (2). S. Vasilache.

Olejnîk, O. A.: Über das Cauchysche Problem für nichtlineare Gleichungen in einer Klasse unstetiger Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **95**, 451—454 (1954) [Russisch].

L'A. considera il problema (\*)  $\partial u / \partial t + \partial q(t, x, u) / \partial x = 0$ ,  $u(0, x) = u_0(x)$ ,  $-\infty \leq a \leq x \leq b < \infty$ ,  $0 < t$  e definisce una soluzione  $u(t, x)$  in senso generalizzato. Di tale soluzione egli prova l'esistenza, l'unicità e la dipendenza continua dal dato iniziale  $u_0(x)$  e determina la natura delle discontinuità della  $u(t, x)$ . L'A. osserva che, sotto opportune limitazioni per la  $q$  il problema può essere trattato come caso limite di  $\partial u / \partial t + \partial q(t, x, u) / \partial x = \varepsilon \partial^2 u / \partial x^2$  per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , così come è stato fatto da E. Hopf (questo Zbl. **39**, 104) per  $q = \frac{1}{2} u^2$  e da J. D. Cole (questo Zbl. **43**, 99).

R. Conti.

Kline, Morris: Asymptotic solution of linear hyperbolic partial differential equations. J. rat. Mech. Analysis **3**, 315—324 (1954).

Es handelt sich um die Gleichung

$$(*) \quad L(u) \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a^{ij} u_{ij} + \sum_{k=1}^n b^k u_k + c = f_{nn}.$$

Untere Indizes bedeuten partielle Ableitungen nach  $x_1, \dots, x_{n-1}$  und  $t = x_n$ . Die Koeffizienten, unterschieden durch obere Indices, sind Funktionen der  $x_1, \dots, x_{n-1}$ , ebenso  $g$  in  $f = g e^{-i\omega t}$ . Ferner sei  $\eta(t) = 0$  für  $t < 0$  und  $= 1$  für  $t > 0$ . Die Lösung wird zu  $u = U(x_1, \dots, x_{n-1}, t) - U(x_1, \dots, x_{n-1}, \infty) + e^{-i\omega t} v(x_1, \dots, x_{n-1})$  angegeben, enthält also einen Anteil, der mit wachsendem  $t$  gegen Null strebt, und einen „stationären“ periodischen Teil. Für  $v$  wird eine asymptotische Reihe nach Potenzen von  $1/\omega$  gegeben. Die Herleitung beruht auf partiellen Integrationen des

Duhamelschen Integrals  $u = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t U(x_1, \dots, x_{n-1}, t - \tau) e^{-i\omega \tau} d\tau$  und insbesondere auf einer Untersuchung des Fortschreitens der Unstetigkeiten (Charakteristiken, Bicharakteristiken) von  $U(x_1, \dots, x_{n-1}, t)$ , das als Lösung von (\*) für  $f = g \eta(t)$  gegeben ist. Adam Schmidt.

Fourès, Y.: Résolution du problème de Cauchy pour des équations hyperboliques du second ordre non linéaires. Centre Belge Rech. math., Colloque équations aux dérivées partielles, Louvain 17—19 déc. 1953, 25—33 (1954).

Die Abhandlung bildet die fast wörtliche Wiedergabe der Einleitung der wichtigen Abhandlung der Verf., vgl. dies. Zbl. **53**, 251. K. Maurin.

**Hadamard, J.:** Extension à l'équation de la chaleur d'un théorème de A. Harnack. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. **3**, 337—346 (1954).

Le théorème classique de Harnack est étendu comme suit aux fonctions „paraboliques“, solutions de  $\partial^2 u / \partial x^2 - \partial u / \partial y = 0$ : Soit une série de fonctions paraboliques positives dans un domaine  $D$ , convergeant en un point  $M(x, y)$  de  $D$ ; elle converge uniformément sur tout compact du domaine  $D'$  lieu des points  $M'$  d'ordonnée  $y' < y$  pouvant être joints à  $M$  par un arc intérieur à  $D$  et d'ordonnée monotone. La démonstration utilise des inégalités déduites de la formule donnant une fonction parabolique dans un rectangle parallèle aux axes à l'aide des valeurs prises sur les côtés.

*J. Deny.*

**Ejdel'man, S. D.:** Über einen Zusammenhang zwischen den Fundamental-matrizen der Lösungen von parabolischen und elliptischen Systemen. Mat. Sbornik, n. Ser. **35 (77)**, 57—72 (1954) [Russisch].

Si la matrice  $G(t - \tau, x - \xi)$  constitue la solution fondamentale du système parabolique  $\partial u / \partial t = -\Phi^{(2b)}(\partial / \partial x)u$ , la fonction

$$\varphi(\xi - x) = \int_0^\infty [G'(\beta, x - \xi) - P'_{2b-n}(\beta, x - \xi, a)] d\beta$$

(l'apostrophe désigne la transposition) où l'on a

$$P'_{2b-n}(\beta, x - \xi, a) = \sum_{p=0}^{2b-n} \frac{1}{p!} \left[ \sum_{h=1}^n (x_h - \xi_h - a_h) \frac{\partial}{\partial x_h} \right]^p G'(\beta, x - \xi)_{x=\xi+a}$$

(le point  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  étant différent de l'origine) constitue la solution fondamentale du système elliptique  $\Phi^{(2b)}(\partial / \partial \xi)u = 0$ , où  $\Phi^{(2b)}$  est l'opérateur adjoint à  $\Phi^{(2b)}$ .

*M. Krzyżański.*

**Višik, M. I.:** Gemischte Randwertaufgaben und Näherungsmethoden zu ihrer Lösung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **97**, 193—196 (1954) [Russisch].

In einer ähnlichen Art wie Verf. früher die beiden Randwertaufgaben für elliptische Gleichungen, die auf der Begrenzung des Gebietes ansatz, mit Hilfe funktionaler Methoden untersucht hat (dies. Zbl. **53**, 71, 72), behandelt der hier die gemischte Randwertaufgabe für folgendes in Matrizenschreibweise gegebene System von Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u =$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^m \sum_{i,j} \frac{\partial^m}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} (A_1^{i,j}(x, t) + i A_2^{i,j}(x, t)) \frac{\partial^m u}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} + V u = h(x, t)$$

in einem zylindrischen Gebiet  $Q = D \times (0 < t < l)$ .  $D$  ist ein beschränktes Gebiet im  $R^n$  mit dem Rand  $\Gamma$ . Es bedeuten  $x = (x_1, \dots, x_n)$  und  $u = (u_1, \dots, u_N)$  Vektorfunktionen,  $A_i^{i,j}(x, t)$  Hermitesche Matrizen  $N$ . Ordnung und  $V$  einen beliebigen Differentialoperator einer Ordnung  $\leq 2m$ . Das Mittelglied der Gleichung ist ein Matrizenprodukt und stellt einen Operator der Ordnung  $2m$  dar. Der räumliche Operator der Gleichung  $A(t) = A_1(t) + i A_2(t) + V(t)$  soll der Bedingung der starken Elliptizität (dies. Zbl. **44**, 95; **41**, 217) gleichmäßig für alle Punkte  $(x, t) \in Q$  genügen. Die gemischte Randwertaufgabe besteht darin, daß die Lösung  $u(x, t)$  der Gleichung auf dem Rand  $\Gamma \times (0 < t < l)$  samt ihren Ableitungen bis zur  $(m-1)$ -ten Ordnung verschwinden,  $u|_\Gamma = \dots = u|_{x_{i_1} \dots x_{i_{m-1}}} = 0$ , und für  $t = 0$  die Anfangswerte  $u|_{t=0} = g(x)$  annehmen soll. Dabei wird die Lösung ähnlich wie in den oben erwähnten Arbeiten in einer gewissen verallgemeinerten Form angesetzt, nämlich als Funktion, die für jede Wahl von  $x$  einer Funktionalgleichung genügt, die aus der gegebenen Gleichung durch Anwendung eines Integraloperators entsteht, der mit Hilfe einer willkürlichen Funktion bestimmter Bauart  $v(x, t)$  gebildet ist. Der Integraloperator steht in Zusammenhang mit der Metrik



der herangezogenen Funktionenräume. — Unter diesen Bedingungen gilt der Existenz- und Eindeutigkeitsatz der Lösung unter der Voraussetzung, daß die Koeffizienten der linken Seite der Gleichung in  $Q$  beschränkt sind und eine gleichfalls beschränkte Ableitung nach  $t$  besitzen, für beliebige rechte Seiten  $h(x, t) \in L_{p,2}(Q)$  [ $p = \max(1, 2n(n-2m))$ ] und Anfangswerte  $q(x) \in L_2(D)$ . Falls  $h(x, t)$  nach  $t$  differenzierbar ist,  $h'_t \in L_{p,2}(Q)$ , und  $q(x)$  den Randbedingungen genügt, so besitzt auch die Lösung  $u(x, t)$  eine (ebenfalls verallgemeinerte) Ableitung nach  $t$ . Es gilt ferner für die Norm des Gradienten  $m$ ter Ordnung von  $u$  die Abschätzung  $\|G'u\| \leq C(\|h\|_{L_m} + \|q\|_{L_2})$ . Der Beweis wird kurz angedeutet. Ferner wird der Fall  $t \rightarrow \infty$  ( $t = \infty$ ) bei zusätzlichen Voraussetzungen über die Koeffizienten der Gleichung untersucht und es wird eine Näherungsmethode zur Lösung der Gleichung angegeben, die der Galerkin'schen Variationsmethode analog ist. Schließlich werden noch ohne Beweis einige spezielle Ergebnisse mitgeteilt über die die Ableitung nach der Zeit enthaltende Operatorgleichung

$$du(t)/dt + (A_1(t) + iA_2(t))u(t) = h(t)$$

mit dem Operator  $A_1(t) = iA_2(t)$ , der in einem unitären Raum definiert ist, dem  $u(t)$  und  $h(t)$  angehören. Hierbei ist  $A_1(t)$  selbstadjungiert und halbbeschränkt nach unten und  $A_2(t)$  symmetrisch vorausgesetzt. E. Svenson.

Višik, M. I.: Gemischte Randwertaufgaben für Gleichungen, die die erste Ableitung nach der Zeit enthalten, und eine Näherungsmethode zu ihrer Lösung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 99, 189–192 (1954) [Russisch].

Die Reihe der Arbeiten des Verf. über Randwertaufgaben elliptischer Gleichungen (dies. Zbl. 53, 11, 12; vortieh. Referat) wird hier fortgesetzt durch Betrachtung der gemischten Randwertaufgabe für das inhomogene Gleichungssystem

$$Lu = A_{2m}(x, t, \partial/\partial x_i) \partial u(x, t)/\partial t + B_s(x, t, \partial/\partial x_i) u = h(x, t)$$

in einem zylindrischen Bereich  $Q = D \times (0 \leq t \leq T)$ . Es bedeuten:  $D$  einen beschränkten Bereich im  $E^n$  mit dem Rand  $\Gamma$ ;  $A_{2m}$  und  $B_s$  Differentialoperatoren der Ordnungen  $2m$  bzw.  $s$ ,  $u = (u_1, \dots, u_N)$ ,  $h = (h_1, \dots, h_N)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Die Problemstellung der gemischten Randwertaufgabe ist hier genau die gleiche wie in der letzten der erwähnten Arbeiten (dort näher geschildert); die Lösung ist wieder in einem verallgemeinerten Sinn verstanden als Funktion, die einer gewissen aus der gegebenen Gleichung gewonnenen, mit Hilfe einer weiteren willkürlichen Funktion bestimmter Bauart gebildeten Integralidentität genügt; die Anfangswerte für  $t = 0$  seien wieder  $q(x)$  und die Randbedingung sei homogen (Verwandern der verallgemeinerten Lösung  $u(x, t)$  samt allen ihren Ableitungen bis zur  $(m-1)$ -ten Ordnung auf der Mantelfläche  $M = \Gamma \times (0 \leq t \leq T)$  des Zylinders  $Q$ ). Auch die Durchführung, d. h. die Art der Beweisführung durch Heranziehung funktionaler Methoden in mit speziellen Metriken versehenen Funktionsräumen und die Formulierung der Ergebnisse im gleichen Rahmen (Existenz- und Eindeutigkeitsatz, Angabe von Differenzierbarkeitseigenschaften der Lösung sowie Abschätzungen der Norm ihres Gradienten  $m$ ter Ordnung  $\|G_m u\|$  bzw. der Summe  $\|G_m u\| + \|G_m u'_t\|$  durch die Normen von  $h$  und  $q$ ). Schließlich noch die Angabe einer der Galerkin'schen Variationsmethode nachgebildeten Näherungsmethode zur Berechnung der Lösung, ist genau die gleiche wie in der genannten Arbeit. — Im einzelnen werden folgende Fälle unterschieden: a)  $2m = s$ ,  $A_{2m}$  ein stark elliptischer positiver (s. e. p.) Operator (s. Višik, dies. Zbl. 44, 95). Ein s. e. Operator, etwa  $A_{2m}$ , heißt positiv, falls sein reeller Teil (für feste  $t$ ) sich positiv definit verhält in dem Sinn, daß  $\operatorname{Re}(A_{2m} u, u) \geq C^2 \|u\|_2^2$  für alle glatten Funktionen  $u(x, t)$ , die in der Umgebung vom Rand  $\Gamma$  verschwinden, wobei die Klammer ein gewöhnliches skalares Produkt im Bereich  $D$  bedeutet und  $\|u\|_2$  die Norm im Sobolev'schen Funktionsraum  $W_2^{(m)}(0)$ .  $B_s$  ein beliebiger Differentialoperator; b)  $2m = s = 2k$ ,  $A_{2m}$  ein selbstadjungierter s. e. p. Operator,  $B_s$  ein allgemeiner s. e. Operator;

c)  $2m < s = 2k$ ,  $A_{2m}$  ein st. e. p. Operator mit Koeffizienten, die in  $Q$  beschränkte Ableitungen nach  $t$  besitzen,  $B_s$  ein st. e. Operator der Form  $B^{(1)} + B^{(2)}$ , wobei der erste Anteil selbstadjungiert und positiv ist. In jedem dieser Fälle ist die zur Festlegung der verallgemeinerten Lösung dienende Integralidentität samt zugehöriger Metrik eine andere. — Am Schluß wird ein Satz gleicher Art über das zugehörige homogene Gleichungssystem  $Lw = 0$  mit inhomogenen Randbedingungen auf  $M$  angegeben, letztere gegeben in Form einer ins Innere von  $Q$  fortgesetzten Randfunktion  $f(x, t)$ , wobei das Verhalten von  $f - w$  vorgeschrieben ist. Für  $t = 0$  hat  $w$  denselben Anfangsbedingungen zu genügen wie  $f$ . Auch hier handelt es sich um eine in ähnlicher Weise durch eine Integralidentität definierte verallgemeinerte Lösung  $w(x, t)$  und es werden die gleichen drei Fälle wie vorhin betrachtet.

E. Svenson.

**Nitsche, Johannes:** Über die linearen Randwertprobleme eines quasilinearen elliptischen Differentialgleichungssystems. Math. Z. 61, 336—347 (1954).

The boundary value problem studied in this paper ist that of finding in the unit circle  $T$  ( $x^2 + y^2 < 1$ ) a solution of the differential system:

$$\begin{aligned} u_x &= (EG - F^2)^{-1/2} [-F(x, y; u, v) v_x + E(x, y; u, v) v_y], \\ u_y &= (EG - F^2)^{-1/2} [-G(x, y; u, v) v_x + F(x, y; u, v) v_y] \end{aligned}$$

with a boundary condition depending on an integer  $n$ . First one must have  $R^\sigma(u, v) = u \cos \sigma(s) + v \sin \sigma(s) = h(s)$  where  $s$  denotes the arc of  $S$ , boundary of  $T$ ,  $h(s)$  a continuous, differentiable and periodic function on  $S$  and  $\sigma(s)$  a Hölder-continuously differentiable function of  $s$ . Further:  $\sigma(s + 2\pi) = \sigma(s) + 2n\pi$ . Lastly, when  $n \geq 0$ , the first  $2n + 1$  coefficients of the Fourier series of  $R^\tau(s)$ , where  $\tau(s) = \sigma(s) + \frac{1}{2}\pi$  must be equal to given constants; when  $n < 0$ , the first  $2|n| - 1$  coefficients of the Fourier series of the same  $R^\tau(s)$  must be equal to given constants. The partial derivatives with respect to  $u$  and  $v$  of  $E, F, G$  must be Hölder-continuous. An existence theorem is obtained by a particular application of Schauder's fixed point theorem. The author considers the functions  $u$  and  $v$  which are Hölder-continuous, with index  $\lambda$ , in  $T + S$ . Writing  $w = u + iv$ , a norm is defined for  $w$  by first defining the norms  $\|u\|_{\lambda,0}$  and  $\|v\|_{\lambda,0}$  in the usual manner (the notations are the well known notations of Schauder) and then defining  $\|w\|_{\lambda,0}$  as the maximum of  $\|u\|_{\lambda,0}$  and  $\|v\|_{\lambda,0}$ . The functions  $w$  normed in this manner form a Banach space in which it is natural to consider the functional transformation  $W = \Psi(w)$  determined by the system

$$\begin{aligned} U_x &= -F(x, y; u, v) V_x + E(x, y; u, v) V_y, \\ U_y &= -G(x, y; u, v) V_x + F(x, y; u, v) V_y \end{aligned}$$

where  $EG - F^2 = 1$  and the above mentioned boundary conditions. Denoting by  $D$  the domain:  $\|w\| \leq N$ ,  $\|w\|_{\lambda,0} \leq N'$ , where  $N$  and  $N'$  are two constants, one proves that  $D$  is convex and that  $\Psi$  maps it into itself. Further  $\Psi$  is shown to be completely continuous. Therefore the fixed point theorem yields an existence theorem of the given system. The author's proof makes use of theorems due to Lichtenstein and Ahlfors. These theorems reduce the boundary value problem, under the same boundary value conditions as above, of a system of the form

$$\begin{aligned} U_x &= -f(x, y) V_x + e(x, y) V_y, \\ U_y &= -g(x, y) V_x + f(x, y) V_y, \quad eg - f^2 = 1, \end{aligned}$$

to that of a system of the form  $\bar{U}_\xi + \bar{V}_\eta = 0$ ,  $\bar{U}_\eta + \bar{V}_\xi = 0$  with similar boundary value conditions. The quasi-linearity of the system dealt with in this paper makes it easy to prove that the solution is unique. In a last remark, the author points to the fact that, instead of the unit circle  $T$ , one might assume that the domain under consideration is a schlicht image of  $T$  under a conformal mapping.

A. Racine.



**Finn, Robert:** On equations of minimal surface type. Ann. of Math., II. Ser. **60**, 397—416 (1954).

Verf. untersucht Lösungen einer elliptischen Differentialgleichung der Gestalt (\*)  $a(p, q)r + 2b(p, q)s + c(p, q)t = 0$ ,  $ac - b^2 = 1$ . Zunächst definiert Verf. drei Klassen von Differentialgleichungen:  $E_1(\varepsilon)$ : Gesamtheit von Differentialgleichungen (\*), für die mit einem  $\varepsilon < \infty$  für alle  $p, q$  die Bedingung

$$a \frac{1+p^2}{W} + c \frac{1+q^2}{W} + 2b \frac{pq}{W} \leq 2\varepsilon \quad (W = \sqrt{1+p^2+q^2})$$

besteht. —  $E_2(\varepsilon)$ : Alle Differentialgleichungen aus  $E_1(\varepsilon)$ , wenn sich zwei Funktionen  $\Theta(p, q)$ ,  $A(p, q)$  derart finden lassen, daß  $\Theta^2 + A^2 \leq p\Theta + qA$  besteht und (\*) der Gleichung  $\Theta_x + A_y = 0$  äquivalent ist. —  $E_3(\varepsilon)$ : Alle Differentialgleichungen aus  $E_1(\varepsilon)$ , für die  $\Theta^2 + A^2 = 1$  möglich ist. — Aus Lemma 4 folgt  $E_3 \subset E_2 \subset E_1$ . Die Hauptergebnisse sind: I. Für Differentialgleichungen aus  $E_1(\varepsilon)$  gilt: Ist  $q(x, y)$  eine in  $C_R \setminus \{x^2 + y^2 = R^2\}$  definierte Lösung, so läßt sich für  $r < R$  das  $\sup_{C_r} |q_x^2 + q_y^2|$  mittels des Flächeninhaltes abschätzen, den die Fläche  $(x, y, q(x, y))$  für  $(x, y) \in C_r$  hat. — III. Für Differentialgleichungen der Klasse  $E_2(\varepsilon)$  existiert eine entsprechende Abschätzung mit Hilfe von  $\sup_{C_r} |\varphi(x, y)|$ . — Außerdem werden Konvergenz-, Approximations- und Auswahlssätze für Lösungen der drei Klassen von Differentialgleichungen bewiesen. Dadurch läßt sich schließlich die Lösbarkeit des ersten Randwertproblems für die Klassen  $E_2$  und  $E_3$  zeigen. Gehört z. B. (\*) zu  $E_3(\varepsilon)$ , so ist die erste Randwertaufgabe für konvexe Gebiete lösbar, wenn die vorgeschriebenen Randwerte stetig sind. Wie an einem Gegenbeispiel gezeigt wird, gilt dieser Satz nicht für beliebige Differentialgleichungen der Gestalt (\*), wenn die Lösung im Innern zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt wird. Bemerkung des Ref.: Lemma 1 besagt, daß bei einer quasi konformen Abbildung  $w = w(\gamma)$  von  $|\gamma| < 1$  mit  $w < 1$  und einer Exzentrizität  $\leq \varepsilon$  ( $\varepsilon > 1$ ) für alle  $\gamma$  mit  $|\gamma| < \gamma_0 < 1$  eine Abschätzung

$$|w| > (w_M - h)/(1 - h w_M)$$

besteht. Dabei bedeutet  $w_M = \max_{|\gamma| \leq \gamma_0} w$  und  $h$  eine gewisse Funktion von  $\varepsilon, \gamma_0$ .

Da aber  $w(\gamma) = \gamma$  eine Abbildung der Exzentrizität 1 ist und  $w = 0$  für den Mittelpunkt des Kreises  $|\gamma| \leq \gamma_0$  gilt, muß  $h \geq w_M$  sein, d. h. die Aussage des Lemmas ist leer. Verf. scheint jedoch  $h = w_M$  schließen zu wollen. Da er diese Annahme später verwendet, sind einzelne Beweise lückenhaft.

Joachim Nitsche.

**Vaart, H. R. van der:** An elementary method of expressing the Laplacian  $\Delta_\varepsilon$  in terms of curvilinear non-orthogonal coordinates, with some corollaries. Simon Stevin **30**, 48—57 (1954).

Es sei  $x = x(u, v, w)$ ,  $y = y(u, v, w)$ ,  $z = z(u, v, w)$ ,

$$D = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}, \quad G = D^2 = \begin{vmatrix} g_{uu} & g_{uv} & g_{uw} \\ g_{vu} & g_{vv} & g_{vw} \\ g_{wu} & g_{wv} & g_{ww} \end{vmatrix};$$

$X^i, Y^i, Z^i$  ( $i = u, v, w$ ) bezeichnen die Unterdeterminanten von  $D$ . Dann gilt für die Unterdeterminanten  $G_{(ij)}$  von  $G$ :  $G_{(ij)} = X^i X^j + Y^i Y^j + Z^i Z^j$  ( $i, j = u, v, w$ ). Der Laplace'sche Ausdruck  $\Delta\Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz}$  läßt sich dann fast unmittelbar überführen in:

$$\Delta\Phi = D^{-1} \sum_{i=u}^w \frac{\partial}{\partial i} \sum_{j=u}^w D^{-1} \Phi_j G_{(ij)},$$

der im Falle der Orthogonalität der Flächen  $u, v, w$  ( $D^2 = G = g_{uu} g_{vv} g_{ww}$ ) in die bekannte Form übergeht. In den Zusätzen werden notwendige und hinreichende Bedingungen für spezielle Lösungen von  $\Delta\Phi = 0$  (z. B.  $\Phi$  nur von  $u$  abhängig) angegeben.

O. Volk.

**Ballabh, R.:** On a class of equations reducible to Laplace's equation. *Ganita* 5, Nr. 2, 93—96 (1954).

Die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} = \left\{ f(r) \frac{\partial}{\partial r} + 1 \right\} \left\{ F(r) \frac{\partial}{\partial r} \right\} p$$

kann dann und nur dann durch eine Transformation von der Gestalt  $\varrho = \varrho(r)$  ( $r^2 = x^2 + y^2$ ) in die Laplacesche Differentialgleichung transformiert werden, wenn  $\log \varrho = \int r^{-1} (1 - f F)^{-1/2} dr$  und zwischen  $f(r)$  und  $F(r)$  die Relation  $F(r) = r^2 f(r) \exp(-2 \int f(r)^{-1} dr)$  besteht. Die analoge Aufgabe bezüglich der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} = \left\{ f(r) \frac{\partial}{\partial r} + 1 \right\} \left\{ F(r) \frac{\partial}{\partial r} \right\} p$$

( $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ) läßt sich nur in dem Falle lösen, daß folgende Gleichungen:  $\log \varrho = \int r^{-1} (1 - f F)^{-1/2} dr$ ,  $r f F' - (r f' + 2 f - 2 r) F \pm 2 (1 - f F)^{1/2} - 2 = 0$  gültig sind. *St. Fenyő.*

**Landkof, N. S.:** Approximation stetiger Funktionen durch harmonische. *Mat. Sbornik*, n. Ser. 25 (67), 95—106 (1949) [Russisch].

L.A. démontre et complète des résultats déjà annoncés (ce Zbl. 39, 121). Il faut signaler que l'essentiel avait déjà été indiqué, avec une démonstration voisine, basée aussi sur le théorème des systèmes totaux de Banach, par J. Deny [Bull. Soc. Math. France 73, 71—73 (1945)] qui est revenu sur le sujet avec plus de détails.

*M. Brelot (Math. Rev. 12, 258).*

**Niculescu, Miron:** Propriétés de décomposition des fonctions de plus variables réelles et en particulier des fonctions polyharmoniques. *Revista Univ. C. I. Parhon Politehn. București*, Ser. Ști. Natur. 3, Nr. 4/5, 53—63 u. russ. u. französ. Zusammenfassg. 62—63 (1954) [Rumänisch].

Dans ce travail on donne une représentation des fonctions polyharmoniques d'ordre  $p$ , à l'aide de  $p$  fonctions harmoniques, représentation qui diffère de la représentation d'Almansi. Soit  $u(P)$  une fonction donnée dans un domaine borné normal  $D$ , ayant en  $D$  et sur  $\text{Fr } D$  des dérivées partielles d'ordre 2 continues et soit  $u_0(P)$  la fonction harmonique en  $D$  qui coïncide à  $u(P)$  sur  $\text{Fr } D$ . Alors  $u(P) = u_0(P) + [1/(n-2) \sigma_0] \int G(P, Q) \Delta u(Q) dQ$  où  $G(P, Q)$  est la fonction de Green pour le domaine  $D$  et  $\sigma_0$  la mesure de la sphère unité dans l'espace à  $n$  dimensions. On note  $G^p \cdot q = [1/(n-2) \sigma_0] \int G(P, Q) q(Q) dQ$ . On démontre le théorème de décomposition suivant: Étant donnée une fonction  $u$ , polyharmonique d'ordre  $p$  en  $D$ , il existe un système de fonctions harmoniques en  $D$ :  $u_0, u_1, u_2, \dots, u_{p-1}$  et seulement un, ainsi qu'il y a en  $D$ :  $u = u_0 + G u_1 + G^2 u_2 + \dots + G^{p-1} u_{p-1}$  où  $u_k$  sont des fonctions harmoniques univoquement déterminées dans  $D$  par les valeurs prises sur  $\text{Fr } D$  par la suite  $u, \Delta u, \Delta^2 u, \dots, \Delta^{p-1} u$ . Le théorème se généralise aussi pour les fonctions qui ne sont plus de fonctions polyharmoniques. Soit  $u(P)$  une fonction de la classe  $C^{(2p)}$  dans le domaine fermé  $D$ . Il existe un système de  $p$  fonctions harmoniques en  $D$ :  $u_0, u_1, u_2, \dots, u_{p-1}$  et un seul, ainsi qu'il y a en  $D$ :  $u_0 + G u_1 + G^2 u_2 + \dots + G^{p-1} u_{p-1} + R_p$  où  $R_p = G^p \Delta^p u$ . L'A. étudie aussi les conditions pour qu'une fonction infiniment différentiable puisse être écrite sous une forme de série du type considéré. Si l'on a  $|\Delta^i u| < M$ , ( $i = 1, 2, \dots$ ) pour une fonction infiniment différentiable dans une région de l'espace, alors:  $u = u_0 + G u_1 + G^2 u_2 + \dots + G^p u_p + \dots$  pour tout domaine  $D$  de cette région, pour lequel le rayon de la plus petite sphère le contenant est inférieur à  $\sqrt{2n}$ . *M. Nedelcu.*

**Palo, Raffaele di:** Sul problema di Dirichlet in un campo prossimo ad una sfera. *Ricerca, Rivista Mat. pur. appl.* 5, Nr. 4, 27—32 (1954).

Verf. versucht, die Lösung des Dirichletschen Problems für eine der Kugel ( $\sigma$ )



benachbarte Fläche  $\sigma'$  ( $Q' = Q + \varepsilon(Q) n$ , wo  $Q' \in \sigma'$ ,  $Q \in \sigma$ ,  $n$  Normaleinheitsvektor der Kugelfläche  $\sigma$ ) auf die Lösung für die Kugel selbst im angenäherten Sinne zurückzuführen. Die gegebenen Werte  $u_\sigma$  auf  $\sigma'$  werden auf  $\sigma$  verpflanzt.  $u_1$  sei die harmonische Funktion mit den Randwerten  $u_\sigma$  in  $Q \in \sigma$ . Weiterhin sei  $u_2$  die harmonische Funktion mit den Randwerten  $\varepsilon(Q) du_1/dn$ . Dabei wird stillschweigend die Existenz von  $du_1/dn$  auf dem Rande vorausgesetzt. Die gesuchte Funktion wird dann durch  $u_1 + u_2$  bis auf Größen höherer Ordnung in  $\varepsilon$  approximiert. Hierbei wird weiter ohne nähere Diskussion die Existenz von  $du_2/dn$  auf dem Rande  $\sigma$  vorausgesetzt. Der Beweis der Formeln [3] und [4] sind Ref. völlig unverändert. Es werden die Randwerte von  $\frac{du_1}{dn} = \frac{R^3 - \varrho^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{3u_1(\varrho - R \cos \varrho)}{r^5} d\sigma + \frac{2\varrho}{4\pi R} \int_{\sigma} u_1 \frac{d\sigma}{r^3}$  benutzt, ohne daß der Grenzprozeß  $\varrho \rightarrow R$  durchgeführt wird. Der Faktor  $R^2 - \varrho^2$ , in welchem statt  $\varrho$  eigentlich  $R$  stehen mußte, wird aus dem Integralzeichen herausgenommen.

G. L. Tautz.

**Tsuji, Masatsugu:** On Neumann's problem for a domain on a closed Riemann surface. J. math. Soc. Japan **6**, 122—128 (1954).

$D$  sei ein Teilgebiet einer geschlossenen Riemannschen Fläche und werde von einer endlichen Anzahl analytischer Kurven oder Bögen berandet. Der Winkel zwischen zwei Bögen, die in  $\zeta$  zusammenstoßen, soll zwischen Null und  $2\pi$  liegen. Auf dem Rand  $F$  von  $D$  ist eine beschränkte und für  $\zeta + \zeta_j$  stetige Funktion  $f(\zeta)$  gegeben, die noch der Bedingung  $\int_F f(\zeta) d\zeta = 0$  genügt. Verf. konstruiert im Anschluß an L. Myrberg (Über die veranschte Randwertaufgabe der harmonischen Funktionen) eine Lösung  $u(\zeta)$  der Neumannschen Randwertaufgabe, die auf  $D = F$  stetig ist und deren Dirichletintegral  $D[u]$  der Bedingung  $D[u] \leq k M^2$ ,  $k = k(D)$ , genügt.

H. Wittich.

**Lauwerier, H. A.:** Einige Randwertaufgaben mit vorgegebener Winkelderivierten. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1954—016, 7 S. (1954) [Holländisch].

In einigen Spezialfällen wird für die Laplacegleichung in zwei Variablen eine Greenfunktion  $G(x, y)$  angegeben für den Fall, daß die Randwerte von  $\left\{ \frac{\partial G}{\partial n} \right\}_w = \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\alpha} \frac{dw}{dz} \right\}$ ,  $w(z) = G(x, y) + iH(x, y)$ ,  $z = x + iy$  ( $G$  ist Realteil der analytischen Funktion  $w(z)$ ), auf dem Rand eines einfach zusammenhängenden Gebietes gegeben sind. Analoge Fragen für andere Gleichungen werden kurz gestreift.

A. van Heemert.

**Vidav, Ivan:** Sur une généralisation du théorème de Mandelbrojt-MacLane aux fonctions harmoniques et sousharmoniques. Bull. Soc. Math. Phys. Serbie **6**, 123—130 (1954).

Démonstrations complètes des résultats annoncés dans une note précédente (ce Zbl. **55**, 332). Soit  $J_s$  la bande dans le plan de la variable complexe  $s = \sigma + it$ , définie par  $\sigma = \sigma_0$ ,  $G_1(\sigma) = 1 < G_2(\sigma)$ , où les  $G_i(\sigma)$  ( $i = 1, 2$ ) sont des fonctions positives, continues, à variation bornée et telles que  $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} G_i(\sigma) = 0$ . Posons

$S(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} [G_1(x) - G_2(x)]^{-1} dx$ . Soit  $N(\sigma)$  une fonction non décroissante et

telle que (\*)  $\int_{\sigma_0}^{\infty} N(\sigma) e^{-s\sigma} d\sigma < \infty$ . Si  $w(\sigma, t)$  est une fonction sousharmonique bornée supérieurement dans  $J_s$  et telle que  $w(\sigma, t) \leq N(\sigma)$ , alors  $w = 0$ . Si l'on pose  $w(\sigma, t) = \log F(s)$ , où  $F(s)$  est une fonction holomorphe, alors on obtient le théorème de Mandelbrojt-MacLane (ce Zbl. **32**, 67). — 2. Soit  $N(\sigma)$  une fonction non décroissante. Supposons qu'il existe deux constantes positives  $b, k$ , telles qu'on ait  $N(x_2) - N(x_1) \geq k(x_2 - x_1)$  pour  $x_2 - x_1 \geq b$ . Supposons (\*) vérifié. Si  $u(\sigma, t)$  est une fonction harmonique bornée dans  $J_s$  et continue dans  $J_s$ , qui vérifie  $\log |u(\sigma, t)| < -N(\sigma)$ , alors  $u = 0$ .

J. Horváth.

● **Stakgold, Ivar: Boundary value problems for  $\nabla^2 u + k^2 u = 0$ .** Technical Report Nr. 17. Stanford University California: Applied Mathematics and Statistics Laboratory. 1954. 18 p.

Die erste und zweite Randwertaufgabe für  $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + K^2 u = 0$  bei Begrenzung a) durch eine Halbebene und b) durch einen Kegel, dessen Spitze durch eine Kugelkalotte abgerundet ist, werden in einfacher und übersichtlicher Weise gelöst durch Angabe der Greenschen Funktion in Form von unendlichen Reihen. Für a) sind seit Sommerfeld [Math. Ann. **47**, 317–374 (1896)] viele Lösungen bekannt. Problem b) war bisher nur in Spezialfällen gelöst; die von Verf. benutzte Methode ist verwandt mit der von S. N. Karp für ein ähnliches Problem (Beugung an einem durch einen Zylinderausschnitt abgestumpften Keil) benutzten Methode. (S. N. Karp, Diffraction by a tipped wedge, New York Univ. Electromagn. Research Groups, Report E M—52, 1953). W. Magnus.

**Albertoni, Sergio: Sulla risoluzione del problema di Neumann per l'equazione  $\Delta_2 u - k u = f$ .** Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. **87** (III. Ser. **18**), 400–423 (1954).

L'A. cherche des solutions pour le problème de Neumann pour l'équation (1)  $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$  dans le cas d'un domaine plan  $C$  à connexion finie et dont la frontière  $T$  est une courbe simple fermée à tangente et courbure continue.  $\lambda$  est un certain paramètre réel ou complexe et  $f(x, y)$  satisfait en  $C$  et sur  $T$  à la condition de Hölder. L'A. cherche des solutions dans la classe  $(E)$  considérée par L. Amerio, [L. Amerio, Sull'integrazione dell'equazione  $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$  in un dominio a connessione qualsiasi. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. III. Ser. **9**(78), 79–102 (1945)] c'est-à-dire dans la classe des intégrales de l'équation (1) qui ont les propriétés suivantes: a) Pour chaque point  $M \in T$ ,

$$\lim_{P \rightarrow M (P \in v_M)} u(P) = A(M), \quad \lim_{P \rightarrow M (P \in v_M)} \partial u(P) / \partial v_M = B(M),$$

où  $v_M$  est la normale intérieure. b)  $A$  et  $B$  sont intégrables sur  $T$  et, quel que soit  $P \in C$  et  $Q$  extérieur à  $C$ , les formules suivantes de type Green sont valables

$$(2) \quad 2\pi u(P) = \int_T \left\{ A(M) \frac{\partial v(M, P)}{\partial v_M} - B(M) v(M, P) \right\} dT_M - \int_C f(M) v(M, P) dC_M.$$

$$(3) \quad 0 = \int_T \left\{ A(M) \frac{\partial v(M, Q)}{\partial v_M} - B(M) v(M, Q) \right\} dT_M - \int_C f(M) v(M, Q) dC_M$$

$v$  étant la solution fondamentale de l'équation (1), exprimée à l'aide des fonctions de Bessel. En considérant un point  $P$  sur  $v_N$  et en faisant  $P$  tendre vers  $N \in T$ , on trouve une équation intégrale Fredholm pour  $A(N)$ . Le but principal de ce travail est de montrer l'équivalence de cette équation intégrale avec (3) et d'ici on déduit la solution de l'équation (1). La méthode utilisée conduit à une étude ample du noyau de l'équation intégrale de Fredholm. M. Nedelcu.

**Keller, Herbert B. and Joseph B. Keller: Lowest eigenvalues of nearly circular regions.** Quart. appl. Math. **12**, 141–150 (1954).

Es sei  $r = R(\theta)$  eine Darstellung des Randes  $C$  eines ebenen Sterngebietes  $B$  in Polarkoordinaten mit dem Nullpunkt  $(h, k)$ . Für den kleinsten Eigenwert  $\lambda$  des Problems  $\Delta u + \lambda^2 u = 0$ ,  $u = 0$  auf  $C$ , wird eine untere Schranke angegeben. Hierzu wird  $R_\alpha = \min_{(h, k) \in B} R(\theta, \alpha; h, k)$  ( $\alpha \geq 2$ ) bzw.  $R_\alpha = \max_{(h, k) \in B} R(\theta, \alpha; h, k)$

für reelle Werte von  $\alpha$  betrachtet, wobei  $R(\theta, \alpha; h, k) = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (R(\theta))^\alpha d\theta \right)^{1/\alpha}$  ist.

Für  $2 \leq \alpha \leq \infty$  gilt  $\lambda \geq j_{01}/R_\alpha$ , wobei  $j_{01}$  die kleinste positive Nullstelle von  $J_0(x)$  bezeichnet. Das Verfahren wird auf Gebiete mit nahezu kreisförmiger Berandung angewendet. E. Kreyszig.



Ray, Daniel: On spectra of second-order differential operators. Trans. Amer. math. Soc. **77**, 299—321 (1954).

Wiederbeweis einiger alter, jedoch auch Beweis eines neuen Resultates über das Spektrum sowie das asymptotische Verhalten von Eigenwerten und Eigenfunktionen des Differentialoperators  $L = \frac{1}{2} \Delta + V(x)$ ,  $x \in \Omega$  ( $\Omega$  ein endliches oder unendliches Gebiet des  $N$ -dimensionalen Raumes). Wesentlich ist, daß als Beweismethode ein Verfahren der Wahrscheinlichkeitstheorie herangezogen wird. Die Green'sche Funktion des Operators  $L - s$  wird dargestellt als Durchschnittswert eines gewissen Integrales über alle Wege eines Wiener-Prozesses im  $R^N$  zwischen den Punkten 0 und  $y - x$ . Verf. erreicht auf diesem Wege sowohl die alten Weyl'schen und Carleman'schen Resultate über das asymptotische Verhalten der Eigenwerte und Eigenfunktionen bei beschränktem Gebiet  $\Omega$  als auch entsprechende Formeln für den Fall eines unbeschränkten Gebietes  $\Omega$ , wenn  $V(x)$  gegen  $\infty$  strebt, sobald  $|x| \rightarrow \infty$  gilt.  
H. O. Cordes.

• Aronszajn, N. and W. F. Donoghue: Variational approximation methods applied to eigenvalues of a clamped rectangular plate. I. Auxiliary problems. (Studies in eigenvalues problems. Technical Report 12.) Lawrence, Kansas: University of Kansas. Department of Mathematics 1954. 76 p.

The eigenvalue problems considered in the present paper are those of the vibration, buckling and shearing of clamped rectangular plates and correspond to the partial differential equations

$$\Delta^2 u = \lambda u, \quad \Delta^2 u = -\lambda \Delta u, \quad \Delta^2 u = -2\lambda \partial^2 u / \partial x \partial y$$

in a rectangular domain  $D$  with  $u = \partial u / \partial n = 0$  on the boundary. These differential problems correspond to the variational problems associated with the quadratic form  $\mathfrak{A}(u)$  and  $\mathfrak{B}(u)$ , where  $\mathfrak{A}(u) = \int_D |\Delta u|^2 d\omega$ , and  $\mathfrak{B}(u) = \int_D |u|^2 d\omega$ ,  $\mathfrak{B}(u) = \int_D [u_x^2 + u_y^2] d\omega$  and  $\mathfrak{B}(u) = \int_D [u_x \bar{u}_y + u_y \bar{u}_x] d\omega$  respectively. The rectangular domain is defined by the inequalities  $-a \leq x \leq a$  and  $-b \leq y \leq b$  corresponding to a rectangular plate of side lengths  $2a$  and  $2b$ . The ratio  $\rho = b/a$  is a parameter of interest, and since we may always suppose that  $a \leq b$ , one may take  $\rho \leq 1$ : a square plate corresponds to  $\rho = 1$ . — The variational problems mentioned above may be taken with respect to the class of all functions on the rectangle which are four times continuously differentiable there and which vanish together with their normal derivatives on the boundary. The Euler equation for the variational problem in this class of functions leads to the differential problems stated above. The choice of a clamped rectangular plate for the calculations of this paper is based on three reasons: 1. It is the simplest and most important case of an eigenvalue problem which is not explicitly solvable. 2. It admits a wide choice of auxiliary problems of different kinds. 3. The already computed eigenvalues for the vibrations of a square plate may be used as a measure of the effectiveness of the methods applied. (See also N. Aronszajn, this Zbl. **31**, 406; **38**, 248.)  
R. Gran Olsson.

### Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Bădescu, Radu: Sur une équation fonctionnelle. Acad. Republ. popul. Romine Bul. ști. Sect. Știi. mat. fiz. **6**, 789—794, russ. u. französ. Zusammenfassg. 794—795 (1954) [Rumänisch].

Dans une note antérieure [Comun. Acad. Republ. popul. Romine **2**, 319 (1952)] l'A. a montré que: Si dans l'équation intégrale

$$(1) \quad \Phi(z) - \mu \int_a^b K(s) \Phi(z+s) ds = \Psi(z),$$

la fonction connue  $\Psi(z)$  est une série de Dirichlet de la forme (2)  $\Psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n e^{-\lambda_n z}$ , uniformément convergente dans un semiplan, alors les solutions de (1) qui peuvent s'exprimer par des séries de Dirichlet de la forme (3)  $\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\lambda_n z}$ , se réduisant à  $\Psi(z)$  pour  $\mu = 0$ , sont des fonctions méromorphes de  $\mu$  dans tout le plan, et holomorphes au voisinages de l'origine. Dans le présent travail l'A. étudie les solutions de (1) données par C. Popovici [Acad. Republ. popul. Romine, Bul. ști., Sect. Știi. mat.-fiz. 3, 1867–1869 (1952)] et montre que ces solutions admettent pour pôle ou point singulier essentiel l'origine du plan  $\mu$ . En outre, ces solutions ne vérifient pas la première alternative de Fredholm. L'A. indique ensuite la démonstration de l'unicité de la solution de (1) de la forme (3), donnée par

$$(4) \quad \Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n e^{-\lambda_n z} \left/ \left( 1 - \mu \int_a^b k(s) e^{-\lambda_n s} ds \right) \right.$$

S. Vasilache.

Calderón, A. P.: Singuläre Integrale. 2° Sympos. Probl. mat. Latino América, Villavicencio-Mendoza 21–25 Julio 1954, 319–328 (1954) [Spanisch].

Verf. behandelt (1.) Integralabbildungen der Gestalt

$$(1) \quad \tilde{f}(\xi) = L_k f(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\xi - t| > \varepsilon} \frac{k(\xi - t)}{|\xi - t|^n} f(t) dt,$$

wo z. B.  $\xi$  den Punkt  $(x_1, \dots, x_n)$  des  $E_n$  bezeichnet.  $\xi' = \left( \sum_{h=1}^n x_h^2 \right)^{1/2}$  und  $dt$  das Raumelement von  $E_n$  ist.  $k(\xi)$  ist eine homogene Funktion 0-ten Grades mit der Eigenschaft  $\int_{\Sigma} k(\xi) d\sigma = 0$ , wo  $\Sigma$  die Fläche der Einheitskugel  $|\xi| = 1$ .  $d\sigma$  ihr Element bedeutet. (1) verallgemeinert Hilberts Abbildung

$$\mathfrak{H}(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-t| > \varepsilon} \frac{f(t) dt}{x-t},$$

auf die (1) für  $n = 1$ ,  $k(x) = \operatorname{sgn} x$  zurückkommt. — In 2. nennt Verf. die Hauptsätze  $\mathfrak{S}$  über das Vorhandensein des Bildes (1) zu  $f(t)$  (und seine Klasse). Voraussetzungen dafür sind 2. 1: Stetigkeit der Funktion  $k(\xi)$  für  $\xi = 0$  und ihre Unterwerfung unter eine Lipschitz-Bedingung positiver Ordnung, oder aber — weit schwächer und unabdingbar — 2. 2: Integrierbarkeit der Beträge von  $k_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{2} [k(\xi) - k(-\xi)]$  und  $k_p(\xi) \log k_p(\xi)$ , wo  $k_p(\xi) = \frac{1}{2} [k(\xi) + k(-\xi)]$ , über  $\Sigma$ . Beispiele solcher  $\mathfrak{S}$ : (Gilt 2. 1 und ist  $f$  integrierbar, so ist (1) in fast allen Punkten von  $E_n$  vorhanden. Ebenso, wenn 2. 2 gilt und  $f \in L^p$ ,  $1 < p < \infty$ . Bei 2. 9 vermißt der Leser Erklärung des Zeichens  $f_\varepsilon$ , nach dessen Gebrauch  $k_\varepsilon$  auf S. 323, Z. 7 erklärt wird. Dem Ref. scheint, daß in 2. 7 dem letzten  $f$  auf Z. 1 und dem ersten  $f$  auf Z. 2 der Zeiger  $\varepsilon$  fehle. Als Beispiel eines der zu benutzenden Verfahren wird Satz 2. 7 für ungerade Kerne bewiesen. 3. betrifft die algebraische Seite der Fragestellung. Verf. betrachtet Operatoren  $\mathfrak{Q} = \lambda I - L_k$ , wo  $I$  der Einheitsoperator,  $\lambda$  ein Festwert und  $\mathfrak{K} = \int_{\Sigma} |k(\xi)|^q d\sigma < \infty$  ist, mit festem  $q > 1$ . Solche  $\mathfrak{Q}$  sind in  $L^p$ ,  $1 < p < \infty$ , stetig und bilden einen linearen Raum. Sie bilden aber auch eine Algebra  $(A, \mathfrak{A})$ : der Malwert zweier von ihnen ist wieder von der Art  $\mathfrak{Q}$ . Bei der Normung  $\|\mathfrak{Q}\| = \|\lambda - \mathfrak{K}\|^{1/q}$  ist  $\mathfrak{A}$  sogar eine vollständige, halb-einfache Banachsche A. mit vertauschbaren Malteilen. Der Raum ihrer Größtideale ist  $\Sigma$ , und  $\mathfrak{Q}^{-1}$  ist vorhanden. — 4. Verf. wendet das Gefundene auf das logarithmische Potential an. — Zum Schluß geht er auf integrallose Abbildungen der Art

$$\tilde{x}(l) = \sum_{m(\neq l)} \frac{k(l-m)}{|l-m|^n} x(m)$$



n, wo  $l, m$  Punkte von  $E_n$  mit ganzen Koordinaten sind (Verallgemeinerung der Hilbertschen Abbildung  $\tilde{x}_l = \sum_{m \neq l} \frac{x_m}{m-l}$ , in der  $x_m = \infty$   $m = \infty$ , eine Folge komplexer Zahlen ist). Er befaßt sich mit den Multiplikatoren vielfacher Fourierscher Reihen, stellt also zu der Reihe  $f(x) = \sum c(l) e^{i(l \cdot x)}$  die abgewandelte  $\tilde{f}(x) = \sum c(l) h(l) e^{i(l \cdot x)}$  her mit  $h$  als Fourierschem Bilde von  $k(x) = |x|^{-n}$ . *L. Koschmieder*.

**Mukminov, B. R.:** Über die Entwicklung nach Eigenfunktionen dissipativer Kerne. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 99, 499–502 (1954) [Russisch].

Ein dissipativer Kern  $K(x, y)$  ( $a \leq x, y \leq b$ ) ist ein solcher, für den  $K(x, y) - K(y, x)$  hermitesch-nichtnegativ ausfällt. Ein dissipativer Kern  $K(x, y)$ , für den  $\int_a^b \int_a^b K(x, y)^2 dx dy < \infty$ ,  $\int_a^b \operatorname{Im} K(x, x) dx < \infty$  gilt, definiert

in  $L_2$  einen dissipativen Integraloperator  $g = Kf = \int_a^b K(x, t) f(t) dt$ . Es wird

ein neuer Beweis des Satzes von Livšiz gegeben (dies. Zbl. 57, 100), wonach das System der Hauptfunktionen eines solchen Kernes  $K$  im Wertebereich des Integraloperators  $g = Kf$  genau dann vollständig ist, wenn in der stets geltenden Beziehung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} \left( \frac{1}{\lambda_n} \right) \leq \int_a^b \operatorname{Im} K(x, x) dx$$
 für die charakteristischen Zahlen  $\lambda_n$  des Kernes

das Gleichheitszeichen besteht. Der Beweis ist insofern einfach, als er nur die Hilfsmittel der Theorie der Orthogonalfunktionen und der linearen Operatoren benötigt, nicht aber die Theorie der charakteristischen Matrixfunktion. Ferner wird der Begriff eines fast orthonormierten Systems von Funktionen  $\{q_n\}$  in einem Raum  $H$ , der die abgeschlossene Hülle des Wertebereiches des Operators darstellt, eingeführt

durch die Forderung: für jede lineare Kombination  $f = \sum_{n=1}^N c_n q_n$  der Elemente

des Systems gilt  $m \|f\|_H^2 \leq \sum_{n=1}^N |c_n|^2 \leq M \|f\|_H^2$  mit positiven Konstanten  $m$  und  $M$ . Es werden die Sätze angegeben: Jede Funktion aus  $H$  läßt sich im Sinne mittlerer

quadratischer Konvergenz in eine Reihe entwickeln, die nach den Funktionen eines vollständigen, fast orthonormierten Systems fortschreitet; für einen Integraloperator  $g = Kf$  mit einem vollständigen dissipativen Kern  $K$  kann es allein durch eine Forderung über die Verteilung der charakteristischen Zahlen erreicht werden, daß das System der Eigenfunktionen des Kernes fast orthonormiert im Raum  $L_2$  ist.

Dazu sind nämlich die Bedingungen hinreichend 
$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{|\lambda_N|}{|\lambda_n|} \frac{|\operatorname{Im} \lambda_n|}{|\lambda_n - \lambda_N|} < C,$$

mit  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \lambda_m \operatorname{Im} \lambda_m}{|\lambda_m - \lambda_m|^2} < \infty$  ( $C$  unabhängig von  $N$ ). Es wird angegeben, daß der Beweis

mit Hilfe des Dreieckmodells eines dissipativen Integraloperators geführt werden kann. Aus diesen Sätzen folgt die Möglichkeit der Entwicklung nach Eigenfunktionen eines vollständigen dissipativen Kernes, wenn seine charakteristischen Zahlen alle

einfach sind und der Bedingung  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} \lambda_n < \infty$ ,  $|\lambda_m - \lambda_n| \geq \delta$  ( $\delta > 0$ ,  $m \neq n$ )

genügen oder wenn sie sich asymptotisch durch Potenzen ganzer positiver Zahlen ausdrücken lassen:  $\lambda_n = C_0 n^{\theta} \{1 + C_1/n + O(1/n^2)\}$  ( $\theta \geq 2$ ,  $C_0 \neq 0$ ,  $C_1$  reelle Konstanten). Am Schluß wird kurz noch eine Folgerung für einen linearen Differential-

operator  $n$ -ter Ordnung  $L(y) = y^{(n)} + \sum_{k=1}^n P_k(x) y^{(n-k)}$  im Intervall  $a \leq x \leq b$

mit bezüglich der Endpunkte  $a$  und  $b$  zerfallenden Randbedingungen, die nicht den

Cauchyschen Bedingungen äquivalent sind, erwähnt durch die Angabe, daß das System seiner Eigenfunktionen fast orthonormiert ist, falls  $\text{Im} (Ly, y) \geq 0$  gilt.

*E. Svensson.*

**Devinatz, A.: Integral representations of positive definite functions. II.** Trans. Amer. math. Soc. **77**, 455—480 (1954).

L'A. continue ses recherches commencées dans un article antérieur (ce Zbl. **5** 338). Il donne d'abord une modification du théorème principal de ce travail antérieur en considérant les fonctions définies sur certains ensembles convexes. Pour le second théorème, soit  $Q$  une partie convexe ouverte du plan complexe, telle que  $0 \in Q$ ,  $\bar{z} \in Q$  si  $z \in Q$  et soit encore  $d^{(k)} = \sup_{z \in Q} |z u_k|$ ,  $0 < s^{(k)} < d^{(k)}/8$ ,  $s = s^{(1)} + i s^{(2)}$

$$Q_s = \{z \in \frac{1}{2}Q \mid z \pm 4s \in \frac{1}{2}Q, \quad z \pm 4\bar{s} \in \frac{1}{2}Q\}$$

( $\{u_k\}$  étant la base de l'espace  $E_n$ , avec les notations de l'article antérieur). Alors une fonction complexe définie et continue sur  $Q$  peut être mise sous la forme

$$\int_{-c}^c \int_a^b e^{x t_1 + i y t_2} d\mu(t_1, t_2) \quad \text{— où } \mu \text{ est une mesure positive bornée, dont le support}$$

est contenu dans l'intervalle  $a \leq t_1 \leq b, -c \leq t_2 \leq c$  — si et seulement si

- (1)  $f(z + \bar{w}) \gg 0$  (positivement définie;  $z, w \in \frac{1}{2}Q$ ),
- (2) il existe une suite de nombres strictement positifs  $r_n \rightarrow 0$  telle que  $\exp(r_n a) \ll f(z + \bar{w} + r_n) \ll \exp(r_n b)$
- (3) il existe une suite  $s_n \rightarrow 0$ , telle que  $s_n = 0$ , si  $c = +\infty$  et  $s_n \neq 0$  si  $c < +\infty$

et que

$$f(z + \bar{w} - i s_n) + f(z + \bar{w} + i s_n) \gg 2 \cos(s_n c) f(z + \bar{w})$$

(pour tous  $z, w \in \frac{1}{2}Q$  tels que  $f$  soit définie). Ce théorème contient comme cas particuliers certains théorèmes de Hausdorff, Bernstein, Widder, Krein, Bochner et Livschitz. Le troisième théorème caractérise par des conditions analogues les fonctions  $f(z)$  de la forme

$\int_a^b \exp(z \cdot t) d\lambda(t)$  définies sur certaines parties convexes de  $Z_{n+m}$  (l'espace des éléments  $z = x + i y$  où  $x \in E_n, y \in E_m$ ), et le quatrième résout un problème des moments

$$\mu_{m,n} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t_1^m \exp(i n t_2) d\mu(t_1, t_2). \quad G. Marinescu.$$

**Arens, R. F. and A. P. Calderón: Analytic functions of Fourier transform.** 2° Sympos. Probl. mat. Latino América, Villavicencio-Mendoza 21—25 Julio 1953 39—52 (1954).

Cameron und Wiener (dies. Zbl. **21**, 322) haben gezeigt, daß unter gewissen Voraussetzungen eine mehrwertige analytische Funktion einer Fourier-Stieltjes-Transformierten (erstreckt über die reelle Achse) wieder eine solche ist. Verff. erweitern dieses Resultat auf lokal kompakte  $\sigma$ -kompakte Abelsche Gruppen und mehrwertige analytische Funktionen von mehreren Variablen.

*G. Doetsch.*

**Rühs, Fritz: Eine Umkehrformel zur Laplace-Transformation.** Wiss. Z. Univ. Rostock, math.-naturw. R. **4**, 23—26 (1954).

Wenn  $F(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} f(\xi) d\xi$  für  $s \geq s_0$  absolut konvergiert, so gilt für alle Punkte der Lebesgueschen Menge von  $f(x)$ :

$$f(x) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{e^{-sx}}{s^{\nu-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (s^2 x)^{n+\nu}}{n! \Gamma(n+\nu+1)} F^{(n)}(s)$$

mit jedem reellen  $\nu \geq 1$ .

*G. Doetsch.*

**Rühs, Fritz: Zur Theorie der Laguerreschen Polynome.** Wiss. Z. Univ. Rostock, math.-naturw. R. **4**, 161—162 (1954).



Wenn  $G(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi/2} f(\xi) d\xi$  für  $s \geq s_0$  absolut konvergiert, so gilt für alle Punkte der Lebesgueschen Menge von  $f(x)$ :

$$f(x) = \lim_{s \rightarrow \infty} s (sx)^x e^{-sx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(x)}(2sx)}{\Gamma(n+1+x)} s^n G^{(n)}(x)$$

ist jedem reellen  $x \geq 0$  ( $L_n^{(x)}$  = verallgemeinertes Laguerresches Polynom).

*G. Doetsch.*

Bose, S. K.: Laplace transform and self-reciprocal functions. *Ganita* 5, Nr. 1, 5—32 (1954).

Fünf Sätze von folgendem Typus: Wenn  $t f_2(t)$  und  $q_2(p)$ ,  $f_3(t)$  und  $q_3(p)$ ,  $f_2(t)$  und  $F(p)$  durch Laplace-Transformation zusammenhängen, wobei

$F(v) = \int_0^\infty f_3(z) (v+z)^{-1} q_2(v+z) dz$  ist, und wenn  $t^{-n+1/2} q_3(t) f_2(t)$  selbst-

reziprok in der Hankel-Transformation der Ordnung  $n-1$  ist, so ist  $t^{n-3/2} F(t)$  selbstreziprok in der Hankel-Transformation der Ordnung  $n$ .

*G. Doetsch.*

Bose, B. N.: Certain theorems on self-reciprocal relationship in operational calculus. II. *Bull. Calcutta math. Soc.* 46, 201—215 (1954).

Verf. verallgemeinert seine Ergebnisse (dies. Zbl. 48, 346) über die selbstreziproke Beziehung in der sin- und cos-Transformation zwischen Funktionen, die durch eine Folge von Beziehungen in der Laplace-Transformation verbunden sind, sowie dies. Zbl. 56, 333) über selbstreziproke Funktionen in der Hankel-Transformation.

*G. Doetsch.*

Kumar, Ram: A self-reciprocal function. *Ganita* 5, Nr. 1, 53—59 (1954).

Ist  $A_r =$

$$x^r \Gamma(x) \prod_{n=1}^{r-1} \Gamma\left(1 - \frac{1}{2} \mu_1 - \frac{1}{2} \mu_n\right) \Gamma\left[1 - \left(2 - x + \mu_1\right)\right] \prod_{n=2}^r \left[1 - \left(1 + \frac{1}{2} \mu_1 - \frac{1}{2} \mu_n\right)\right],$$

$$B_r = 2^{-2x + \mu_1 + 1} \Gamma(2x - 1 - \mu_1) \prod_{n=1}^{r-1} \Gamma\left(x - \frac{1}{2} \mu_1 + \frac{1}{2} \mu_n\right) \prod_{n=1}^r \left[1 - \left(x - \frac{1}{2} \mu_1 - \frac{1}{2} \mu_n\right)\right]$$

und  $\mu_1, \dots, \mu_r > -\frac{1}{2}$ ,  $\operatorname{Re} x > 0$ , so ist die Funktion

$$A_r x^{\mu_1 + 1/2} {}_rF_r \left[ \begin{matrix} \alpha, 1 + \frac{1}{2} \mu_1 + \frac{1}{2} \mu_1, \dots, 1 + \frac{1}{2} \mu_1 + \frac{1}{2} \mu_{r-1} \\ 2 - x + \mu_1, 1 + \frac{1}{2} \mu_1 - \frac{1}{2} \mu_2, \dots, 1 + \frac{1}{2} \mu_1 - \frac{1}{2} \mu_r \end{matrix} ; (-1)^{r-1} x^{2/2} \right]$$

$$B_r x^{2x - \mu_1 - 3/2} {}_rF_r \left[ \begin{matrix} 2x - 1 - \mu_1, x - \frac{1}{2} \mu_1 + \frac{1}{2} \mu_1, \dots, x - \frac{1}{2} \mu_1 + \frac{1}{2} \mu_{r-1} \\ x - \frac{1}{2} \mu_1 - \frac{1}{2} \mu_1, x - \frac{1}{2} \mu_1 - \frac{1}{2} \mu_2, \dots, x - \frac{1}{2} \mu_1 - \frac{1}{2} \mu_r \end{matrix} ; (-1)^{r-1} x^{2/2} \right]$$

sein eigenes Bild bei der Hankelschen Abbildung der Ordnung  $\mu_r$ . Beweis durch Induktion in bezug auf  $r$ .

*L. Koschmieder.*

Meyer, J. A.: Generalization of the Gross-transformation. *Anais Acad. Brasil. Ci.* 26, 375—380 (1954).

Die beobachtete Intensität der kosmischen Strahlung  $N(x)$  hängt mit der Ver-

breitungsintensität  $I(x)$  zusammen über  $N(x) = c \int_x^\beta I(x' \cos \theta) f(\theta) d\theta$ ,  $x$  = durch-

laufene Materiemenge,  $f(\theta)$  ist eine durch den Detektor bestimmte Funktion. Die unbekannte  $I(x)$  wird mit Hilfe der Mellin-Transformierten auf ein Kurvenintegral in der komplexen Ebene für beliebiges  $f(\theta)$  zurückgeführt. Das Ergebnis wird an verschiedenen Beispielen für  $N(x)$  und  $f(\theta)$  diskutiert.

*O. Höcker.*

## Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

● Centro Internazionale Matematico Estivo (C. I. M. E.): Analisi funzionale. (Ciclo-Varenna, Villa Monastero 9—18 giugno 1954.) Roma: Istituto Matematico dell'Università 1954. 5 nr.

Die Arbeiten werden in diesem Zbl. einzeln angezeigt.

• **Grothendieck, A.: Espaces vectoriels topologiques.** São Paulo: Instituto de Matematica da Universidade de São Paulo 1954. 15, XIV, 187, 52 p. hektographiert.

Ce livre est rédigé d'après un cours professé par l'A. à la Faculté des Sciences de São Paulo et contient essentiellement la même matière que le livre de N. Bourbaki „Espaces vectoriels topologiques“ (ce Zbl. 50, 107), dont le contenu était évidemment connu à l'A. La manière d'exposition est néanmoins personnelle et quelquefois plus directe que celle de N. Bourbaki. La marche des raisonnements est très claire et facile à suivre. La matière est divisée comme il suit (nous donnons seulement les titres les plus significatifs): Chapitre 0 (écrit par Barros Neto). Introduction topologique: borne supérieure d'une famille de topologies, limite projective, espaces précompacts,  $\sigma$ -convergence). Chapitre 1. Propriétés générales: définition générale d'un espace vectoriel topologique, applications linéaires continues, espaces séminormés, espaces localement convexes (remarquons ici que les espaces localement convexes sont définies directement par des familles de semi-normes, ce qui apporte une certaine simplification), espaces de fonctions continues, espaces de fonctions différentiables, théorème des homomorphismes et du graphe fermé, théorème de Banach-Steinhaus (dans une formulation différente de celle de N. Bourbaki, plus approché du véritable théorème de Banach-Steinhaus). Chapitre 2. Théorèmes de dualité Hahn-Banach, Mackey, transposée d'une application linéaire, caractérisation des homomorphismes, cas particulier des espaces de Banach. Chapitre 3. Espaces d'applications linéaires: ensembles bornés, équicontinus, théorème de Banach-Steinhaus, Mackey, applications linéaires dans certains espaces fonctionnels, fonctions vectorielles différentiables. Chapitre 4. Classes spéciales d'espaces: espaces  $LF$ , espaces métrisables, espaces  $DF$ , espaces quasi-normables, espaces de Schwarz. Chapitre 5. Compacité dans les espaces localement convexes: théorème de Krein-Milman, opérateur compacts (théorie de Riesz), théorèmes de Smulian, Eberlein, Krein, compacité faible dans  $L^1$ . G. Marinescu.

**Grothendieck, A.: Quelques points de la théorie des produits tensoriels topologiques.** 2° Sympos. Probl. mat. Latino América, Villavicencio-Mendoza 21—25 Julio 1954, 173—177 (1954).

Bericht über einige, bereits veröffentlichte Resultate der Untersuchungen der Verf. über Tensorprodukte topologischer Vektorräume und die Theorie lineare Operatoren. Es kann auf die ausführlichen Besprechungen in dies. Zbl. 55, 97, 336 64, 355 hingewiesen werden. H. Bauer.

**Köthe, Gottfried: Die Theorie der lokal konvexen Räume und ihre Anwendungen in der Analysis.** Gaz. Mat., Lisboa 15, Nr. 59, 1—5 (1954) [Portugiesisch].

Aperçu du développement de la théorie des espaces vectoriels topologiques et de ses applications à plusieurs branches de la mathématique. Comme exemple, l'A. expose une question concernant les distributions de frontière (Randverteilungen) étudiée par lui antérieurement (ce Zbl. 47, 352). A. Pereira Gomes.

**Andô, Tsuyoshi: Note on linear topological spaces.** Proc. Japan Acad. 30 435—436 (1954).

Let  $E$  and  $F$  be separative convex linear topological spaces,  $L(E, E)$  be the ring of all continuous linear mappings of  $E$  into itself and  $L(F, F)$  be defined in the same way. The author proves that if  $L(E, E)$  and  $L(F, F)$  are algebraically ring-isomorphic then there exists an algebraic isomorphism  $q$  of  $E$  onto  $F$  and  $\tilde{q}$  of  $E'$  onto  $F'$  such that  $\langle x, x' \rangle = \langle q(x), \tilde{q}(x') \rangle$  holds. Moreover, if we consider natural topology in  $L(E, E)$  and in  $L(F, F)$  then the topological isomorphism of  $L(E, E)$  and  $L(F, F)$  implies the topological isomorphism of  $E$  and  $F$ . Y. Kawada.

**Lorch, Edgar R.: Anelli normati.** C. I. M. E., Analisi funzionale, 33 p. (1954) Article d'exposition. Titres des nos: espaces de Banach, espace dual d'un espace de Banach, anneaux normés, représentation régulière d'un anneau normé, idéaux d'un anneau normé, anneau quotient, homomorphismes d'un anneau normé.

dans le corps complexe, exemples et applications, radical d'un anneau normé, représentation d'un anneau normé abstrait dans un anneau de fonctions continues sur un espace compact, anneaux de fonctions [soient  $E$  un ensemble,  $R$  un anneau de fonctions numériques complexes bornées sur  $E$ , normé par  $\|f\| = \sup |f(x)|$ , séparant les points, stable par conjugaison, et tel que  $\inf |f(x)| > 0 \Rightarrow 1/f \in R$ ; alors,  $R$  est isomorphe à l'anneau des fonctions continues sur son spectre]. *J. Dixmier.*

**Carleson, Lennart:** On generators of normed rings. 12. Skand. Mat.-Kongr., Lund 1953, 16—17 (1954).

Vorläufige Mitteilung.

**Ionescu Tulcea, C. T.:** Théorèmes ergodiques. Revista Univ. C. I. Parhon Politehn. București, Ser. Ști. Natur. 3, Nr. 4-5, 65—68 u. russ. u. französ. Zusammenfassg. 69 (1954) [Rumänisch].

Soit  $G$  un groupe abélien localement compact,  $\mu$  une mesure de Haar de  $G$  et  $U_t$  une représentation faiblement continue de  $G$  dans le groupe des opérateurs unitaires d'un espace hilbertien séparable  $H$ . Désignons par  $\mathcal{F}$  une famille filtrante de voisinages compacts de  $e$  et pour tout voisinage compact  $V$  de  $E$ , par  $M(V)$ , l'opérateur défini par les égalités  $M(V) = \frac{1}{\mu(V)} \int_V U_t x(y) d\mu(t)$ . Considérons les conditions: (K) pour tout  $t \in G$  on a  $\lim_{V \in \mathcal{F}} (V - \{V - t\}) \mu(V) = 1$ ; (T)  $\mathcal{F}$  est totalement ordonnée et contient une partie cofinale dénombrable  $\mathcal{F}_0$  telle que  $\bigcup_{V \in \mathcal{F}_0} V = G$ . L'A. démontre

les deux propositions suivantes: (I) Si  $\mathcal{F}$  a la propriété (K), on a pour tout  $x \in E$ ,  $\lim_{V \in \mathcal{F}} M(V)x = Px$  où  $P$  est un projecteur de  $H$ ; (II) Si  $\mathcal{F}$  a les propriétés (K) et (T) il existe un ensemble  $A \subset G$  de densité 1  $\left( \lim_{V \in \mathcal{F}} \mu(A \cap V)/\mu(V) = 1 \right)$  tel

que, quels que soient  $x, y \in H$ ,  $(U_t x, y)$  converge vers  $(Px, y)$  suivant le filtre sur  $A$  ayant pour base  $\{A \cap V \mid V \in \mathcal{F}\}$ . La proposition (II) généralise aux groupes un résultat démontré par J. von Neumann et B. O. Koopman pour  $G = R$ .

*G. Marinescu.*

**Laflleur, Ch.:** Propriétés de la fonction impulsive de Dirac et applications. Revue H. F., Electronique, Courants faibles, Bruxelles 2, 7 p. (1954).

Der Verf. stellt die Eigenschaften der Distribution  $\delta(x)$  zusammen. Durch vollständigen Verzicht auf mathematische Strenge soll die heuristische Betrachtung die nötige Klarheit schaffen. Die Anwendungen betreffen die von C. E. Shannon [Proc. Inst. Radio Eng. 37 (1949)] abgeleiteten Sätze über zeitbeschränkte Funktionen und ihre Spektren bzw. frequenzbeschränkte Spektren und die zugehörigen Zeitfunktionen. Der hieraus folgende Satz über die Darstellbarkeit einer Funktion  $f(t)$  mit frequenzbeschränktem Spektrum  $g(\omega)$  mit  $g(\omega) = 0$  für  $|\omega| > \Omega$  als unendliche Summe von  $\sin \Omega t / \Omega t$ -Impulsen zeigt, daß die im Theorem IV aufgestellte Behauptung falsch ist.

*F. Selig.*

**Horváth, J.:** Hilberttransformierte von Distributionen. 2. Sympos. Probl. mat. Latino América, Villavicencio-Mendoza 21—25 Julio 1954, 61—70 (1954) [Spanisch].

Auseinandersetzung, ohne Beweise, einiger Ergebnisse einer späteren Arbeit (s. dies. Zbl. 70, 338).

*J. Horváth.*

**Cotlar, Misha:** Das Momentenproblem und die Theorie der hermiteschen Operatoren. 2. Sympos. Probl. mat. Latino-América, Villavicencio-Mendoza 21—25 Julio 1954, 71—85 (1954) [Spanisch].

Geschichtliche Übersicht der Entwicklung des Momentenproblems.

*J. Horváth.*

**Gautschi, Walter:** Über eine Klasse von linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten. Commentarii math. Helvet. 28, 186—196 (1954).



Es sei  $\theta$  ein linear homogener Funktionaloperator, also  $\theta(au + bv) = a\theta u + b\theta v$  für Konstante  $a, b$  und Funktionen  $u(x), v(x)$  einer Variablen,  $A$  eine konstante quadratische Matrix und  $U(x)$  ein — im folgenden unbekannter — Funktionsvektor der Dimension  $n$ , ferner  $q(u, t) = \hat{p}_0(u)t^m + p_1(u)t^{m-1} + \dots + p_m(u) = q_0(u, t)$  mit beliebigen Polynomen  $p_r(u)$  sowie  $q_j(u, t) = (1/j!) D_u^j(\varphi(u, t))$  mit  $D_u = \partial/\partial u$ . Für das — bisher nur für  $m = 1, q(u, t) = t - 1$  untersuchte — System (S)  $q(A, \theta) U(x) = 0$  wird bewiesen: Genügen für irgendeine Konstante  $a$  die Funktionen  $v_{a,i}(x)$  den rekursiven Relationen  $\sum_{j=0}^i \varphi_j(a, \theta) v_{a,i-j} = 0$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) und ist  $\lambda$  ein  $p$ -facher Eigenwert von  $A$ , so hat das System (S) eine Lösung  $U(x) = \sum_{i=0}^{p-1} (A - \lambda I)^i v_{\lambda,i}(x) C$ , wo  $C$  irgendein Lösungsvektor von  $(A - \lambda I)^p C = 0$  ist. Aus derartigen Lösungsvektoren wird im Fall des Differentialoperators  $\theta = D$  und des Verschiebungsoperators  $\theta = E$  die allgemeine Lösung linear zusammengesetzt und für  $\theta = E$  die Lösung eines speziellen inhomogenen Systems in geschlossener Form angegeben.

J. Weissinger.

**Bajraktarević, Mahmud:** Sur certaines suites itérées. Thèse (Paris). Belgrad 1954. 35 p.

In dieser Dissertation stellt Verf. im wesentlichen seine früher bereits gewonnenen Ergebnisse (dies. Zbl. 50, 119) zusammen und modifiziert die Beweise. H. Töpfer.

**Pi Calleja, Pedro:** Die Funktionalgleichungen der Theorie der Größen. 2<sup>o</sup> Sympos. Probl. mat. Latino América, Villavicencio-Mendoza 21–25 Julio 1954. 199–280 (1954) [Spanisch].

The paper gives a new formulation of the theory of magnitudes related to the one proposed by G. Birkhoff (this Zbl. 66, 422). The results are too long to be summarized here.

M. M. Peixoto.

### Praktische Analysis:

• **Whittaker, Sir Edmund and G. Robinson:** The calculus of observations. A treatise on numerical mathematics. 4<sup>th</sup> ed. London and Glasgow: Blackie and Son 1954.

**Granat, Ju. L.:** Ein Iterationsschema zur Berechnung der Wurzeln von algebraischen Gleichungen hoher Grade und die Konstruktion von Übergangsprozessen. Inženernyj Sbornik 20, 168–176 (1954) [Russisch].

In der Arbeit wird ein Iterationsschema zur Berechnung der Wurzeln algebraischer Gleichungen vorgeschlagen, deren Wurzeln alle in einer Halbebene liegen (wozu angemerkt wird, daß dies nach passender Verschiebung des Anfangspunktes immer der Fall ist). Zugrunde liegt der Methode eine Ausnutzung des bekannten Divisionschemas eines Polynoms durch ein lineares Binom (das sogen. Horner'sche Schema) zur Berechnung einer reellen Wurzel, und eine Entwicklung des Horner'schen Schemas für den Fall der Division durch ein quadratisches Trinom zur Berechnung von Paaren von Wurzeln. Diese Schemata werden auch zur Herstellung von Übergangsverfahren benutzt. [Übersetzung des Resumé.] — Die Arbeit wimmelt von Druckfehlern und die theoretischen Ausführungen sind unverständlich. — Das vorgeschlagene rekursive Divisionsverfahren kann etwa folgendermaßen beschrieben werden. Sei  $F(x) = a_0 x^n + \dots + a_n$ ,  $F^*(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$  ( $F^{**} = F$ ). Ferner wenn  $f_k(x) = c_0 x^m + \dots + c_m$ , so sei  $f_{k1}(x) = c_0^{-1} f_k(x)$  und  $f_{k1}^*(x) = c_0^{-1} f_k^*(x)$ . Mit  $q_k(x)$  werde der ganz-rationale Quotient bei der Division von  $F(x)$  durch  $f_{k1}(x)$  bezeichnet, wobei der Rest vom Grade  $< m$  ist; und mit  $f_{k+1}^*(x)$  der ganz-rationale Quotient vom Grade  $m$ , der entsteht bei der Division von  $F^*(x)$  durch  $q_{k+1}^*(x)$ , mit einem Rest vom Grade  $r$ , wo  $m + 1 \leq r \leq n$  (?) [Fragezeichen des Referenten]. So sind zwei Folgen von Polynomen  $q_k(x)$  und  $f_k(x)$  rekursiv

definiert. Es wird behauptet, daß, falls diese die Grenzwerte  $q(x)$ , bzw.  $f(x)$  besitzen, dann  $F(x) = C q(x) f(x)$ . Der Vorgebrachte „Beweis“ scheint dem Ref. nicht schlüssig zu sein. Die nachfolgenden Beispiele tragen zur Erläuterung nicht bei.

H. Schwerdtfeger.

Kiss, I.: Über eine Verallgemeinerung des Newtonschen Näherungsverfahrens. Z. angew. Math. Mech. **34**, 68—69 (1954).

Ausgehend von einer von Gornstein gegebenen Formel, bei der der Faktor  $1/f'$  der Newtonschen Näherungsformel durch ein Polynom ersetzt wird, werden hier die in diesem vorkommenden Koeffizienten mittels der Cramerschen Regel bestimmt. Verf. kommt so zu Formeln, deren Konvergenzgrad 2, 3, 4 bzw. 5 ist.

F.-A. Willers.

Carrier, G. F.: Boundary layer problems in applied mathematics. Commun. pure appl. Math. **7**, 11—17 (1954).

An typischen Beispielen gewöhnlicher Differentialgleichungen vom Grenzschiebt-Typus wird gezeigt, wie die „Grenzschiebt-Methoden“ (vgl. Beitrag des Verf., dies. Zbl. **51**, 423) auf Probleme angewandt werden kann, welche von M. J. Lighthill (dies. Zbl. **35**, 205) mit der von ihm entwickelten erweiterten Störungsmethode mit Erfolg behandelt werden konnten. Am Beispiel der van der Polschen Gleichung zeigt es sich, daß die Grenzschiebt-Methode auch noch in manchen Fällen angewandt werden kann, in denen die Lighthillsche Methode versagt. Verf. empfiehlt die kombinierte Verwendung beider Verfahren unter Ausnutzung ihrer jeweiligen Vorteile, die er zusammenfassend herausstellt.

H. Görtler.

Lopšić, A. M.: Eine numerische Methode zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenebenen eines linearen Operators. Trudy Sem. vektor. tenzor. Analizu **7**, 233—259 (1949) [Russisch].

The paper is concerned with finding all characteristic values of an arbitrary real matrix  $A$  of order  $n$  and the corresponding invariant manifolds. The method is that wherein starting with an arbitrary vector  $a$  the first  $m$  linearly independent vectors  $b_k = A^k a$  are formed:  $\sum_{k=0}^m \alpha_k b_{m-k} = 0$ . It is shown that  $m < n$  is to be expected when  $n$  is sufficiently large and computations are performed with a fixed degree of accuracy. Development of suitable procedures to be employed when  $m < n$ , and appropriate geometric formulation of the situations that arise, constitute the principal part of the paper. The better known case  $m = n$  is also fully treated. Two methods are given for finding  $m$  and the  $\alpha_k$  for any given sequence of vectors  $b_k$ . They are compared by enumeration of operations and by consideration of phenomena which occur in applying them to the present problem. The difference quotients of successive orders for the polynomial  $q(\lambda) = \sum_{k=0}^m \alpha_k \lambda^{m-k}$  play a prominent rôle throughout the paper which is very closely related to but not dependent upon the work of K. A. Semendiaev [Priklad. Mat. Mech. **7**, 193—222 (1943)].

R. Church (Math. Rev. **13**, 991).

Ionescu, D. V.: Une généralisation d'une propriété intervenant dans la méthode de Runge-Kutta pour l'intégration numérique des équations différentielles. Acad. Republ. popul. Romîne, Bul. ști., Sect. Ști. mat. fiz. **6**, 229—240, russ. u. französ. Zusammenfassg. 240—241 (1954) [Rumänisch].

Soit l'équation différentielle (1)  $Y' = q(X, Y)$ , où  $q(X, Y)$  est analytique dans le carré  $|X - x| < r$ ,  $|Y - y| < r$ . Si  $Y(X)$  est l'intégrale de (1) telle que  $Y(x) = y$ , la fonction de  $h$ :  $Y(x + h) - Y(x)$  admet un développement en série suivant les puissances de  $h$  qui est convergent pour  $0 \leq h < r_1 < r$ . Le problème que se pose l'A. est de déterminer une fonction analytique  $K(h)$  dont le développement suivant les puissances de  $h$  ait les  $m$  premiers termes identiques à ceux du développement de  $Y(x + h) - Y(x)$ . Il y arrive par un procédé régulier, en partant d'une formule de

quadrature à  $n$  noeuds qui est exacte pour des polynomes de degrés  $p \leq n - 1$ . On considère spécialement les cas où  $p = 1, 2, 3, 4$ . C. Jacob.

**Horvay, G. and F. N. Spiess: Orthogonal edge polynomials in the solution of boundary value problem.** Quart. appl. Math. **12**, 57—69 (1954).

Si illustra con numerosi esempi, senza peraltro discuterne a priori l'efficacia, un metodo per la risoluzione numerica approssimata dei problemi al contorno per le equazioni a derivate parziali. Nell'esempio più semplice (equazione  $\Delta_2 u = 0$  nell'intervallo piano  $a' \leq x \leq a''$ ,  $b' \leq y \leq b''$ ), si immagina che la soluzione  $u(x, y)$  sia sviluppata in serie di Fourier  $\sum_{k=1}^{\infty} U_k(x) v_k(y)$  rispetto ad un sistema di polinomi  $\{v_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$  ortonormale e completo sull'intervallo  $\overset{a''}{\underset{b''}{b' \leq y \leq b''}}$ , e si cerca di determinare i coefficienti minimizzando l'integrale  $\int_{a'}^{a''} dx \int_{b'}^{b''} [u_x^2(x, y) + u_y^2(x, y)] dy$ ; ponendo in prima approssimazione

$$\begin{aligned} \int_{b'}^{b''} \left\{ \left[ \sum_{k=1}^{\infty} U'_k(x) v_k(y) \right]^2 + \left[ \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x) v'_k(y) \right]^2 \right\} dy \\ = \int_{b'}^{b''} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} [U'_k(x) v_k(y)]^2 + \sum_{k=1}^{\infty} [U_k(x) v'_k(y)]^2 \right\} dy \end{aligned}$$

si otterrà per la funzione  $U_k(x)$  l'equazione di Eulero-Lagrange

$$U''_k(x) = U_k(x) \int_{b'}^{b''} [v'_k(y)]^2 dy,$$

con quelle condizioni ai limiti od iniziali che si desumono dalle condizioni al contorno assegnate alla  $u(x, y)$ ; naturalmente anche la scelta del sistema  $\{v_k(y)\}$  è subordinata alle dette condizioni al contorno. L'idea del metodo è da lungo tempo sfruttata, presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo (cfr. p. es. M. Picone, questo Zbl. **16**, 176) per la risoluzione di equazioni ben più generali, anche non presentatisi come euleriane di particolari funzionali. F. Bertolini.

**Abramowitz, Milton: On the practical evaluation of integrals.** J. Soc. industr. appl. Math. **2**, 20—35 (1954).

An den angewandten Mathematiker tritt gelegentlich die Aufgabe heran, schnell ein Integral auszuwerten, wobei es nicht auf äußerste Strenge ankommt. Dazu muß zunächst festgestellt werden: Die Existenz des Integrals, die Reihe der auftretenden Parameter und die wesentlichen Parameter, ferner muß das Integral auf die einfachste Form reduziert werden und, wenn numerische Werte erforderlich sind, die Genauigkeit festgelegt werden. Im einzelnen werden einige Beispiele behandelt: 1. Die Reduktion komplizierter auf bekannte Formen, 2. die Auswertung durch Grenzprozesse, 3. die Benutzung von Funktionalbeziehungen, 4. die Kombination einer Funktionalbeziehung mit gliedweiser Integration, 5. Auswertung einzelner Teile, 6. Reduktion auf eine Differentialgleichung, 7. Methode der Laplace-Transformation, 8. Sattelpunktnäherung mit Verbesserung durch die Methode der Differentialgleichung, 9. Umkehrung der Ordnung der Integration und Gebrauch von Konturintegralen. Fr.-A. Willers.

**Chocholle, René: Présentation commode des calculs dans l'analyse et la synthèse harmoniques d'ondes périodiques.** Revue sci. **92**, 3—14 (1954).

Ableitung geeigneter Rechenschemata für die harmonische Analyse und Synthese äquidistanter Wertefolgen, mit besonderer Berücksichtigung der Fälle  $n = 12$  und  $n = 24$ . K. Stumpff.

**Juškov, P. P.: Über die Verbesserung der Konvergenz von Reihen, die sich in der präzisierten harmonischen Analyse ergeben.** Inženernyj Sbornik **19**, 171—178 (1954) [Russisch].



Die angenäherte harmonische Analyse von  $f(x)$  wird aus endlich vielen äquidistanten Werten durchgeführt, indem  $f(x)$  durch Parabelbögen ersetzt wird. Die Konvergenz der Reihe kann dadurch verstärkt werden, daß man die Fourierreihe einer passenden Funktion abzieht, womit die Differenzfunktion stetig differenzierbar wird.

(C. Freud.)

**Bal, Lascu et Ioan Rusu:** Sur un groupement de variables en vue de la construction des nomogrammes composés. Acad. Republ. popul. Romîne, Fil. Cluj, Studii Cerc. şti., Ser. I 5, Nr. 3/4, 45–48 u. russ. u. französ. Zusammenfassg. 48, 49 (1954) [Rumänisch].

Dans la présente note les AA. démontrent le théorème ci-dessous, concernant la séparation des variables, en vue de la construction des nomogrammes composés. Théorème: Les conditions nécessaires et suffisantes afin que, pour l'équation  $F(u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}) = 0$  soit trouvé un système d'équations de la forme  $\dot{z}_i = \varphi_i(\dot{z}_1, u_{r_1-1}, \dots, u_{r_i})$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ),  $\lambda_0 = \text{const.}$ , où  $\lambda_p = u_{n+1}$ , sont

$$\frac{\partial F}{\partial u_{n+1}} \cdot \frac{D(F, \partial F / \partial u_{\beta})}{D(u_{\alpha}, u_{\alpha+1})} = \frac{\partial F}{\partial u_{\beta}} \cdot \frac{D(F, \partial F / \partial u_{n+1})}{D(u_{\alpha}, u_{\alpha+1})}$$

( $\alpha = 1, 2, \dots, r_i - 1$ ) ( $\beta = r_i + 1, \dots, n$ ) ( $i = 1, 2, \dots, p - 1$ ). Französ. Zusammenfassg.

**Cseke, V. et Z. Csendes:** Quelques problèmes pratiques concernant la construction de nomogrammes pour les équations du type  $f_3(w) = f_1(u) \cdot f_2(v)$ . Acad. Republ. popul. Romîne, Fil. Cluj, Studii Cerc. şti., Ser. I 5, Nr. 3/4, 51–57, russ. u. français. Zusammenfassg. 57–58, 58 (1954) [Rumänisch].

Les AA. prennent comme point de départ la méthode pratique de construction des nomogrammes pour les équations (1) et (2), indiquée par Pentkovski (deutsche Übersetzung: Nomographie, dies. Zbl. 51, 352) et démontrent que cette méthode peut s'étendre, en général, à toutes les équations du type (3). Puis ils étudient la forme des fonctions  $f_i$  pour lesquelles la construction de nomogrammes pour l'équation (3), par la méthode indiquée, peut se faire avec succès. Cette étude se fait par l'analyse des caractéristiques logarithmiques des échelles. Les auteurs donnent ensuite un exemple de construction pratique d'un nomogramme pour une équation du type (3), à l'aide duquel il est possible de calculer en même temps l'erreur absolue de la moyenne, l'erreur de la fréquence relative et l'erreur de la valeur moyenne d'un échantillon, en se servant de l'amplitude de ce dernier.

Französ. Zusammenfassg.

**Pearcey, T. and G. W. Hill:** Programme design for the C. S. I. R. O. Mark I computer. III. Adaptation of routines for elaborate arithmetical operations. Austral. J. Phys. 7, 485–504 (1954).

Teil I und II s. dies. Zbl. 52, 136. Der vorliegende Teil III behandelt im wesentlichen die Anwendung der interpretierenden Technik für das Rechnen in erweiterten Zahlbereichen: Um das Programmieren zu vereinfachen, wenn in einem Problem z. B. komplexe Zahlen auftreten oder mehrfache Genauigkeit erforderlich ist, stellt man zuerst ein Pseudoprogramm (hier als „hyperprogramme“ bezeichnet) her. In dieses setzt man komplizierte Operationen, z. B. „Multiplikation mit 3-facher Genauigkeit“ wie normale Operationsbefehle ein, obwohl sie die Maschine nicht direkt ausführen kann (sog. Pseudobefehle). Die Durchführung der Rechnung erfordert dann allerdings ein Superprogramm (hier als „function block“ bezeichnet), welches das Pseudoprogramm absucht und für die erweiterten Rechenoperationen die entsprechenden Unterprogramme aufruft. Die Technik wird eingehend beschrieben und mit Beispielen illustriert. Leider verwenden die Verff. zum Teil abweichende Bezeichnungen, wie „index“ (statt exponent) und „fraction“ (statt mantissa) bei Zahlen mit beweglichem Komma.

H. Rutishauser.

**Pearcey, T., G. W. Hill and R. D. Ryan:** The effect of interpretive techniques on functional design of computers. Austral. J. Phys. 7, 505–519 (1954).

Auf Grund ihrer früheren Untersuchungen über interpretive Programmierungstechnik (siehe vorstehendes Referat) schlagen die Verff. Rechenautomaten mit sehr einfachem Befehlssystem vor. Alle Rechenprogramme sollen als Pseudoprogramme aufgestellt und von der Maschine mittels eines geeigneten Superprogramms interpretiv verarbeitet werden, welches in einem Schnellspeicher permanent gespeichert

ist. Damit zeigt der ganze Vorschlag große Ähnlichkeit mit der Mikroprogramm-technik von Wilkes (dies. Zbl. **51**, 100). H. Rutishauser.

**Clippinger, R. F., B. Dimsdale and J. H. Levin:** Automatic digital computers in industrial research. III—V. J. Soc. industr. appl. Math. **2**, 36—56, 113—131, 184—200 (1954).

Teile I u. II s. dies. Zbl. **53**, 265.

**Moisil, Gr. C.:** L'algèbre des schémas à valves. Revista Univ. C. I. Parhon Politehn. București, Ser. Ști. Natur. **3**, Nr. 4/5, 9—14 u. russ. u. französ. Zusammenfassg. 41—42 (1954) [Rumänisch].

Quand à l'ensemble  $L_2$  formé par le contact électrique ouvert et fermé (qui forme une lattice pour le montage en série et le montage en parallèle) on ajoute les éléments redresseurs, l'ensemble forme un produit cartésien  $L_2^2 = L_2 \times L_2$ , qui est une algèbre de Boole symétrique (où on donne un automorphisme involutif  $S$ ). L'algèbre des contacts et des valves peut être considérée comme un corps d'imaginaires de Galois  $GF(2^2)$ . Dans toute algèbre de Boole symétrique (qui admet un automorphisme involutif), toute expression peut être réduite à une forme canonique disjonctive ou conjonctive. Toute algèbre de Boole symétrique engendre un anneau de caractéristique  $2^2$ . Une algèbre de Boole symétrique est appelée pure, si elle admet des éléments  $\varepsilon$  pour lesquels  $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ . Dans une telle algèbre les coefficients de la forme canonique peuvent être déterminés par les valeurs des fonctions en  $\varepsilon$  et  $\varepsilon + 1$ . Toute algèbre de Boole symétrique finie est un produit cartésien de lattices  $L_2$  et  $L_2^2$  et toute algèbre de Boole symétrique pure est un produit cartésien de lattices  $L_2^2$ .

Autoreferat.

**Moisil, Gr. C.:** L'emploi des imaginaires de Galois dans la théorie des mécanismes automatiques. I. Sur les schémas à soupapes. Comun. Acad. Republ. popul. Romîne **4**, 581—585, russ. u. franz. Zusammenfassg. 585 (1954) [Rumänisch].

L'A. indique à propos de ses recherches sur les mécanismes automatiques, une interprétation de l'algèbre de Boole à quatre éléments; d'après l'A., on peut toujours organiser un tel système en tant que champ de Galois  $GF(2^2)$ . M. Benado.

**Moisil, Gr. C.:** L'emploi des imaginaires de Galois dans la théorie des mécanismes automatiques. II. Schémas à deux éléments intermédiaires. Comun. Acad. Republ. popul. Romîne **4**, 587—588, russ. u. franz. Zusammenfassg. 588, 589 (1954) [Rumänisch].

On montre que l'étude des mécanismes à contacts et relais à deux éléments intermédiaires se ramène à l'étude d'une certaine équation de récurrence dans un champ de Galois  $GF(2^2)$ . M. Benado.

**Moisil, Gr. C.:** Théorie algébrique du fonctionnement en plusieurs temps des schémas à contacts et relais à deux éléments intermédiaires. Acad. Republ. popul. Romîne, Fil. Chuj. Studii Cerc. ști., Ser. I, **5**, Nr. 3/4, 7—13 u. russ. u. französ. Zusammenfassg. 13, 14 (1954) [Rumänisch].

Pour étudier le fonctionnement d'un schéma à contacts et relais l'A. propose l'emploi des corps finis (Galoisfeld)  $GF(2^n)$ . Dans ce travail il s'occupe des schémas à deux relais, à l'aide de  $GF(2^2)$ . Le fonctionnement de chaque schéma est décrit par une relation de récurrence dans  $GF(2^2)$ . Il définit l'isomorphisme du fonctionnement de deux schémas et classifie les fonctionnements autonomes des schémas à deux relais, par rapport au groupe octaédrique des permutations des positions des contacts.

Autoreferat.

● Table of sine and cosine integrals for arguments from 10 to 100. (National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 32.) Washington: The Government Printing Office 1954. 187 p. \$ 2.25.

Inhalt:  $\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u} du$  und  $\text{Ci}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\cos u}{u} du$  für  $x = 10(0,01)100$

mit 10 Dezimalen und zweiten Differenzen:  $n \cdot \frac{1}{2} \pi$  für  $n = 1(1) 100$  mit 14 Dezimalen; Interpolationskoeffizienten:  $\frac{1}{2} p(1-p)$  und Everettsche Koeffizienten  $E_2(p), F_2(p)$  für  $p = 0(0,01) 0,50$ . Fehler der kubischen Interpolation  $\approx 1,2 \cdot 10^{-10}$ , teilweise quadratische Interpolation ausreichend. Für die Berechnung von  $\text{Si}(x)$  und  $\text{Ci}(x)$  für  $x = 100$  sind asymptotische Formeln angegeben. H. Unger.

● **Lösch, Friedrich: Siebenstellige Tafeln der elementaren transzendenten Funktionen.** Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1954. VIII, 335 S. Ganzleinen DM 49,80.

Obwohl in den letzten Jahren zahlreiche ausführliche Tabellenwerke über die elementaren transzendenten Funktionen erschienen sind, dürften diese neu zusammengestellten, handlichen und vom Verlag vorzüglich ausgestatteten Tafeln manchem Techniker willkommen sein. Dem Verf. dienten hierbei die Tafeln Hayashis aus dem Jahre 1926 als Vorbild. Um den Bedürfnissen des Rechners entgegenzukommen, wurde die Stellenzahl fast durchweg auf 7 Dezimalen beschränkt und der Tafelschrift entsprechend klein gewählt, um mit linearer Interpolation auszukommen. Zur Erleichterung werden die ersten Differenzen in den Tabellen mit aufgeführt. Aufnahme in diesem Tafelwerk fanden: Neunstellige Werte der elementaren transzendenten Funktionen für  $x = 0(0,0001) 0,1$ ; siebenstellige Werte der elementaren transzendenten Funktionen für  $x = 0,1(0,0005) 3,15$ ;  $x = 3(0,01) 10$ ;  $x = 10(0,1) 20$ ; Werte von  $\text{tg } x$  für  $x \approx \frac{1}{2} \pi$ ; Werte von  $\text{Ar } \text{tg } x$  und  $\text{Ar } \text{Ctg } x$  für  $x \approx 1$ . — Siebenstellige Werte elementarer Funktionen für  $x = 0(1) 100$ ; zwölfstellige Werte von  $\frac{1}{2} \pi n$  für  $n = 0(1) 100$ ; siebenstellige Werte der Funktionen  $\sin \frac{1}{2} \pi x$ ,  $\cos \frac{1}{2} \pi x$  für  $x = 0(0,001) 0,5$ ; siebenstellige Werte der Funktionen  $e^{\pi x/2}$ ,  $e^{-\pi x/2}$ ,  $\text{Sh } \frac{1}{2} \pi x$ ,  $\text{Ch } \frac{1}{2} \pi x$  für  $x = 0(0,01) 2$ ; siebenstellige Werte der Funktionen  $e^{\pi x/180}$ ,  $e^{-\pi x/180}$ ,  $\text{Sh } \frac{1}{180} \pi x$ ,  $\text{Ch } \frac{1}{180} \pi x$  für  $x = 0(1) 180$ ; Umwandlung von Bogenmaß in Gradmaß und umgekehrt; einige oft gebrauchte Zahlenwerte. H. Bilharz.

● **Table of the gamma function for complex arguments.** (National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 34.) Washington: United States Government Printing Office 1954. XVI, 105 p. \$ 2,00.

La tavola fornisce, con 12 decimali, i valori di  $\ln \Gamma(x + iy)$  per  $x, y = 0(0,1) 10$ . Essa è preceduta da un'introduzione (redatta da H. E. Salzer) ove, dopo aver richiamato le principali proprietà della funzione  $\Gamma$ , viene esposto il metodo di calcolo seguito per la costruzione della tavola e vengono descritti i metodi di interpolazione che si debbono usare. Seguono tavole ausiliarie ( $\sin \pi x$ ,  $\cos \pi x$ ,  $\sinh \pi x$ ,  $\cosh \pi x$ ). A. Ghizzetti.

● **Erdélyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi (edited by): Tables of integral transforms. Vol. II.** Based, in part, on notes left by Harry Bateman. (Bateman Manuscript Project, California Institute of Technology.) New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1954. XVI, 451 p.

Der I. Band (dies. Zbl. 55, 364) enthielt Tabellen der Fourier-, Laplace- und Mellin-Transformation, über die es schon vorher weniger umfangreiche Tabellenwerke gab. Der II. Band bringt Tabellen von Integraltransformationen, die vorher noch nicht tabelliert worden waren. Der erste Teil behandelt Transformationen, deren Kerne Besselfunktionen sind, und zwar die Funktionen  $J_\nu$  (Hankel-Transformation),  $Y_\nu$ ,  $K_\nu$ ,  $H_\nu$  (Umkehrung der  $Y$ -Transformation) und  $K_{\nu,\infty}$  (Kontorovich-Lebedev-Transformation), wobei naturgemäß die Hankel-Transformation, die am ausführlichsten in der Literatur studiert worden ist, den breitesten Raum (92 S.) einnimmt. Der zweite Teil enthält unter dem Titel „Miscellaneous Transforms“ die Riemann-Liouvilleschen und die Weylschen Integrale gebrochener Ordnung [erstere über das Intervall  $(0, y)$ , letztere über  $(y, \infty)$  erstreckt], sowie die Stieltjes- und die Hilbert-Transformation, die eng miteinander zusammenhängen. Der dritte Teil, etwas weniger als die Hälfte des Bandes umfassend, stellt Integrale zusammen, die sich nicht unter dem Titel „Integraltransformationen“ unterbringen ließen, und



zwar Integrale, die Orthogonalpolynome, Gammafunktionen, Legendresche Funktionen, Besselsche Funktionen und hypergeometrische Funktionen enthalten. Beide Bände zusammen stellen ein enormes Formelmateriale zur Verfügung, das sowohl dem Theoretiker wie dem Praktiker gute Dienste leisten kann. *G. Doetsch.*

● **Crelle's Rechentafeln, welche alles Multiplizieren und Dividieren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei größeren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen. Neue Ausgabe, besorgt von O. Seeliger. Mit Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen 1 bis 1000.** Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1954. VII, 999 S. Ganzleinen DM 36,—.

**Gorn, Saul:** The automatic analysis and control of computing errors. *J. Soc. industr. appl. Math.* **2**, 69—81 (1954).

Verf. betrachtet bei ausgedehnten Rechnungen folgende drei Arten von Fehlern: 1. „Anfangsfehler“, Fehler in den Ausgangsdaten. 2. „Abrundungsfehler“ bei Multiplikationen, Divisionen  $s$ -stelliger Zahlen und dgl. 3. „Ersatzfehler“ (truncation error), z. B. Quadraturfehler. Verf. stellt als Ideal hin, eine Fehlerrechnung neben der eigentlichen Rechnung nebenher laufen zu lassen, also z. B. bei Berechnung von  $z = x \cdot y$  auch  $|dz| \leq |x| |dy| + |y| |dx| + \beta^{-s}$  zu bestimmen ( $\beta$  als Basis des verwendeten Ziffersystems). Das wird im allgemeinen zu umständlich werden, Verf. gibt aber Beispiele, in denen vereinfachte Fehlergrenzen laufend berechenbar sind; er erwähnt lineare Gleichungssysteme, eine nichtlineare Gleichung für eine Unbekannte und die Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, wo bei jedem Integrationsschritt die Lösung in untere und obere Schranken eingeschlossen wird und jeweils diese Schranken als neue Anfangswerte benutzt werden.

*L. Collatz.*

## Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung:

● **Bangen, Gerd und Richard Stender:** Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. (Schriftenreihe zur Gestaltung des mathematischen Unterrichts. Heft 3.) Frankfurt a. Main: Otto Salle Verlag 1954. 56 S. DM 4,40.

Das Büchlein soll einen Lehrgang der mathematischen Statistik skizzieren, „wie er im wesentlichen mit einer Unterprima durchgeführt wurde“. Um eine solche Unterprima darf man die Verff. wohl beneiden. Leider haben die Unterprimaner keine Bekanntheit gemacht mit dem, was man üblicherweise mathematische Statistik nennt; diese kommt in dem Büchlein nicht zur Sprache. Es ist eine klassische zu klassische Einführung in einige Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Als solche enthält es eine Anzahl besonders hübscher Bemerkungen, die die Unterprimaner begeistert haben müssen und den Didaktiker interessieren werden.

*H. Freudenthal.*

**Lukaes, Eugène:** Sur une caractérisation de la distribution de Poisson. *C. r. Acad. Sci., Paris* **239**, 1114—1116 (1954).

$X$  und  $Y$  seien zwei zufällige Variable.  $\mathcal{E}(Y|X)$  bezeichne den bedingten Erwartungswert von  $Y$  bezüglich  $X$ ,  $\mathcal{E}(Y)$  den Erwartungswert von  $Y$ . Damit die Beziehung  $\mathcal{E}(Y|X) = \mathcal{E}(Y)$  gilt, ist notwendig und hinreichend, daß die Gleichung  $\mathcal{E}(e^{itX} Y) = \mathcal{E}(Y) \mathcal{E}(e^{itX})$  für jeden reellen Wert von  $t$  erfüllt ist. Diese Bedingung ist sehr nützlich, wenn man die Verteilungen bestimmen will, für die zwei Funktionen der Beobachtungen unabhängig sind. Verf. führt zwei Funktionen der Beobachtungen ein,  $L = L(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$  und eine weitere  $S(x_1, \dots, x_n)$ , die einen komplizierteren Aufbau hat. Sind dann  $X_1, \dots, X_n$  zufällige Variable, die nichtnegativ und unabhängig sind und demselben Verteilungsgesetz genügen, existiert ferner das dritte Moment dieser Verteilung, dann ist die notwendige und

hinreichende Bedingung dafür, daß  $X_1, \dots, X_n$  einem Poissonschen Gesetz genügen, die, daß  $\mathfrak{G}(S|L) = \mathfrak{G}(S)$  ist.

*G. Schulz.*

**Wise, M. E.:** The ratio of two factorials and some fundamental probabilities. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 57, 513—521 (1954).

Mit Hilfe einer asymptotischen Entwicklung von  $\binom{N}{n}$ , die nach Quadraten von  $M^{-1} = (N - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2})^{-1}$  fortschreitet und mit

$$\binom{N}{n} = \frac{M^n}{n!} \left( 1 - \frac{(n-1)n(n+1)}{24M^2} + \dots \right)$$

beginnt, werden asymptotische Entwicklungen vom selben Typus für  $\log(N!/(N-n)!)$  und für  $1/\pi$  nebst einer neuen Herleitung der Stirlingschen Reihe für  $\log N!$  angegeben. Es wird ferner gezeigt, daß die Binomialverteilung

$$W(n) = [(2R)!/(R+n)!(R-n)!] p^{R+n} (1-p)^{R-n}$$

für kleinere Werte von  $n$  ( $2R+1$ ) mit einer passend gewählten Gaußschen Verteilung besser approximiert werden kann, als die mit Hilfe der üblichen Methoden erhaltene. Es wird endlich eine stetige Verteilung, die dicht an der Binomialverteilung liegt, angegeben.

*A. Békéssy.*

**Wise, M. E.:** A quickly convergent expansion for cumulative hypergeometric probabilities, direct and inverse. Biometrika 41, 317—329 (1954).

Let a batch of  $N$  elements have a proportion defective  $x$  and let  $P$  be the probability that less than  $p$  defectives will be found in a sample of  $n$ . The probability of that is exactly  $P = \sum_{r=0}^{p-1} \binom{Nx}{r} \binom{N-Nx}{n-r} \binom{N}{n}$  (cumulative hypergeometric distribution).

The author gives the first two terms of an expansion of  $P$  in descending powers of the square of  $N - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$ . The coefficients of the expansion are expressed in terms of incomplete beta functions whose values can be found in tables or may be evaluated from an approximate formula previously published by the author (this Zbl. 41, 391). For the inverse problem — to find  $x$  for known  $P$  —, there is also given an approximate formula. The accuracy of the approximations seems to be satisfactory for practical purposes except where  $P$  is very small or very close to 1.

*A. Békéssy.*

**Ram, Siya:** A note on the calculation of moments of two dimensional hypergeometric distribution. Ganita 5, Nr. 2, 97—101 (1954).

Es wird eine Methode von Romanovsky zur Berechnung der eindimensionalen hypergeometrischen Verteilung, welche es gestattet, die Momente direkt zu berechnen, ohne auf Momente niedriger Ordnung zurückzugreifen, übertragen auf die zweidimensionale hypergeometrische Verteilung. Auch die Übertragung auf mehr Dimensionen, ist, wie Verf. bemerkt, möglich.

*J. Heinhold.*

**Gnedenko, B.:** Kriterien für die Unveränderlichkeit der Wahrscheinlichkeitsverteilung von zwei unabhängigen Stichprobenreihen. Math. Nachr. 12, 29—63 und deutsche Zusammenfassg. 64—66 (1954) [Russisch].

Verf. faßt die eigenen Resultate und die Resultate seiner Mitarbeiter über verteilungsfreie Kriterien zusammen, die an die Sätze von Kolmogoroff und Smirnov anknüpfen. Diese Kriterien behandeln die Frage, ob die Ergebnisse zweier Messungsreihen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  und  $y_1, y_2, \dots, y_m$  Beobachtungswerte derselben Zufallsveränderlichen mit stetiger Verteilung sein können. Es sei  $S_n(x)$  bzw.  $T_m(x)$  die empirische Verteilungsfunktion der Stichproben  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bzw.  $y_1, y_2, \dots, y_m$ . Ist  $m=n$ , so wird die Verteilungsfunktion der Zufallsveränderlichen

$$D_n^+ = \max_{-\infty < x < \infty} \{S_n(x) - T_n(x)\}, \quad D_n^- = \max_{-\infty < x < \infty} \{T_n(x) - S_n(x)\}$$

und  $D_n = \max_{-\infty < x < +\infty} |S_n(x) - T_n(x)|$  und auch die Verteilung der zweidimensionalen

Zufallsveränderlichen  $(D_n^+, D_n^-)$  explizit bestimmt [B. W. Gnedenko, W. S. Koroljuk, E. L. Rvačeva (dies. Zbl. **44**, 136; **46**, 350)]. Die Behandlung ist elementar; die Lösung des Problems wird auf ein Irrfahrtproblem längs einer Geraden, bzw. auf das „Problem des Ruins“ zurückgeführt. Nachher werden die Grenzwerte der Ausdrücke  $P(\sqrt{\frac{1}{2}n} D_n^+ < x)$ ,  $P(\sqrt{\frac{1}{2}n} D_n^- < x)$  und  $P(\sqrt{\frac{1}{2}n} D_n^- < x, \sqrt{\frac{1}{2}n} D_n^+ < y)$  für  $n \rightarrow \infty$  bestimmt. Die ersten beiden sind Spezialfälle einiger Smirnovscher Resultate [dies. Zbl. **22**, 245; **23**, 249; Uspechi mat. Nauk **10**, 179–206 (1944)]; es werden auch asymptotische Ausdrücke für die Fehlerglieder angegeben. Im weiteren beschäftigt sich Verf. mit der Anzahl  $C(n, m)$  der positiven Sprünge der Verteilungsfunktion  $S_n(x)$  in bezug auf  $T_m(x)$ .  $C(n, m)$  ist die Anzahl derjenigen Stellen, für die  $S_n(x_k - 0) \geq T_m(x)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Es wird gezeigt, daß falls  $m = np$  eine ganze Zahl ist, die Relation  $P(C(n, m) = k) = 1/(n+1)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ) gilt (Gnedenko und Michalevič, dies. Zbl. **46**, 351; Chung und Feller, dies. Zbl. **37**, 363). Bezeichnet  $\Lambda_m$  die Projektion derjenigen Punkte  $(x, F(x))$  auf die Ordinatenachse, für die  $F(x) \geq T_m(x)$  gilt, so folgt aus diesem Satz, daß  $\Lambda_m$  eine im Intervall  $(0, 1)$  gleichverteilte Zufallsveränderliche ist (B. W. Gnedenko und W. S. Michalevič (dies. Zbl. **47**, 122)]. Ferner wird die Verteilungsfunktion der Zufallsveränderlichen  $v_n(x)$  bestimmt, wobei  $v_n(x)$  die Anzahl der Schnitte der Kurve der Verteilungsfunktion von  $S_n(x)$  mit der Kurve  $T_m(x) \cdot x^{\frac{1}{2}n}$  bedeutet (W. S. Michalevič, dies. Zbl. **47**, 122). Es bezeichne  $v_n^-$  die Anzahl der Intervalle, in welchen  $D_n^+$  seinen Maximalwert erreicht. Es wird die Verteilungsfunktion von  $v_n^+$  und die zweidimensionale Verteilungsfunktion von  $(n D_n^+, v_n^+)$  bestimmt. Ferner wird (gemeinsam mit Studnev, Dopovidi Akad. Nauk ukraine. RSR **1952**, 359–363 (1952)) die „Range“-Verteilung der Erwartungswerte und der Streuung von  $R_n = D_n^+ + D_n^-$ , der Korrelationskoeffizient zwischen  $D_n^+$  und  $D_n^-$  sowie die Dispersion von  $D_n, D_n^+$  und  $R_n$  bestimmt. Zum Schluß wird die Verteilungsfunktion der Abweichung bzw. der absoluten Abweichung der empirischen Verteilungsfunktionen  $S_n(x)$  und  $T_m(x)$  in einem gegebenen Intervall bzw. außerhalb dieses Intervalles behandelt [Rvačeva, Ukraïn. mat. Žurn. **4**, 373–391 (1952); A. Rényi, dies. Zbl. **52**, 142]. Diese Verteilungen werden für endliches  $n$  bestimmt, der Grenzfall  $n \rightarrow \infty$  wird auch erledigt. Aus den vorigen Resultaten folgt, daß der Grenzwert der Wahrscheinlichkeit von  $S_n(x) \leq T_m(x)$  in einem gewissen Intervall für  $n \rightarrow \infty$  durch das Arcsin-Gesetz bestimmt werden kann [Gnedenko (1949); Gichman, dies. Zbl. **46**, 352].

M. Ziermann.

**Zoraa Terol, Procopio: Bestimmung der Wahrscheinlichkeit innerhalb eines Bereichs mittels der Verteilungsfunktion auf dem Rande.** Revista Acad. Ci. Madrid **48**, 151–169 (1954) [Spanisch].

If  $F(x, y)$  is a two-dimensional distribution function which has continuous partial derivatives  $F_x, F_y$  in the vicinity of a sufficiently regular closed curve  $C$ , the probability  $P(S)$  which  $F$  assigns to the interior  $S$  of  $C$  is given by either of the counterclockwise line integrals  $-\int F_x dx, \int F_y dy$  around  $C$ . Thus  $P(S)$  is determined by the values of  $F$  in the vicinity of  $C$  but not, as shown by an example, by the values of  $F$  on  $C$  alone.

D. Blackwell (Math. Rev. **17**, 47).

**Wise, M. E.: Converting a number distribution of particle size into one for volume or surface area.** Philips Research Rep. **9**, 231–237 (1954).

The author gives a simple numerical procedure for carrying out the operation described by his title without making any assumption about the distribution.

C. A. Rogers.

**Zoraa Terol, Procopio: Superposition of random variables and its applications.** Trabajos Estadist. **5**, 3–65, 169–216 (1954) [Spanisch mit engl. Zusammenfassg.].

This is in effect two loosely related papers, corresponding to the break in pagi-



nation. The first is on transformations of one real or vector random variables into another, except for a considerable digression on the concept of convergence in distribution as applied to vector random variables. The second is on what the author refers to as the superposition of random variables. If the distribution of  $\xi$  is defined in terms of the distribution of  $\eta$  and the distribution of  $\xi$  given  $\eta$ , then  $\xi$  is said to arise from  $\eta$  by superposition. The paper is elementary in that it can be read with little training and, considering its length, contains little that would surprise an expert. It is also elementary in the technical sense of sticking to special features of the real and the vectorial (Jacobians and regularity considerations, for example) in contexts where there is also a discipline of abstract measure spaces. All in all, quite a few remarks and examples seem new to the reviewer. For example  $\xi_n$  converges to  $\xi$  in probability if and only if  $(\xi_n, \xi)$  converges to  $(\xi, \xi)$  in distribution.

*L. J. Savage* (Math. Rev. 16, 722).

**Dugué, D.: Sur la convergence presque complète des moyennes de variables aléatoires. (Théorèmes de Hsu, Robbins et Erdős.)** Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 3, 149—152 (1954).

Eine Reihe von zufälligen Größen  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  ist fast vollständig konvergent gegen 0, wenn die Reihe  $\sum_n P(X_n > \varepsilon)$  konvergent ist für jedes positive  $\varepsilon$ . Es folgt unmittelbar, daß mit der Reihe  $\{X_n\}$  jede andere Reihe  $\{Y_n\}$ , wo  $Y_n$  zu  $X_n$  äquivalent ist (d. h.  $P(X_n < a) = P(Y_n < a)$  für jedes  $a$ ), gleichzeitig fast vollständig konvergent gegen 0 ist. Der Verf. gibt einen einfachen Beweis für den folgenden wichtigen Satz von Hsu und Robbins: Wenn die zufälligen Größen  $X_j$  dasselbe Verteilungsgesetz  $F(x)$  haben und wenn  $\bar{X}_j, \bar{X}_j^2$  existieren, dann ist  $\frac{1}{n} \sum_{j \leq n} X_j$

gegen  $\bar{X} = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)$  fast vollständig konvergent. *O. Onicescu.*

**Doss, Shafik: Sur une estimation exhaustive pour la moyenne d'une variable aléatoire obéissant à la loi de Laplace dans un espace de Banach.** Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 3, 135—142 (1954).

L'A. montre que si  $x$  est un élément aléatoire d'un espace de Banach qui obéit à une loi de Laplace au sens de Mlle Mourier, et si nous considérons  $n$  déterminations indépendantes de  $x$ :  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ , alors l'élément aléatoire

$$\eta = \frac{1}{n} (x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + x^{(n)})$$

constitue une „estimation exhaustive“ de la moyenne de l'élément considéré pour toutes les lois de Laplace dont on s'est donné l'équivalent de la matrice de covariance. (C'est-à-dire que la loi de probabilité conditionnelle de  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$  par rapport à  $\eta$  est alors déterminée presque sûrement indépendamment de la loi de Laplace de  $x$ .)

*R. Féron.*

**Doss, Shafik: Sur le théorème limite central pour des variables aléatoires dans un espace de Banach.** Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 3, 143—148 (1954).

L'A. donne des conditions suffisantes pour que la somme d'éléments aléatoires d'un espace de Banach tende vers un élément aléatoire Laplacien au sens de Mlle Mourier (voir par exemple E. Mourier, ce Zbl. 53, 95). Les résultats sont un peu plus généraux que ceux de E. Mourier, mais leur énoncé est beaucoup moins simple.

*R. Féron.*

**Derman, C.: A solution to a set of fundamental equations in Markov chains.** Proc. Amer. math. Soc. 5, 332—334 (1954).

In einer Markoffschen Kette sei  $P$  die Matrix der stationären Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{ij}$  ( $i, j = 0, 1, 2, \dots$ ) und  $p_{ij}^{(n)}$  seien die Elemente der Matrix  $P^n$ . Wenn die Zustände der Kette aperiodisch und weder transient noch Nullzustände sind, dann existiert — wie schon bekannt — ein einziges System positiver Elemente

$u_0, u_1, u_2, \dots$  mit  $\sum_0^\infty u_k = 1$ , das den Gleichungen

$$(*) \quad u_k = \sum_{i=0}^\infty u_i p_{ik} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

genügt. Verf. zeigt: Wenn alle Zustände einer irreduziblen Kette rekurrent sind, dann existiert genau ein System positiver Zahlen  $v_0 = 1, v_1, v_2, \dots$ , das den Gl. (\*) und den Gleichungen

$$v_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{r=0}^n p_{kk}^{(r)} / \sum_{r=0}^n p_{00}^{(r)} \right]$$

genügt. Alle rekurrenten Zustände sind dann und nur dann gleichwahrscheinlich (alle  $v_k = 1$ ), wenn  $\sum_{i=0}^\infty p_{ij} = 1$  für alle  $j$  ist. Die Zustände einer irreduziblen rekurrenten Kette sind Nullzustände dann und nur dann, wenn  $\sum_0^\infty v_k = \infty$  ist.

G. Schulz.

**Onicescu, O.: Chaines continues à liaisons complètes.** Revista Univ. C. I. Parhon Politehn. București, Ser. Ști. Natur. **3**, Nr. 4/5, 73—84 u. russ. u. französ. Zusammenfassg. 85 (1954) [Rumänisch].

In this paper the author extends to the continuous case the concept of chain of infinite order [introduced by the author and G. Mihoc (this Zbl. **12**, 28)]. For finitely many states, the transition probabilities are determined by the following system of differential equations

$$(J) \quad \frac{dx_k}{dt} = \sum_{h=1}^m x_h f_{hk}(x_1, x_2, \dots, x_m, t), \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad x_k(s) = \delta_{ik}.$$

Several properties concerning the chain under consideration are studied using the associated linear system

$$\frac{dy_k}{dt} = \sum_{h=1}^m y_h g_{hk}(t), \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad y_k(u) = \delta_{hk}, \quad s \leq u \leq t,$$

$g_{hk}(t) = f_{hk}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$ , where  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$  is the solution of (J). In the following the author considers a new type of ergodicity for chains of infinite order as well as for Markov chains. Finally, a new method of investigation for differential systems using the associated linear systems is suggested.

R. Theodorescu.

**Chung, K. L.: Contributions to the theory of Markov chains. II.** Trans. Amer. math. Soc. **76**, 397—419 (1954).

In Teil I (s. dies. Zbl. **53**, 272) hatte Verf. erstmals Übergangswahrscheinlichkeiten bei Annahme von „Tabur“-Zuständen eingeführt. Mit ihrer Hilfe lassen sich zahlreiche neue Bedingungen für Markoffsche Ketten  $\{X_n\}$  mit abzählbar unendlich vielen Zuständen und stationären Übergangswahrscheinlichkeiten formulieren. Ein erster Satz verallgemeinert ein Ergebnis von Kolmogorov und gibt eine Bedingung, die eine gewisse Solidarität unter den Zuständen einer rekurrenten Klasse zeigt: ist sie für ein Paar  $i, j$  (gleicher oder verschiedener) Zustände erfüllt, dann auch für jedes Paar von Zuständen. Es folgen Beziehungen für die mittleren Wiederkehr- und Erstdurchgangszeiten. Weiter werden gewisse Folgen von Zufallsveränderlichen  $\{f(X_n)\}$ , die mit der Kette  $\{X_n\}$  verknüpft sind, betrachtet, insbesondere das asymptotische Verhalten der Partialsummen  $S_n = \sum_{v=0}^n f(X_v)$  für  $n \rightarrow \infty$  untersucht und klassische Grenzwertsätze für sie neu bewiesen. Der genannte Solidaritätssatz wird auf solche Folgen ausgedehnt. Mit Hilfe eines Gedankens von Doeblin werden das schwache und das starke Gesetz der großen Zahlen, der zentrale Grenzwertsatz, das Gesetz des iterierten Logarithmus und weitere Sätze

für diese Folgen sehr einfach bewiesen. Gewisse von Kolmogorov aufgestellte Bedingungen für die Gültigkeit des zentralen Grenzwertsatzes erweisen sich als nicht hinreichend, wie an Gegenbeispielen gezeigt wird. (G. Schulz.)

**Siraždinov, S. Ch.: Grenzwertsätze für homogene Markovsche Ketten mit stetiger Zeit.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 98, 905—908 (1954) [Russisch].

The author considers a continuous-parameter Markov chain with a finite set of states  $e_1, e_2, \dots, e_s$  ( $s > 1$ ) and with stationary transition probabilities. The system is given by „density“ matrix  $A = \|a_{\alpha\beta}\|$  where the real numbers  $a_{\alpha\beta}$  satisfy  $a_{\alpha\beta} \geq 0$  ( $\alpha \neq \beta$ )  $\sum_{\beta} a_{\alpha\beta} = 0$ . Let  $\vec{\xi}(t)$  be the vector whose  $j$ -th component  $\xi^j(t)$  is the total time that the system spends in state  $e_j$  in  $(0, t)$ ;  $e(t) = e_j$  denotes the state at time  $t$  and  $M_{\gamma} \xi^{\alpha}(t)$  the conditional expectation if  $e(0) = e_{\gamma}$ . If the condition (A): for any two states  $e_{\gamma}$  and  $e_{\beta}$  exists a sequence  $e_{\gamma_1}, \dots, e_{\gamma_k}$  so, that  $a_{\alpha\gamma_1} a_{\gamma_1\gamma_2} \dots a_{\gamma_{k-1}\gamma_k} a_{\gamma_k\beta} > 0$  is satisfied,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_{\gamma} \xi^{\alpha}(t)}{t} = \omega_{\alpha}$  is independent of  $\gamma$ . Let  $\vec{\eta}(t) = (\vec{\xi}(t) - t\vec{\omega}) \sqrt{t}$  where  $\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_s)$ . Let  $N$  be the  $(s-1)$ -dimensional Euclidean space,  $F_t^{\gamma}(E) = P\{\vec{\eta}(t) \in E, e(0) = e_{\gamma}\}$  where  $E \subset N$ . The author states without proof the following theorem: under assumption (A)

$$\sup_{E \subset N} \left| F_t^{\gamma}(E) - \int_E \left[ \Psi(X) + \sum_{r=1}^k t^{-r/2} L_{\gamma_r} \left( -\frac{\partial}{\partial X} \right) \Psi(X) \right] dX \right| = O(t^{-(k+1)/2})$$

for positive integer  $k$ , and  $t \rightarrow \infty$ .  $\Psi(X)$  is an explicitly given normal density function in the  $s-1$  dimensional space and  $L_{\gamma_r}$  an explicitly given differential operator. If  $h_1, h_2, \dots, h_s$  are numbers, at least two of which are unequal, let  $u(t) = h_j$  if the chain is in state  $e_j$  at time  $t$ . Under the assumption (A) the author gives an expression for the normalized  $\int_0^t u(\tau) d\tau$  with an error term as above. This result is a generalization of the results of W. Doeblin (this Zbl. 18, 156, 2<sup>nd</sup> report) and T. A. Sarymsakov [Trudy Inst. Mat. Mech. Akad. Nauk Usbek. SSR 5 (1949)]. *M. Arató.*

**Siegert, A. J. F.: Passage of stationary processes through linear and non-linear devices.** Transactions of the IRE. Professional group on information theory 3, 4—25 (1954).

Introduction générale à une série de problèmes se ramenant à l'étude de la distribution de probabilité de certaines expressions de la forme:  $u = \int K(t') V(x(t')) dt'$ , où  $K(t)$  et  $V(t)$  sont des fonctions connues et  $x(t)$  est une fonction aléatoire, dont on connaît la loi statistique. (Exemple: structure du signal sortant d'un système formé d'un filtre, d'un détecteur, et d'un deuxième filtre.) Article d'exposition, encore utilisable. *B. Mandelbrot.*

**O'Brien, George G.: The solution of some queueing problems.** J. Soc. industr. appl. Math. 2, 133—142 (1954).

Verf. befaßt sich mit dem Problem der Schlangenbildung unter der Annahme, 1. daß der Kundenzugang einem Poisson-Prozeß mit Zugangsrate  $a$  folge, 2. exponentieller Bedienungszeit, d. h. daß die Wahrscheinlichkeit für die im Zeitpunkt  $t_0$  begonnene Bedienung eines Kunden, den Zeitpunkt  $t_0 + t$  zu überdauern,  $e^{-\lambda t}$  sei, 3. daß die Kunden eine einzige Schlange bilden und in der Reihenfolge ihrer Ankunftszeit bedient werden. Zunächst untersucht Verf. den Fall zweier nebeneinander voll bedienender Schalter, der mit dem bereits bekannten Fall zweier hintereinander partiell bedienender Schalter verglichen wird, dann den komplizierteren Fall, in welchem der Kunde an einem einzigen Schalter gleichzeitig von zwei Stellen bedient wird, deren Bedienungsdauern zwar gegenseitig unabhängig sind, die aber nur im gleichen Zeitpunkt die Bedienung eines und desselben Kunden aufnehmen. Die Verteilung der Anzahl anwesender (d. h. wartender oder bedient werdender) Kunden



est une géométrique, la même que la durée de la file d'attente, d. h. la durée de l'attente d'un client par un serveur. La durée de l'attente d'un client par un serveur est la somme de durées d'attente de clients par un serveur, qui sont indépendantes et distribuées exponentiellement. (M. P. Geppert.)

**Bailey, Norman T. J.:** A continuous time treatment of a simple queue using generating functions. *J. Roy. statist. Soc., Ser. B* **16**, 288—291 (1954).

Verf. gibt einfache Beweise für bekannte Resultate über Wartzeitprobleme [Vgl. W. Ledermann und G. E. H. Reuter, *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A* **246**, 321—369 (1954)]. Es wird angenommen, daß bei einem Bediener nach Poisson'schen Prozeß mit der Wahrscheinlichkeitsdichte  $\lambda$  Personen ankommen und die Bedienungszeiten unabhängige Zufallsveränderliche mit derselben Verteilung  $F(t) = 1 - e^{-\nu t}$  ( $t > 0$ ) sind. Verf. bestimmt mit der Methode der erzeugenden Funktion die Verteilung der Zahlen der wartenden Personen in einem gegebenen Zeitpunkt und die Verteilung der Bedienungsintervalle. (L. Takács.)

**Burgers, J. M.:** On the coalescence of wave like solutions of a simple non-linear partial differential equation. I—III. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. B* **57**, 45—56, 57—66, 67—72 (1954).

I. Afin de décrire les ondes générées par des impulsions discrètes successives  $\omega_i$ , appliquées aux instants  $t_i$ , dans le point  $y = 0$ , et à partir de l'instant  $t_0$ , l'A. est conduit à former une solution de l'équation (1)  $\partial^2 \psi / \partial t^2 - v \partial \psi / \partial y = v^2 \psi^2$ , où  $v > 0$  est un paramètre petit, en posant (2)  $v = -2 \nu \partial (\ln u) / \partial y$ , avec

$$(3) \quad u = u_0 + \int_{t_0}^t (t - \theta)^{-1/2} e^{\nu \theta} d\theta, \quad (4) \quad Z = -\frac{y^2}{4\nu(t - \theta)} + \frac{1}{2\nu} \int_{t_0}^{\theta} A(\theta') d\theta',$$

où  $A(\theta')$  est une fonction arbitraire. Dans le cas des impulsions discrètes, l'intégrale figurant dans (4) est à remplacer par une fonction en escalier  $\sum_{t_0 \leq t_i \leq \theta} \tilde{\omega}_i(t_i)$ . D'après (2), pour  $\nu$  de plus en plus petit, il faut considérer le voisinage de la valeur  $\theta = \theta_m(y, t)$  pour laquelle  $Z$  admet son plus grand maximum positif. L'A. étudie les propriétés de la fonction en escalier  $\theta_m(y, t)$  pour  $t$  fixe ou bien pour  $y$  fixe. Ensuite il détermine la probabilité de coalescence de deux fronts successifs d'ondes, en admettant que les impulsions  $\omega_i$  sont introduites aux instants  $t_i = i T$  et qu'il existe une fonction de fréquence des impulsions  $q(\omega) d\omega$ , donnant une distribution de valeurs fortement concentrées autour d'une valeur moyenne  $\Omega$ , cela afin que le processus de rattrapement et de fusion soit dispersé sur une période plus longue. D'une façon plus précise, l'instant du rattrapement étant donné par  $t - t_i = 2 T \omega_{i-1} / (\omega_i - \omega_{i-1})$ , en la position  $\xi_i = \xi_{i-1} = (2 \Omega)^{3/2} T^{1/2} (\omega_i - \omega_{i-1})^{-1}$ , soit  $g = (2 \Omega)^{3/2} T^{1/2} y^{-1}$ ; la probabilité de trouver une paire  $\omega_i, \omega_{i-1}$  telle que  $\omega_i - \omega_{i-1} > g$  est égale à

$$F = \int_0^{\infty} q(\omega) d\omega \int_0^{\omega - g} q(\omega') d\omega'.$$

Application est faite au cas où  $q(\omega) = (1/\sigma) \exp\{-(\omega - \Omega)^2 / 2\sigma^2\}$ ,  $\sigma^2$  étant l'écart quadratique moyen de  $\omega$  à partir de  $\Omega$ . II. Investigations sur la probabilité de fusion de trois ou de plusieurs ondes successives. Le problème devenant de plus en plus compliqué, l'A. le ramène à un problème géométrique. En considérant  $y$  fixe, la fonction en escalier  $\theta_m(y, t)$  admet pour  $t = t'$  un saut égal à  $t_k - t_h > 0$ , avec  $k - h = m > 0$ . En posant  $\omega_i = \Omega + \gamma_i$ , où les  $\gamma_i$  admettent comme fonction de distribution  $q(\gamma) d\gamma = \sigma^{-1} (2\pi)^{-1/2} \exp(-\gamma^2 / 2\sigma^2) d\gamma$ , ( $\sigma \ll \Omega$ ), on construit la „courbe de sommation“  $S_n = \sum_{i=1}^n \gamma_{h+i}$ , avec  $S_0 = 0$  et  $S_j = -\gamma_h - \gamma_{h-1} - \dots - \gamma_{h+j+1}$  pour  $j < 0$ . Si l'on pose  $t' - t_h = \tau$ , d'où  $t' - t_{h+n} = \tau - n T$  et  $\Omega + \varepsilon = y^2 T / 2 \tau^2$ , on doit avoir

$$(1) \quad Q(n) \equiv n \varepsilon + \frac{1}{2} n^2 g (1 + \varepsilon / \Omega)^{3/2} (1 - n T / \tau)^{-1} \geq S_n,$$

avec égalité pour  $n = m$ . Pour chaque point de discontinuité  $t'$  il correspond ainsi un  $\tau$  et un  $\varepsilon$ . On peut écrire en général  $Q(n) \equiv n \varepsilon + \frac{1}{2} n^2 g \geq S_n$  et la condition (1)

signifie que la parabole  $Q(n)$ , située au-dessus de la courbe  $S_n$ , admet avec elle un contact en deux points correspondant respectivement à  $n = 0$  et à  $n = m$ . Les distances entre les points de contact successifs obtenus par une construction géométrique simple, donnent les valeurs de  $m$  indiquant le nombre d'ondes qui sont en fusion; l'A. indique un procédé intuitif pour évaluer l'ordre de grandeur de la valeur moyenne de  $m$  pour un  $y$  donné. Pour confirmer ce résultat, il cherche l'expression de la probabilité d'un contact en deux points dont la distance  $m$  est donnée, en utilisant la fonction de distribution  $q(\gamma) d\gamma$  de  $\gamma_n = S_n - S_{n-1}$ . Ceci conduit à la fonction de distribution  $E_1 E_{11} E_{111} (\sigma \sqrt{2\pi})^{-2N} dS_1 \dots dS_{N-1} dS_N$ , ( $-N \leq n \leq N$ ), où

$$E_1 = \exp \left\{ -(2\sigma^2)^{-1} \sum_{n=1}^m (S_n - S_{n-1})^2 \right\}, \quad E_{11} = \exp \left\{ -(2\sigma^2)^{-1} \sum_{m+1}^N (S_n - S_{n-1})^2 \right\},$$

$$E_{111} = \exp \left\{ -(2\sigma^2)^{-1} \sum_{-N+1}^0 (S_n - S_{n-1})^2 \right\}.$$

La probabilité en question s'obtient par intégration et passage à la limite pour  $N \rightarrow \infty$ . Un calcul qui utilise la résolution du problème au limites:  $\psi = 0$  pour  $s = -(m + \varepsilon)n - \frac{1}{2}n^2$ ,  $\psi = f\sigma^{-1}(2\pi n_0)^{-1} \cdot \exp \left\{ -s^2/2n_0 \right\}$  pour  $n = n_0$  relativement à l'équation  $\psi'_n = \frac{1}{2}\psi''_n$ , avec  $f = (g/\sigma)^{1/3}$ ,  $n_0 \cong l^2$ ,  $l$  étant une constante  $> 0$ , conduit pour l'intégrale correspondant à  $E_{11}$  à la valeur  $\text{Erf}\{a\} / n_0^{1/2}$ ; pour celle correspondant à  $E_{111}$  on trouve  $\text{Erf}\{a'\} / n_0^{1/2}$ , ici  $a$  et  $a'$  sont des nombres positifs qui s'introduisent en remplaçant les paraboles  $S = -(m + \varepsilon)n - \frac{1}{2}n^2$  et  $S = \varepsilon n - \frac{1}{2}n^2$  par  $S = -an$  soit par  $S = -a'n$ . III. Pour la limite de l'intégrale dépendant de  $E_1$ , l'A. trouve

$$(1/\sigma\sqrt{2\pi}) \exp \{-S_m^2/2m\sigma^2\} B f n_0/\pi (2M)^{3/2}$$

avec  $B = (1 + 2\beta^2)(1 - \text{Erf}\beta) - (2/\pi)\beta \exp \{-\beta^2\}$ ,  $\beta = b/\sqrt{M}$ ,  $M \cong m/2f^2$ . Après quelques développements et hypothèses plausibles l'A. est conduit à prendre  $n_0 = 3.8 f^2$  de sorte que le calcul de la valeur moyenne  $\bar{m}$  de  $m$ , pour  $y$  fixé, donne  $\bar{m} = 0.9 (\sigma y)^{2/3} (2T^{1/3})^{-1}$ , ce qui confirme les prédictions qualitatives antérieures.

I. Iacob.

## Statistik:

• Kenney, J. F. and E. S. Keeping: **Mathematics of statistics**. I. 3rd ed. New York: D. van Nostrand, Inc. 1954. 546 p.

• Ostle, Bernhard: **Statistics in Research. Basic concepts and techniques for research workers**. Ames, Iowa: Iowa State College 1954. XIV, 487 p. \$ 6.95.

Während die meisten Einführungen in die praktische Statistik nur Lesern aus einem engeren Fachgebiet dienen wollen, legt dieses Werk besonderes Gewicht auf gründliche Darstellung jenes elementaren statistischen Rüstzeuges, welches der eine wie der andere braucht. Der Rahmen ist von der binomischen Verteilung bis zu einigen Pseudo- $t$ - und - $F$ -Verteilungen gespannt; er umfaßt im wesentlichen beschreibende Statistik, Auswertung von Stichproben, Dispersions-, Regressions- und Korrelationsanalyse und Planung von Versuchen. Mit Rücksicht auf mathematisch ungeschulte Leser werden formale Beweise durch eindringliche, mit Beispielen verflochtene Überlegungen ersetzt. Dieselbe Rücksicht hat den Stoff beschränkt: so fehlen aus dem statistischen ABC die Zusammenhänge zwischen binomischer, gaußscher und Poisson-Verteilung, der zentrale Grenzwertsatz und das Prinzip der „maximum likelihood“. Mannigfache Beispiele aus Tierzucht, Werkstoffprüfung, Demographie, Wirtschaft, Pharmazie u. a. m. erläutern die Methoden und beleuchten ihre Grundlagen. 33 Seiten Tafeln und ein 7-seitiges Literaturverzeichnis schließen den Band ab. Die sorgfältig durchdachte, breite Darstellung mit den zahlreichen Beispielen und Übungsaufgaben dürfte auch dem Dozenten der Statistik mancherlei Anregung bieten.

E. Breitenberger.

• Bennet, Carl A. and Norman L. Franklin: **Statistical analysis in chemistry and the chemical industry**. (Wiley Publ. Statistics.) New York: John Wiley and Sons, Inc., London: Chapman & Hall, Ltd. 1954. XVI, 724 p. \$ 8.00; 58 s. net.

This book is a textbook of the practical procedures of mathematical statistics with particular respect to those applied in chemistry and chemical industry. „We attempted to write at a level between that of the well-known works on mathematical statistics and other texts which deal almost entirely with the application of statistical methods“. (Quoted from the author's preface.) Special emphasis is laid on typical statistical way of thinking. The book contains the following 11 chapters: 1. „Introduction“, 2. „Descriptive statistics“, 3. „Probability and samples“ with an appendix: Permutations and combinations. 4. „Mathematical machinery“. This chapter treats the classical probability distributions. One appendix of this chapter contains the beta- and gamma-functions, the other the normal bivariate distribution. 5. „Statistical inference“. Estimation, confidence intervals, tests of significance, statistical inference and comparison. One paragraph deals with the sequential tests. The appendix treats the maximum likelihood estimation. 6. „Relationships between variables“ with appendix about the solution of regression equations“. 7. „Analysis of variance“ with its manifold applications. 8. „The design of experiments“. In this part of the book we may find among others the factorial designs and the elimination of experimental errors. 9. „Analysis of counted data“, which deals with discrete variables. 10. „Control charts“. 11. „Some tests for randomness“. The book ends with tables of the normal-,  $\chi^2$ -,  $t$ - and  $F$ -distribution, finally with bibliography and index. In the text there are several further tables. - The book contains many examples from chemistry and many references to the numerical use of the discussed methods.

I. Vincze.

● Sharp, W. T., J. M. Kennedy, B. J. Sears and M. G. Hoyle: **Tables of coefficients for angular distribution analysis.** (A.E.L.C. Report Nr. 97.) Chalk River, Ontario: Atomic Energy of Canada, Ltd. 1954. XXXIX, 38 p. \$ 2.00.

Lorenz, Paul: **Drei mathematisch-statistische Arbeiten.** Wiss. Z. Humboldt- Univ. Berlin **3** (1953/54), 349—359 (1954).

In dem „Über die sogenannten Erwartungswerte“ betitelten ersten der drei inhaltlich zusammenhängenden Aufsätze wiederholt Verf. zunächst die bekannte Herleitung von Erwartungswert und Varianz des arithmetischen Mittels und der mittleren quadratischen Abweichung einer  $n$ -gliedrigen Stichprobe, die einer beliebigen  $N$ -gliedrigen Ausgangsgesamtheit ohne Zurücklegen zufällig entnommen wird; hieran werden Erörterungen über die Bestimmung der Mutungs-(Confidenz-) Grenzen der unbekannten Varianz  $\sigma_u^2$  einer normal verteilten Ausgangsgesamtheit auf Grund von  $\chi^2$ -Verteilung geknüpft und über die Unzweckmäßigkeit desjenigen Schätzers für einen Verteilungsparameter, den man durch Gleichsetzen des beobachteten entsprechenden Stichprobenparameters mit dem Modalwert der Verteilung des Stichprobenparameters erhält. Im Gegensatz zu dem vom Verf. nicht erwähnten plausibelsten (Maximum-likelihood-) Schätzer ist natürlich die vom Verf. betrachtete Schätzfunktion im kontinuierlichen Fall gegen Transformation des Verteilungsparameters nicht invariant. Der im zweiten Aufsatz „Was besagt der Studentsche  $t$ -Test eigentlich?“ unternommene Versuch, Students Problemstellung zu klären, wird durch stellenweise unsaubere Formulierungen getrübt. Als verteilungsfreies Gegenstück zum Student-Test wird der uralte Zeichentest empfohlen. Im dritten Teil „Der Schluß vom Teil aufs Ganze auf Grund einer Versuchsreihe“ berechnet Verf. für den Fall einer normal verteilten Ausgangsgesamtheit  $N(M_F, \sigma_F^2)$  „Mutungsgrenzen“ für  $M_F$ , nicht von der Störparameter-freien Studentverteilung ausgehend, sondern unter Benutzung der Normalverteilung, wobei für die unbekannte Varianz  $\sigma_u^2$  deren obere Confidenzgrenze „ $\sigma_u^2$ “ eingesetzt wird.

M. P. Geppert.

Basu, D. and R. G. Laha: **On some characterizations of the normal distribution.** Sankhyā **13**, 359—362 (1954).

In Verallgemeinerung eines Satzes von R. C. Geary [J. Roy. statist. Soc., Supplement, **3**, 178 (1936)] beweisen die Verff.:  $x_1, x_2, \dots, x_n$  seien unabhängige



Stichproben aus einer Gesamtheit, die endliche Momente bis zur  $r$ -ten Ordnung hat; es sei ferner  $K_r$  die unverzerzte Schätzfunktion der  $r$ -ten Kumulante  $k_r$ . Falls  $\sum x_i$  unabhängig ist von einem beliebigen  $K_r$  ( $r \geq 2$ ), dann ist die Ausgangsgesamtheit normal.

G. Schulz.

Basu, D. and R. B. Laha: Addendum: On some characterizations of the normal distribution. [Sankhya 13, 359–362 (1954).] Sankhya 14, 180 (1954).

Zwei Zusätze zur vorstehend besprochenen Arbeit.

G. Schulz.

Johnson, N. L.: Systems of frequency curves derived from the first law of Laplace. Trabajos Estadíst. 5, 283–291 (1954).

Im Anschluß an seine Arbeit (dies. Zbl. 33, 72), in der er die allgemeinen Eigenschaften von Verteilungen der Veränderlichen  $y$  studiert, wobei  $z = \gamma + \delta f(y)$  eine  $(0, 1)$ -normalverteilte Veränderliche ist,  $\gamma$  und  $\delta$  ( $\neq 0$ ) Konstanten bedeuten und für  $f(y)$  gesetzt wurde a)  $f(y) = \log y$  mit  $0 < y$ , b)  $f(y) = \log \{y/(1-y)\}$  mit  $0 < y < 1$ , c)  $f(y) = \sinh^{-1} y$ , behandelt Verf. in vorliegender Studie die analogen Systeme von Häufigkeitskurven, wie sie sich ergeben, wenn  $z$  anstatt einer Normalverteilung dem sog. ersten bzw. zweiten Gesetz von Laplace unterliegt. Die Ergebnisse haben naturgemäß nicht das gleiche praktische Interesse wie diejenigen der eingangs zitierten Arbeit, zeigen jedoch u. a. auch wieder, daß die entwickelten Systeme von Frequenzkurven die  $(\beta_1, \beta_2)$ -Ebene ( $\beta_1$  und  $\beta_2$  sind die üblichen, durch  $\gamma$  und  $\delta$  bestimmten Momentenverhältnisse) eindeutig bedecken.

G. Wünsche.

Kanellos, S. G.: Construction of sample, when the distribution function is given.

Bull. Soc. math. Grèce 29, 77–84, engl. Zusammenfassg. 84 (1954) [Griechisch].

Based upon the random numbers, a sample of 50 independent values of a random variable obeying to the Cauchy-law, is constructed. By the same way 12 values of a normal deviate are constructed. Examples of the Test of Wald-Wolfowitz (problem of two samples) are given.

Engl. Zusammenfassung.

Epstein, Benjamin: Truncated life tests in the exponential case. Ann. math. Statistics 25, 555–564 (1954).

The author deals with such a life test where the experiment is terminated either at a presigned time  $T_0$ , or — if this occurs sooner — at the occurrence of the  $r_0$ -th failure. The life-time distribution is supposed to be exponential. The author considers both the cases: a) when the failed items are replaced by new ones and b) when this is not the case. For the numerical computations which are necessary for the applications of these proposed tests the author gives tables and remarks on their use.

I. Palásti.

Uzgören, Nakibe T.: The asymptotic development of the distribution of the extreme values of a sample. Studies Math. Mech., presented to Richard von Mises, 346–353 (1954).

Es sei  $X$  eine zufällige Variable mit der Verteilungsfunktion  $F(x)$  und  $x_n$  das größte Element einer aus dieser Grundgesamtheit genommenen Stichprobe vom Umfang  $n$ . Die Grenzverteilung von  $x_n$  — d. h.  $\lim_{n \rightarrow \infty} [F(x)]^n$  — wurde von mehreren

Autoren (z. B. Mises, Fréchet, Gumbel, Gnedenko, Smirnow) untersucht. Auf verschiedene Weisen haben sie drei Klassen von  $F(x)$  bestimmt, für welche die Grenzverteilung von  $x_n$  existiert. Der Klassifikation von v. Mises folgend gibt Verf. die asymptotische Entwicklung von  $\log [-\log F^n(x)]$  im Falle  $\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = 0$  an,

wo  $g(x) = (1 - F(x))f(x)$  ( $f(x) = F'(x)$ ). (In Gumbels Klassifikation ist dies die erste Klasse.) Es wird noch angenommen, daß  $F(x) \rightarrow 1$  für  $x \rightarrow \infty$ ,  $F'(x)$  zweimal differenzierbar ist und  $F''(x) = f'(x) > 0$ , und es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} [n g'(\bar{x})] = \infty$ , wo  $\bar{x}$

die Lösung der Gleichung  $F(\bar{x}) = 1 - 1/n$  ist. Für  $n \rightarrow \infty$  geht diese Entwicklung natürlich in die bekannte Grenzverteilung über. Das Ergebnis wird auf die Normalverteilung und auf die Verteilung  $F(x) = 1 - \exp(-x^k)$ ,  $x > 0$ ,  $k > 0$  angewandt. Da die Konvergenz von  $F^n(x)$  gegen die Grenzverteilung im allgemeinen sehr

langsam ist, hofft Verf., daß seine Ergebnisse eine bessere Übereinstimmung von Theorie und empirischen Beobachtungen ermöglichen. *E. Éllető.*

**Tsao, Chia Kuei:** An extension of Massey's distribution of the maximum deviation between two-sample cumulative step functions. *Ann. math. Statistics* **25**, 587—592 (1954).

Es seien  $x_1 < \dots < x_n$  bzw.  $y_1 < \dots < y_m$  die geordneten Ergebnisse von zwei Stichproben aus derselben stetigen Grundverteilung. Es sei  $S_n(x) = k/n$ , wenn  $x_k \leq x < x_{k+1}$  und  $S'_m(x) = k/m$ , wenn  $y_k \leq x < y_{k+1}$ . Des Verf. Verträglichkeitskriterien

$$d_r = \max_{x \leq x_r} |S_n(x) - S'_m(x)| \quad \text{und} \quad d'_r = \max_{x \leq \max(x_r, y_r)} |S_n(x) - S'_m(x)|$$

sind die Verallgemeinerungen eines Kriteriums von Smirnow. Es werden Tabellen für die exakte Verteilung von  $d_r$  und  $d'_r$  für einige kleine Werte von  $n = m$  angegeben. Die Rechnungen wurden mit der Methode von Massey (dies. Zbl. **42**, 141) durchgeführt. Beispiel für Lebensdauertest. *K. Sarkadi.*

**Gurland, John:** On regularity conditions for maximum likelihood estimators. *Skand. Aktuarietidskr.* **1954**, 71—76 (1954).

The paper deals with the weakening of Cramér's assumptions on regularity of the likelihood function concerning the asymptotic properties of maximum likelihood estimators (see e. g. H. Cramér: *Mathematical methods of statistics*, Princeton 1946, pp. 500—504). The modified Theorem II. (pp. 72—73) consists of replacing Cramér's condition  $|\partial^3 \log p / \partial \theta^3| < H(x)$  by two new conditions involving only second derivatives [conditions (iii) and (iv) on p. 73]. However, it seems to the reviewer that these conditions alone are not enough to prove the part (a) [and therefore also the part (b) as based on the preceding one] of Theorem II. For the inequality  $-k_1^2 < -A^2$  on page 74 —  $\hat{\theta}_\alpha$  here being a function of  $x_\alpha$  not a fixed value of  $\theta$  as  $\theta'$  in Condition (iii) — does not follow from the Hypothesis of Theorem II.

*Th. Lipták.*

**Huybrechts, M.:** La borne inférieure de la variance d'une estimation. *Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci.*, V. Sér. **40**, 791—797 (1954).

The paper gives the well-known lower bound for the variance of an unbiased estimate for a function of an unknown real parameter (see e. g. C. R. Rao: *Advanced statistical methods in biometric research*, New York 1952, eq. (4a. 2. 2) in p. 131). The author uses exactly the same conditions and methods as Cramér in his book (*Mathematical methods of statistics*, Princeton 1946, pp. 474—483), but he removes the simplifying condition of Cramér concerning to estimate not a function of the parameter, but directly the parameter. His results can be obtained easily from that of Cramér's book.

*Th. Lipták.*

**Higuchi, Isao:** On the solutions of certain simultaneous equations in the theory of systematic statistics. *Ann. Inst. statist. Math.* **5**, 77—90 (1954).

The author proves the existence und unicity resp. multiplicity of the optimum values of the functions

$$K_1(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^{k+1} \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_i} t e^{-t^{1/2}} dt \right\}^2 \bigg/ \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-t^{1/2}} dt$$

and

$$K_2(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^{k+1} \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_i} (1 - t^2) e^{-t^{1/2}} dt \right\}^2 \bigg/ \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-t^{1/2}} dt,$$

where  $x_0$  and  $x_{k+1}$  stand for  $-\infty$  and  $+\infty$ , respectively. This problem is mentioned in a paper of I. Ogawa (this Zbl. **44**, 343). In the proof two elementary lemmas and the elements of the differential and integral calculus are applied. *P. Révész.*

**Raj, Des:** On sampling with probabilities proportionate to size. *Ganita* 5, Nr. 2, 175—182 (1954).

Each unit in a finite population of size  $N$  is characterized by two quantities  $X$  and  $Y$ ,

$$(X_1, Y_1), \dots, (X_N, Y_N).$$

An estimate of  $Y = N^{-1} \sum Y_i$  is required on the basis of a sample of size  $n \leq N$ . We know the values of  $X_1, X_2, \dots, X_N$ . It is to be decided whether the sample be drawn with replacement with probabilities proportionate to the  $X_i$  or with equal probabilities. The estimates in the two cases are  $\bar{Y}_{pps} = \frac{\bar{X}}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}$  and  $\bar{Y}_{eq} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ , where  $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$  and  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  are the selected units. Let  $V_{pps}$  and  $V_{eq}$  be the variances of these estimates. In view of the fact that any sampling method in practice is used on a whole series of finite populations it is considered legitimate to assume  $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$  to be random variables. They are assumed independent with means  $\alpha + \beta X_i$ ;  $i = 1, 2, \dots, N$ ; and variance  $\sigma^2$  independent of  $X_i$ . The selection of sampling method is based on comparison between  $E V_{pps}$  and  $E V_{eq}$ . Criteria are developed depending upon  $\alpha, \beta$  and  $\sigma$ . In practical applications these parameters must be estimated from the sample.

*E. Sverdrup.*

**Grundy, P. M.:** A method of sampling with probability exactly proportional to size. *J. Roy. statist. Soc., Ser. B* 16, 236—238 (1954).

Die Aufgabe, einer Menge von  $N$  Werten  $x_1, x_2, \dots, x_N$  eine zufällige Stichprobe von  $n$  Werten ohne Zurücklegen zu entnehmen, wobei die Entnahmewahrscheinlichkeit proportional der Größe  $x$  sei, lost Verf. auf folgende einfache Weise: Man wählt zufällig eine ganze Zahl  $s$  aus  $1 \leq s \leq N$  und eine Zahl  $r$  aus  $0 < r \leq \alpha$  mit  $x_{\max} \leq \alpha \leq \left( \sum_{i=1}^N x_i - x_{\max} \right) / (n-1)$ ; ist  $r > x_s$ , so wiederholt man den Vorgang, ist  $r \leq x_s$ , so wird  $x_s$  in die Stichprobe aufgenommen. Entsprechend werden untereinander und von  $s$  verschiedene ganze Zahlen  $s_2, s_3, \dots$  aus  $1 \leq s_j \leq N$  sukzessive zufällig ausgewählt, und  $s_i$  dann und nur dann in die Stichprobe aufgenommen, wenn die kumulierte Summe

$$r + x_{s_2} + x_{s_3} + \dots + x_{s_t}$$

erstmal  $\alpha, 2\alpha, \dots, (n-1)\alpha$  überschreitet. Dieses Verfahren ist äquivalent einer modifizierten systematischen Auswahl nach vorangegangener Stochastisierung (randomization) der Reihenfolge der  $N$   $x$ -Werte. An zwei Beispielen untersucht Verf. empirisch die Verteilung der Anzahl  $u$  zu kumulierender Summanden, d. h. des kleinsten  $u$  mit  $r + x_{s_2} + x_{s_3} + \dots + x_{s_u} > (n-1)\alpha$ . *M. P. Geppert.*

**Stuart, Alan:** A simple presentation of optimum sampling results. *J. Roy. statist. Soc., Ser. B* 16, 239—241 (1954).

In der Theorie der Stichprobenentnahme aus endlichen Gesamtheiten tritt allenthalben die Aufgabe auf, durch geeignete Wahl der aus den verschiedenen Teilgesamtheiten (Schichten usw.) zu entnehmenden Anzahlen  $m_h$  die Varianz  $V = \sum V_h/m_h$  eines Schätzers bei gegebenem Wert einer in  $m_h$  linearen Kostenfunktion  $C = \sum m_h c_h$  zu minimalisieren. Statt der üblichen variationstheoretischen Lösung mittels Lagrange'scher Faktoren läßt sich in diesen Fällen einfacher auf  $V \cdot C$  die Cauchy-Schwarz-Ungleichung anwenden und aus der Proportionalitätsbedingung für Gleichheitszeichen die optimale Bestimmung der  $m_h$  erreichen. Dies geschieht für geschichtete, zweistufige, Doppel-Stichproben und das Non-response-Problem. *M. P. Geppert.*

**Jonekheere, A. R.:** A distribution-free  $k$ -sample test against ordered alternatives. *Biometrika* 41, 133—145 (1954).



Da bei der Prüfung der Homogenität von  $k$  Stichproben  $(X_{i1}, \dots, X_{i\alpha_i}, \dots, X_{im_i})$  ( $i = 1, \dots, k$ ) aus Gesamtheiten mit den Verteilungsfunktionen  $F_1(X), \dots, F_k(X)$  oft vermutet werden kann, daß  $F_1(X) < \dots < F_k(X)$  für alle  $X$  gilt, wenn die Nullhypothese der Gleichheit der Verteilungen nicht zutrifft, schlägt Verf. vor, als Prüfmaß die Anzahl  $S$  der Paare  $(X_{i\alpha_i}, X_{j\alpha_j})$  mit  $j \geq i + 1$ ,  $i < k$ ,  $\alpha_i \leq m_i$ ,  $\alpha_j < m_j$  zu verwenden, für die  $X_{i\alpha_i} < X_{j\alpha_j}$  gilt. Dieses Prüfmaß entspricht bis auf einen Normierungsfaktor dem Kendallschen Rangkorrelationskoeffizienten zwischen  $i$  und den  $X_{i\alpha_i}$ , wobei in der  $i$ -Reihe jeweils  $m_i$  gleiche Werte auftreten. Für die Verteilung von  $S$  werden die ersten vier Kumulanten berechnet und die Grenzverteilung untersucht. Für  $m_i = m$  ( $i = 1, \dots, k$ ) ist für alle  $m$  und  $k$  mit  $m + k \leq 8$  die Verteilungsfunktion tabelliert.

*E. Walter.*

**LeCam, Lucien:** Note on a theorem of Lionel Weiss. *Ann. math. Statistics* **25**, 791—794 (1954).

L. Weiss (dies. Zbl. **53**, 275) hatte eine vollständige Klasse von sequentiellen Wahrscheinlichkeitsverhältnistests zur Prüfung einer einfachen Hypothese gegen eine einfache Alternative angegeben. Verf. zeigt, daß man dieses Ergebnis auch auf Grund einer von ihm entwickelten, unveröffentlichten Erweiterung der Theorie der Entscheidungsfunktionen ableiten und auf die Prüfung mehrerer Hypothesen erweitern kann.

*E. Walter.*

**Page, E. S.:** An improvement to Wald's approximation for some properties of sequential tests. *J. Roy. statist. Soc., Ser. B* **16**, 136—139 (1954).

In seinem Buch „Sequential Analysis“ (New York 1947) gibt A. Wald eine Näherungsformel für die Operationscharakteristik eines Folgetests, d. h. für die Wahrscheinlichkeit, daß ein Teilchen auf einer linearen Irrfahrt zwischen zwei absorbierenden Grenzlinien an einer bestimmten Grenze absorbiert wird. Diese Formel ist gültig für Startpunkte, die nicht zu nahe an den beiden Grenzlinien liegen, und für Bahnen, die im Mittel nur um einen kleinen Winkel gegen die Grenzlinien geneigt sind. Verf. gibt eine einfache Abänderung der Formel von Wald, die eine bessere Annäherung und Auskunft über die Werte an den Grenzlinien liefert. Seine Überlegungen gehen aus von einer von Kemperman 1950 aufgestellten Integralgleichung. Eine numerische Prüfung der Annäherung wird für den Fall gegeben, daß die Beobachtungswerte eine Normalverteilung mit dem Mittelwert  $\theta$  und der Streuung 1 haben.

*G. Schulz.*

**Ivanovitch, Branislav V.:** Sur la discrimination des ensembles statistiques. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* **3**, 207—270 (1954).

Chapter 1 reviews the method of finding a linear discriminant function to discriminate in some optimal sense between two given multivariate normal populations with the same dispersion matrix. In the two dimensional case a linear discriminant function is constructed without assuming equal dispersion matrices. Chapter 2 extends discrimination analysis to the case where the variates are subject to certain transformations. If the two populations contain unknown parameters, it is shown in the third chapter how to determine the values of the parameters for which the two populations are best separated by a given discriminant function. In the fourth chapter the author considers the case of two correlated populations whose densities

$f_1, f_2$  are expressible in the form  $f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, \xi) f_1(\xi) d\xi$ . Among other questions, the problem of determining the kernel  $K$  to give best fit to observations on  $f_1$  and  $f_2$  is treated.

*W. Gautschi.*

**Daniels, H. E.:** Saddlepoint approximations in statistics. *Ann. math. Statistics* **25**, 631—650 (1954).

Es wird die Sattelpunktmethode angewandt, um asymptotische Näherungen für die Dichtefunktion des arithmetischen Mittels  $\bar{x}$  von Summen unabhängiger Zufalls-

veränderlichen mit derselben Verteilungsfunktion zu erhalten. Auch der Quotient  $\bar{x}$  erartiger Summen wird auf diese Weise behandelt. Es wird ferner untersucht, unter welchen Bedingungen die erhaltenen Ausdrücke die Dichtefunktion von  $\bar{x}$  derart annähern, daß der relative Fehler gleichmäßig in  $\bar{x}$  beschränkt bleibt. Dafür werden hinreichende Bedingungen angegeben. Dies ist unter anderen z. B. der Fall, wenn die gemeinsame Dichtefunktion  $f(x)$  der einzelnen Veränderlichen asymptotisch gleich  $A x^{k-1} l(x) e^{-cx}$ , ( $k > 0$ ,  $c > 0$ ,  $x \rightarrow \infty$ ) ist, wobei  $l(x)$  eine langsam oszillierende stetige Funktion im folgenden Sinne bedeutet:  $l(kx)/l(x) \rightarrow 1$  mit  $x \rightarrow \infty$ , falls  $k > 0$ .

A. Békéssy.

Grenander, Ulf: Stochastic processes and statistical inference. Ark. Mat. **1**, 195—277 (1950).

This paper contains the first systematic treatment of problems of statistical inference for continuous parameter stochastic processes. As in the classical problems, an essential tool is the likelihood ratio, that is the density of the absolutely continuous component of one probability measure with respect to a second. In the case of continuous parameter processes, however, the calculation of this density is frequently a difficult problem, which the author solves by reducing the problem to one involving only denumerably many random variables. A feature more common in this study than in the classical one is that the probability measures to be compared are frequently not absolutely continuous with respect to each other, so that critical regions will involve the singular sets. There are too many results to be detailed here, but the following are typical. (Some of the results were announced: this Zbl. **38**, 291). (1) Suppose that a Poisson process has intensity function value  $\lambda(t)$  (hypothesis  $H_0$ ) or  $\mu(t)$  (hypothesis  $H_1$ ), with  $\lambda(t) > 0$  almost everywhere where  $\mu(t) > 0$ . The critical region in the usual sense of the Neyman-Pearson theory for testing  $H_0$  against  $H_1$  is found. For example, if  $\mu$  is supposed proportional to  $\lambda$ ,  $\mu = c\lambda$ , the critical region is determined by the condition  $e^n \geq \text{const.}$ , where  $n$  is the number of events that have occurred in the sample (over finite time interval). (2) Let  $\{x(t), a \leq t \leq b\}$  be a Gaussian process with  $E[x(t)] = m(t)$  and a known covariance function. The hypothesis  $H_0$  to be tested is that  $m(t) = m_0(t)$  as against the alternative  $H_1$  that  $m(t) = m_1(t)$ . Under conditions specified in the paper,  $H_0$  and  $H_1$  can be completely distinguished by one sample function (neglecting zero probabilities) because there is a critical region of probability 1 under  $H_0$  and of probability 0 under  $H_1$ . Under other conditions a best critical region with more conventional properties is found. If the process is a stationary Markov process, so that the covariance function is given by  $e^{-c(a-s)}$ , if  $m_0(t) \equiv 0$ ,  $m_1(t) = \text{const} = m \neq 0$ , the most powerful test of  $H_0$  against the one-sided alter-

native  $m > 0$  is  $x(a) + x(b) + c \int_a^b x(t) dt \geq \text{const.}$  (3) Maximum likelihood estimates are defined and are shown to have appropriate properties. Let  $z$  be the left side of the preceding inequality. Then the maximum likelihood estimate of  $m$  for the Gaussian stationary Markov process discussed in (2) is  $z/[2 + c(b-a)]$ .

J. L. Doob (Math. Rev. **12**, 511).

Nagabhushanam, K.: The primary process of a smoothing relation. Ark. Mat. **1**, 421—488 (1951).

The author considers the system of equations

$$(*) \quad L[x(t)] = \sum_{r=0}^n a_r x(t-r) = \xi(t), \quad t = 0, \pm 1, \dots,$$

where  $\xi(t)$  is the  $t$ -th random variable of a stationary (wide sense) stochastic process,  $a_0, \dots, a_n$  are given, and the system is to be solved for a stationary (wide sense)  $x(t)$  process. (For earlier work on this problem see H. Wold, this Zbl. **19**, 356; **20**, 147.) Suppose for simplicity that  $E\{\xi(t)\} = 0$ , let  $\sigma$  be the spectral distribution function of the  $\xi(t)$  process, and let  $P(z) = \sum_{r=0}^n a_r z^r$ . It is shown that the system (\*) has a

solution if and only if  $\int d\sigma(\lambda)/|P(e^{-i\lambda})|^2 < \infty$ , where the integration is over the set  $Q$  where the denominator does not vanish. The solution is essentially unique if the denominator does not vanish, alternatively if and only if the closed linear manifold of random variables generated by the  $x(t)$ 's is the same as that ( $M$ ) generated by the  $\xi(t)$ 's. Since  $L[\xi(0) e^{itu}] = 0$ , if  $P(e^{-iu}) = 0$ , it follows that the solution is not unique if  $Q$  is not empty. [Incidentally this example also shows the incorrectness of Theorem 2.7 according to which there is a unique solution giving random variables in  $M$ . There is however a unique solution with spectral density confined to the complement of  $Q$ .] If the polynomial  $P$  has roots only of modulus  $\neq 1$ ,  $x(t)$  has a representation of the form  $\sum_{-\infty}^{\infty} b_j \xi(t-j)$ . If there are only roots of modulus  $< 1$ ,  $b_j = 0$  for  $j < 0$ . If there are roots of modulus 1 the above results are modified by replacing simple summation by a summability procedure. The continuous parameter analogues of these results is also obtained. Assuming (\*), now without knowledge of  $E\{\xi(t)\}$ , but knowing  $a_0, \dots, a_n$  and the covariance function of the  $\xi(t)$  process, the problem of estimating  $E\{x(t)\}$  from a sample of  $\xi(t), \dots, \xi(t-k+1)$  is taken up. The minimum variance linear unbiased estimate is found. The best least square approximation to  $x(t)$  by means of a linear combination  $\xi(t) - \sum_{j=1}^N b_j \xi(t-j)$  is found. The corresponding continuous problems, as well as the relation of these problems to linear filtering and prediction are also discussed.

J. L. Doob (Math. Rev. 12, 840).

**Whittle, P.:** On stationary processes in the plane. *Biometrika* 41, 434—449 (1954).

Untersucht werden ein- und zweidimensionale, raumartige, diskrete, stationäre Prozesse mit linearer Autoregression. Während die Ereignisse der zeitartigen Prozesse (Zeitreihen) nur von Ereignissen in einer Richtung (Vergangenheit) abhängen, erstreckt sich bei den hier betrachteten eindimensionalen Prozessen die Abhängigkeit auf beide Richtungen (links und rechts). Ist  $\xi_t$  die Beobachtungs- und  $\varepsilon_t$  die zufällige Fehlervariable, so wird  $\xi_t = a \xi_{t-1} + b \xi_{t+1} - \varepsilon_t$  als Autoregressionsgleichung des einfachsten nicht-ausgearteten Prozesses dieser Art zugrunde gelegt. Für den entsprechenden zeitartigen Prozeß ist  $b = 0$  zu setzen. Die Parameter  $a$  und  $b$  können hier nicht wie bei den Zeitreihen durch die Forderung

$$U = \sum_t (\xi_t - a \xi_{t-1} - b \xi_{t+1})^2 = \min$$

geschätzt werden. Es wird vielmehr eine Funktion  $k(a, b)$  angegeben, so daß  $k U = \min$  eine Parameterschätzung erlaubt. Allgemein wird im eindimensionalen Fall die Autoregressionsgleichung

$$L(T) \xi_t = \varepsilon_t \quad \text{mit} \quad L(T) = \sum \alpha_j T^j, \quad \xi_{t-1} = T \xi_t$$

betrachtet und auf das analoge Problem erweitert. Hierfür werden Anpassungstests und Formeln für die asymptotischen Streuungen von Parameterschätzungen für normalverteilte Zufallsveränderliche abgeleitet. Schließlich werden die Ergebnisse auf zwei Beispiele aus der Landwirtschaft (Weizenfelder und Orangenpflanzungen) angewendet und zwei spezielle ebene Prozesse diskutiert. G. Schulz.

**Hoel, Paul G.:** A test for Markoff chains. *Biometrika* 41, 430—433 (1954).

M. S. Bartlett hat 1951 einen Likelihoodverhältnis-Test für die Güte der Anpassung bei Markoffschen Ketten angegeben (dies. Zbl. 42, 144). Dieser Test war dazu bestimmt zu prüfen, ob eine Folge von Beobachtungen aufgefaßt werden kann als Stichprobenwerte einer Kette von höchstens  $r$ -ter Ordnung und ob vielleicht schon eine Kette der Ordnung  $r-1$  genügt. Dabei wurde angenommen, daß die Übergangswahrscheinlichkeiten bekannt sind oder wenigstens von einer begrenzten Zahl von Parametern abhängen, die geschätzt werden können. Wenn aber die Übergangs-



wahrscheinlichkeiten völlig unbekannt sind, ist dieser Test nicht anwendbar. Verf. gibt in der vorliegenden Arbeit, ausgehend von den Methoden und Ergebnissen von Bartlett, einen auch in diesem Fall verwendbaren Test an. *G. Schulz.*

**Middleton, David:** *Statistical theory of signal detection.* Transactions of the IRE, Professional group on information theory **3**, 26—51 (1954).

Le problème de la détection des signaux est posé comme problème de test d'hypothèse statistique, et traité mécaniquement, au moyen de la théorie usuelle de la statistique mathématique. Résultats numériques. *B. Mandelbrot.*

**Slepian, D.:** *Estimation of signal parameters in the presence of noise.* Transactions of the IRE, Professional group on information theory **3**, 68—89 (1954).

Le problème de la détection des signaux est posé comme problème d'estimation statistique, et traité par la méthode de Fisher. Applications à un signal sinusoïdal en l'absence ou en présence de filtre, et à un modèle du radar. *B. Mandelbrot.*

**Youla, Dante C.:** *The use of the method of maximum likelihood in estimating continuous-modulated intelligence which has been corrupted by noise.* Transactions of the IRE, Professional group on information theory **3**, 90—105 (1954).

Solution du problème indiqué dans le titre.

*B. Mandelbrot.*

**Bartlett, M. S.:** *Problèmes de l'analyse spectrale des séries temporelles stationnaires.* Publ. Inst. Statist. Univ. Paris **3**, 119—134 (1954).

The author discusses some topics in the analysis of stationary time series. In particular he describes some methods that have been suggested to estimate the spectrum of a stochastic process. He suggests an alternative to the confidence band of Grenander and Rosenblatt for the spectral distribution function. Some problems and solutions are mentioned in the case of a spectrum having both discrete and absolutely continuous components. The theoretical developments of this paper are illustrated by a numerical example. *H. Grenander.*

**Schützenberger, M. P.:** *Contribution aux applications statistiques de la théorie de l'information.* Publ. Inst. Statist. Univ. Paris **3**, 1—114 (1954).

A une variable aléatoire discrète  $\xi$  et à une certaine partition  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de l'ensemble des valeurs que peut prendre  $\xi$  on associe une certaine fonction  $H(X_1, X_2, \dots, X_n)$  (qui peut être considérée comme une valuation de treillis de partition). Diverses considérations conduisent à imposer à  $H$  la forme  $H(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum p_i S \log p_i$  où  $S$  est un opérateur linéaire arbitraire, en posant  $p_i = \Pr(\xi = X_i)$  (cette probabilité pouvant éventuellement dépendre d'un paramètre  $\theta$ ). Pour  $S = \mathcal{E}^2 / \mathcal{G}^2$  on retrouve la quantité d'information de Fisher; pour  $S = -1/\log 2$  celle de Shannon-Wiener. Un nouveau type d'information est utilisé pour la recherche des méthodes de groupages permettant de trouver le plus rapidement possible les éléments défectueux d'une collection d'objets. *R. Féron.*

**McGill, William J.:** *Multivariate information transmission.* Psychometrika **19**, 97—116 (1954).

A multivariate analysis based on transmitted information is presented. It is shown that sample transmitted information provides a simple method for measuring and testing association in multidimensional contingency tables. Relations with analysis of variance are pointed out and statistical tests are described. (Author's own summary.) *Autoreferat.*

**Johnston, J.:** *A revised test for systematic oscillation.* J. Roy. statist. Soc., Ser. B **16**, 292—295 (1954).

Die Anwendung der Methode der gleitenden Mittel verursacht eine unechte Oscillation (s. Kendall, Advanced theory of statistics, Bd. 2, London 1946). Zur Prüfung dieses Effektes wendet Kendall die theoretisch bezüglich der Reihe der gleitenden Mittel erhaltenen Ergebnisse so an, als wenn sie auf die residuale Reihe (Differenz der ursprünglichen Reihe und der gleitenden Mittel) bezogen würden. Verf. weist auf diesen Irrtum hin und gibt die theoretischen Angaben bezüglich der residualen Reihe an. Die Abweichung ist oft bedeutsam. *K. Sarkadi.*

**Raj, Des:** On sampling with varying probabilities in multistage designs. *Ganita* 5, Nr. 1, 45—51 (1954).

Given  $N$  first stage units with some character  $\theta_i$ . The author considers the problem of estimating  $\theta = \sum_{i=1}^N \pi_i \theta_i$  for assigned probabilities  $\pi_i$  ( $\sum \pi_i = 1$ ) and computes the variance of the best unbiased linear estimate of  $\theta$ . The corresponding computations are made for some other samplings with varying probabilities in multistage designs. *H. Bergström.*

**Abelson, Robert M. and Ralph Allan Bradley:** A  $2 \times 2$  factorial with paired comparisons. *Biometrics* 10, 487—502 (1954).

Bradley and Terry have introduced a method of paired comparisons depending on ranking within the incomplete blocks of size two. The same method with some modifications is here used for treatments that form a factorial set in paired comparisons. After some general remarks on the model for factorials have been given, a complete solution is given for the  $2 \times 2$  factorial and the method is illustrated by a numerical example. The tests, which are used are based on likelihood ratio statistics under the restriction of a null hypothesis. *H. Bergström.*

**Bradley, Ralph Allan:** Incomplete block rank analysis: On the appropriateness of the model for a method of paired comparisons. *Biometrics* 10, 375—390 (1954).

The appropriateness of a postulated model for the rank analysis of incomplete block designs is tested by the help of the  $\chi^2$ -distribution. The used tests are approximate. Numerical applications are given. *H. Bergström.*

**Zorua Terol, Procopio:** On the independence of random variables. *Trabajos Estadist.* 5, 293—326 (1954) [Spanisch mit engl. Zusammenfassg.].

Changes are rung on S. Bernstein's example of pairwise, but only pairwise, independent events. The possibility of transforming dependent sets of random variables to independent sets is explored. Cf. I. E. Segal, this Zbl. 18, 157; M. Rosenblatt, this Zbl. 47, 131. Measures of degree of dependence based on these transformations are suggested. The inadequacy of the correlation coefficient as such a measure, even for variables individually normally distributed, is stressed (cf. Fréchet, this Zbl. 41, 462). The paper makes no reference to prior work, except for a casual mention of S. Bernstein. *L. J. Savage (Math. Rev. 16, 1128).*

**Box, G. E. P. and J. S. Hunter:** A confidence region for the solution of a set of simultaneous equations with an application to experimental design. *Biometrika* 41, 190—199 (1954).

Das Problem, Fehlerschranken für die Lösung eines Systems von  $k$  linearen Gleichungen

$$a_{i0} + a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{ik} x_k = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

zu finden, wenn alle  $a_{ix}$  mit Fehlern behaftet sind, wurde u. a. von A. T. Lonseth [Ann. math. Statistics 13, 332—337 (1942)] behandelt, der für den Fehler jeder Unbekannten, als Funktion der  $k(k+1)$  Koeffizienten angesehen, eine unendliche Reihe angab und Konvergenzkriterien für diese formulierte. Diese sind von der Struktur der Koeffizientenmatrix und der relativen Größe der Fehler abhängig. Da häufig genug ungünstige Matrizen und große Beobachtungsfehler auftreten, zieht es Verf. vor, die Fehler nicht einzeln, sondern in ihrer Verbundenheit zu betrachten und Konfidenzbereiche im Raum der  $x_1, x_2, \dots, x_k$  zu bestimmen. Dabei wird angenommen, daß die Fehler der  $a_{ix}$  multinormal mit einer  $k(k+1) \times k(k+1)$ -Streuungsmatrix  $\sigma^2 \Omega$ , die abgesehen vom Faktor  $\sigma^2$  bekannt ist, verteilt sind, und daß ein Schätzwert  $s^2$  von  $\sigma^2$  erhältlich ist, der nach einer  $\chi^2$ -Verteilung, unabhängig von den Fehlern in den Koeffizienten, verteilt ist. Es werden Kriterien angegeben und untersucht zur Entscheidung, ob die Koeffizientenmatrix günstig oder ungünstig ist. Es folgen Zahlenbeispiele, insbesondere zur Bestimmung des stationären Punktes eines quadratischen

Ausdrucks

$$Y(x_1, x_2) = a_{00} + a_{10} x_1 + a_{20} x_2 + \frac{1}{2} (a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2).$$

Das vorgeschlagene Verfahren läßt sich auch auf Systeme nichtlinearer Gleichungen, sofern diese in den Koeffizienten linear sind, ausdehnen. *G. Schulz.*

**Bellman, R., L. Glicksberg and O. Gross:** The theory of dynamic programming as applied to a smoothing problem. *J. Soc. industr. appl. Math.* **2**, 82—88 (1954).

Let it be required to minimize

$$\sum_{k=0}^N (x_k - r_k) + \alpha \sum_{k=0}^N \max(x_{k+1} - x_k, 0)$$

where the  $r_k$  and  $\alpha$  are known and  $x_k > r_k$  for all  $i$ . This problem can be transformed into one of Linear Programming [cf. Hoffman and Jacobs, *Smooth patterns of production*, *Management Science* **1**, 86—91 (1954)], but the present authors consider the continuous analogue, apply an heuristic approach which guides them to the rigorous solution, and use this for obtaining an approximate solution to the discrete case. *S. Vajda.*

### **Biomathematik. Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:**

● **Kempthorne, O., T. A. Bancroft, J. W. Gowen and J. L. Lush** (edited by): *Statistics and mathematics in biology*. Ames, Iowa: The Iowa State College Press, 1954. IX, 632 p. \$, 6.75.

The papers collected in this volume were all contributed to a conference on biostatistics held in June and July, 1952, at Iowa State College. The following is a list of these most likely to be of interest to a mathematical statistician. Sewall Wright: The interpretation of multivariate systems. J. W. Tukey: Causation, regression and path analysis. H. Hotelling: Multivariate analysis. S. L. Isaacson: Problems in classifying populations. K. R. Nair: The fitting of growth curves. C. L. Chiang: Competition and other interactions between species. G. Beall: Data in binomial or nearbinomial distribution. J. F. Crow: Breeding structure of populations. The 36 other papers are more concerned with the biological applications, a very wide range of these receiving consideration. The book concludes with a bibliography of 42 pages and a helpful index.

*D. G. Kendall* (*Math. Rev.* **16**, 56).

● **Wolfenden, H. H.:** *Population statistics and their compilation*. Chicago: University Press 1954. 258 p.

**Peyovitch, T.:** *Application de mathématique à la biologie*. *Bull. Soc. Math. Phys. Serbie* **6**, 199—208 (1954) [Serbisch].

Il s'agit d'un rapport sur l'application des équations différentielles au développement d'une population (homogène ou mixte) dans un biotope. En particulier, l'application de la loi logistique à la population en Serbie de 1834 à 1884. *Franz. Zusammenfassg.*

**Joshi, D. D.:** *Les processus stochastiques en démographie*. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* **3**, 153—177 (1954).

In the greater part of demographical literature a deterministic model is used as a base for the study of the development of human populations. More satisfying results are obtained if this development is treated as a stochastic process: in this way it is possible to take into account random fluctuations which in reality undoubtedly will occur. The present paper offers a simple but effective stochastic model for a population, consisting of a single type of reproducing individuals, where birth- and death-rates are constant. The probability distribution, expectation and variance of the following characteristics are calculated: size of the population, age distribution, individual life-span and number of descendants of a single individual. It is shown how to obtain maximum likelihood estimates of birth- and death-rates by taking a sample of individuals whose length of life and number of descendants are



known. Finally, the model is extended to populations consisting of two types of individuals (males and females) and to cases where birth- and death-rates depend on the age of the individual.

*J. J. Bezem.*

**Seal, Hilary L.: The estimation of mortality and other decremental probabilities.** Skand. Aktuarietidskr. 1954, 137—162 (1955); Erratum. Ibid. 1956, 38 (1956).

Eine Gruppe von Individuen unterliege zwischen den Altern  $x$  und  $x+t$  mehreren zufälligen Zerfallskräften, z. B. der Sterbe-Intensität  $\mu_{x+\tau}$  und der Intensität freiwilligen Ausscheidens  $\nu_{x+\tau}$ . Seien

$$\pi(x, x+t) = \exp \left[ - \int_0^t \mu_{x+\tau} d\tau \right], \quad \omega(x, x+t) = \exp \left[ - \int_0^t \nu_{x+\tau} d\tau \right]$$

und  ${}^*\pi(x, x+t) = 1 - \int_0^t \pi(x, x+\tau) \omega(x, x+\tau) \mu_{x+\tau} d\tau$ , ferner  $N(\tau)$  die Zahl

der im Alter  $x+\tau$  unter Beobachtung Stehenden,  $x+t_b^{(j)}$ ,  $x+t_e^{(j)}$ ,  $x+t_j$  das Beginn-, das End- und gegebenenfalls das Ausscheidealter des Individuums  $j$ ,  $0 \leq t_b^{(j)} \leq t_j \leq t_e^{(j)} \leq t$ . Das übliche versicherungsmathematische Verfahren liefert nur unter unrealistischen Voraussetzungen verzerrungsfreie Schätzwerte der jährlichen Sterbenswahrscheinlichkeiten, was angesichts der relativ geringen Zunahme der Sterbe-Intensität mit dem Alter jedoch unerheblich ist. In medizinischen Beobachtungen kann aber die Sterbe-Intensität stark ab- und zunehmen, bei meist geringem Beobachtungsmaterial. Verf. gibt einen kritischen Überblick über die Versuche, brauchbare Schätzwerte zu erhalten, und entwickelt „unbiased estimates of uniformly minimum variance“ (best unbiased estimates = verzerrungsfreie Schätzwerte mit minimaler Varianz). Wenn

$${}^*\pi(x, x+t_b, x+t_e) = 1 - [(t_e - t_b)/t] \{1 - {}^*\pi(x, x+t)\}$$

ist, dann ist für die Wahrscheinlichkeit  $1 - {}^*\pi(x, x+t)$  im Intervall  $[0, t]$  zu sterben,

$$y / \sum_{j=1}^N \frac{t_e^{(j)} - t_b^{(j)}}{t}$$

ein solcher Schätzwert:  $y$  = Zahl der beobachteten Toten. Ein entsprechender Schätzwert gilt für  $1 - {}^*\omega(x, x+t)$ . Ferner ist

$$\sum_{r=1}^{\min(y, [(y+w)/2])} \binom{y}{r} \left(1 - \frac{r}{y+w}\right) \left\{ \int_0^{t_{y+w}} N(\tau) d\tau \right\}^{-r} (-t)^{r-1}$$

ein solcher Schätzwert für die Sterbenswahrscheinlichkeit  $1 - \pi(x, x+t)$  (Ausscheideursache  $\nu_x$  eliminiert) unter der Voraussetzung  $\mu_{x+\tau} = \mu$ ,  $\nu_{x+\tau} = \nu$  (konstante Zerfallsintensitäten). In der letzten Formel ist  $y+w$  die Zahl der beobachteten Abgänge (Tote und Ausscheidende); die Beobachtung wird nach dem  $(y+w)$ -ten Abgang abgebrochen. Verf. skizziert im Anhang die Ableitung für die Varianz der Schätzwerte.

*H. Härten.*

**Church, B. N.: Problems of sample allocation and estimation in an agricultural survey.** J. Roy. statist. Soc., Ser. B 16, 223—235 (1954).

**Donder, Th. de: Le calcul des variations introduit dans la théorie des espèces et des variétés.** X, XI, XII, XIII. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 38, 78—80, 264—266 (1952); 39, 255—256 (1953); 40, 886—887 (1954).

Quelques questions de génétique abordées du point de vue des méthodes variationnelles classiques: „Stationarité et stabilité; Hybridisme; chromosomes dans la cellule fécondée; rôle du Soma en génétique“.

*Th. Lepage.*

• **Heer, W. J. C. de und J. Sattler: Versicherungsmathematik.** 's-Gravenhage: Martinus Nijhoff 1954. X, 247 S. geb. G. 13.50 [Holländisch].

Diese Einleitung in die Lebensversicherungsmathematik, die nur elementarmathematische Kenntnisse voraussetzt, bringt in 18 Kapiteln von sehr verschiedenem

Umfang so ziemlich alles unter dieser Voraussetzung Mögliche: 1. Zinsrechnung, 2. Wahrscheinlichkeitsrechnung, 3. Sterbetafeln, 4. Versicherungen auf ein Leben, 5. jährliche Nettoprämien, 6. jährliche Bruttoprämien, 7. Prämienreserve, 8. Methoden der Prämienreserveberechnung, 9. gruppenweise Reserveberechnung, 10. mathematische Bilanzreserve, 11. Versicherungen auf zwei oder mehr Leben, 12. Einstellung der Prämienzahlung, Veränderung der Versicherungsform, Umwandlung, 13. anomale Risiken, Kriegsrisiko, 14. Rückversicherung, 15. Tontine, 16. Invalidität, 17. Rentabilitätsrechnung von Anleihen, 18. verschiedene Gegenstände. — Im 6. und 7. Kapitel wird u. a. die Prämienrückgewähr behandelt, ferner auch die Rekursionsformel der Prämienreserve; im 8. Kapitel neben der Nettomethode verschiedene Arten der Bruttomethode [Zillmer-,  $(x+1)$ -, Höckner-Methode u. a.], in Kapitel 14 z. B. auch die Beziehung zwischen den Risikosummen bei verschiedenen Tarifförmern, in Kapitel 18 u. a. die Gruppenversicherung einer offenen Gesamtheit (Zwangsversicherung), der Übergang zu anderen Rechnungsgrundlagen, insbesondere zu anderem Zinsfuß, die mathematische Dauer einer Versicherung, die Makehamsche Sterbeformel. Viele Fragen, deren exakte Behandlung über den Rahmen des Buches hinausginge (z. B. Tests für Sterbenswahrscheinlichkeiten; Eigenbehaltbestimmung) werden wenigstens diskutiert.

H. Härten.

Arfvedson, G.: Research in collective risk theory. I. Skand. Aktuarietidskr. 1954, 191—223 (1955).

Verf. gibt nach Umschreibung des Wesens der kollektiven Risikotheorie eine kurze historische Übersicht über die wichtigsten Ergebnisse und untersucht dann die Funktion  $F(x, u)$ , d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fonds  $U$  vom anfänglichen Wert  $u$  über die Periode  $x$  nie negativ wird.

E. Zwinggi.

Clower, R. W. and D. W. Bushaw: Price determination in a stock-flow economy. *Econometrica* 22, 328—343 (1954).

Ein Gleichgewicht kann — wie Verff. an einem Beispiel zeigen — sowohl unter rein vorrats-theoretischen wie unter rein verbrauchstheoretischen Voraussetzungen stabil sein, ohne es unter allgemeinen Vorrats-Verbrauchs-Hypothesen zu sein. Damit ist die Berechtigung einer Vorrats-Verbrauchs-Theorie bewiesen, wie sie von den Verff. im Rahmen einer allgemeinen Preistheorie entwickelt wird. — Für  $n$  Waren  $i = 1, \dots, n$  seien die Preise  $p_i(t)$ , die Nachfragefunktionen des Verbrauchs  $d_i(p_1, \dots, p_n)$ , der Bevorratung  $D_i(p_1, \dots, p_n)$ , die entsprechenden Angebotsfunktionen  $s_i$  bzw.  $S_i$ . Wenn alle  $dp_i/dt$  nur von den Exzeßnachfragen  $x_i = d_i - s_i$  bzw.  $X_i = D_i - S_i$  abhängen,  $dp_i/dt = f_i(x_i, X_i)$ , und  $f_i$  in der Umgebung eines jeden Punktes  $(\bar{x}_i, \bar{X}_i)$  linear approximierbar ist,  $f_i(x_i, X_i) = f_i(\bar{x}_i, \bar{X}_i) + a_i(x_i - \bar{x}_i) + b_i(X_i - \bar{X}_i)$ ,  $f(0, 0) = 0$ , dann sind unter entsprechenden Differenzierbarkeitsvoraussetzungen die Bedingungen für Gleichgewicht im Punkt  $(p_1^0, \dots, p_n^0)$  für verbrauchsorientierte Waren  $x_i^0 = 0$ , für nicht verbrauchsorientierte Waren  $x_i^0 = X_i^0 = 0$ . Eine Ware  $i$  heißt verbrauchsorientiert, wenn  $b_i = 0$  ist, vorratsorientiert bei  $a_i = 0$ ;  $a_i$  und  $b_i$  sollen nicht gleichzeitig 0 sein, eine Ware  $i$  mit konstanten Preisen bleibt also unberücksichtigt. Wenn in  $p_1^0, \dots, p_n^0$  Gleichgewicht besteht, dann gilt das linearisierte Gleichungssystem in Vektorform  $d^2r/dt^2 = B dP/dt = A P = 0$ ,  $P_i = p_i - p_i^0$ , mit der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 - B\lambda - A = 0.$$

Da das Gleichgewicht dann und nur dann stabil ist, wenn die Realteile aller charakteristischen Wurzeln des Systems negativ sind, gelten die hinreichenden Stabilitätsbedingungen: 1. daß  $A$  und  $B$  negativ definit sind, wenn alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung reell sind; oder 2. daß  $A$  und  $B$  negativ definit sind,  $A$  symmetrisch; oder 3. daß  $A$  und  $B$  symmetrisch sind,  $B$  negativ definit, wenn keine Wurzel der charakteristischen Gleichung reell ist. Eine gewisse Symmetrie-Eigenschaft scheint i. a. erforderlich zu sein; doch genügt es, wenn  $A$  und  $B$  „fast“ symmetrisch sind.

H. Härten.

Polak, J. J. and Ta-Chung Liu: Stability of the exchange rate mechanism in a multi-country system. *Econometrica* 22, 360—389 (1954).

Man hat sich bisher auf zwei Länder (oder ein Land und „die andere Welt“) beschränkt, wenn man den Mechanismus der Wechselkurse untersuchte. Die Stabilitätsbedingungen sind aber bei drei Ländern wesentlich komplizierter, während bei mehr als drei Ländern grundsätzlich keine neuen Komplikationen auftreten. — Für die Zahlungsbilanz  $b_i(t)$  des Landes  $i$  in der Zeit  $t$  sei angenommen, daß sie von den Logarithmen der Goldparitäten  $r_j$  aller Länder abhängen,

$$b_i(t) = f_i(\log r_1(t), \log r_2(t), \dots, \log r_n(t)), \quad i = 1, \dots, n.$$

Mit  $f_{ij} = \partial b_i(t) / \partial \log r_j(t)$  ist  $\sum_i f_{ij} = 0$ . Wenn gleiche relative Währungsänderung aller Länder die  $b_i$  unverändert läßt,  $dr_j(t)/r_j(t) = dr_i(t)/r_i(t)$ , gilt auch  $\sum_j f_{ij} = 0$ .

Das sei vorausgesetzt, ferner sei die prozentuale Währungsänderung eines Landes zur Zeit  $t$  ein festes Vielfaches der Bilanz der vorhergehenden Periode,  $dr_j(t)/r_j(t) = -k_j b_j(t-1)$ . Dann ist

$$db_i(t) = -\sum_j f_{ij} k_j b_j(t-1) \quad \text{und} \quad b_i(t) = (1 - f_{ii} k_i) b_i(t-1) - \sum_{j \neq i} f_{ij} k_j b_j(t-1),$$

$j \neq i$ . Die hinreichenden und notwendigen Stabilitätsbedingungen für dieses System von  $n$  linearen homogenen Differenzengleichungen sind die Schur-Cohn-Bedingungen, äquivalent mit den Routh-Hurwitz-Samuelson-Bedingungen (P. A. Samuelson, *Foundations of economic analysis*, Cambridge 1947, pp. 435—437), die Verff. für  $n=3$  explizit angeben. — Dieses theoretische Modell, im Anhang der Arbeit entwickelt, wird von Verff. im Text ökonomisch interpretiert, wobei sie vereinfachend zunächst annehmen, das Land 1 führe keine Währungsänderung durch,  $k_1 = 0$ , die Länder 2 und 3 nur zum Ausgleich ihrer Zahlungsbilanz, und zwar jeweils unter der Annahme, die anderen Länder ließen ihre Währungen unverändert,  $k_i = 1/f_{ii}$  für  $i = 2, 3$  (Fall A). Dann wird die Stabilitätsbedingung  $|A| < 1$ ,  $A = f_{32}/f_{22}$ ,  $B = f_{23}/f_{33}$ , mit den drei Unterfällen  $A, B < 0$  (zyklische Bilanzänderungen),  $A, B < 0$  („exponentielle“ Änderungen),  $A, B > 0$  (fluktuierende Änderungen). Verff. behandeln ferner die Fälle B:  $k_1 = 0$ ,  $k_{2,3} = 0$  für  $b_{2,3} \geq 0$ ,  $k_{2,3} = 1/f_{22}$  bzw.  $1/f_{33}$  für  $b_{2,3} < 0$ , und C:  $k_i = 0$  für  $b_i \geq 0$ ,  $k_i = 1/f_{ii}$  für  $b_i < 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . H. Härten.

Nikaidō, Hukukane: Note on the general economic equilibrium for nonlinear production functions. *Econometrica* 22, 49—53 (1954).

Verf. beweist spieltheoretisch die Existenz von Sattelpunkten, d. h. daß ökonomisches Gleichgewicht besteht, für ein System von Produktionsfunktionen  $f(A)$ ,  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , die nicht notwendig linear sind, aber die Konkavitätsbedingungen erfüllen:

$$(1) \quad f(k_1 A_1 + k_2 A_2) \geq k_1 f(A_1) + k_2 f(A_2).$$

Er zeigt, daß

$$\sup_{A \in \Omega} \inf_{Y \in S} \sum_{j=1}^n K(A, j) y_j = \inf_{Y \in S} \sup_{A \in \Omega} \sum_{j=1}^n K(A, j) y_j$$

gilt, wenn  $K(A, j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , auf einer abgeschlossenen beschränkten konvexen Menge  $\Omega$  des  $R^n$  definiert, stetig und konkav in bezug auf  $A$  für jedes  $j$  ist,

$S$  = Menge aller Preiskonstellationen  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  mit  $\sum_{j=1}^n y_j = 1$ ,  $y_j \geq 0$ .

Wenn  $(A^0, Y^0)$  eine solche Lösung von  $K_w(A, j) = f_j(A) - w a_j$  ist, daß der Spielwert  $V(w)$  verschwindet, dann ist  $(A^0, Y^0)$  ein Sattelpunkt von

$$\Phi(A, Y) = \sum_{j=1}^n f_j(A) y_j \Big| \sum_{j=1}^n a_j y_j.$$

Die Sattelpunkte bilden eine abgeschlossene konvexe Untermenge des Durchschnittes von  $\Omega$  und  $S$ ; wenn  $f(A)$  strikt konkav ist, d. h. in (1) nur das  $>$ -Zeichen gilt, dann gibt es nur ein einziges optimales  $A^0$ . H. Härten.



**Georgescu-Roegen, Nicholas:** Note on the economic equilibrium for nonlinear models. *Econometrica* **22**, 54—57 (1954).

Verf. zeigt, daß ökonomisches Gleichgewicht in allgemeineren Modellen als denen von Nikaidō (s. vorstehendes Ref.) existiert, da dessen „limitationality“-Beschränkung ( $A \rightarrow f(A)$  eindeutig) nicht notwendig ist. Der wesentliche Unterschied zwischen linearen und nichtlinearen Modellen ist nach Verf., daß erstere zu Mengen linearer Prozesse, letztere zu Mengen von „technologischen Transformationen“ führen. Für die Mengen von Transformationen stellt Verf. drei Postulate auf, aus denen die Existenz von Sattelpunkten folgt. Durch ein viertes Postulat wird nicht nur die Existenz von „technologischen“, sondern auch von „erreichbaren“ Gleichgewicht gesichert. Daraus ergeben sich Möglichkeiten, die Unterentwicklung einer Wirtschaft  $E_1$  gegenüber einer anderen  $E_2$  festzustellen. *H. Härten.*

**Bellman, Richard and Sherman Lehman:** On the continuous gold-mining equation. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **40**, 115—119 (1954).

Seien  $x(t)$ ,  $y(t)$  die zur Zeit  $t$  vorhandenen Goldmengen zweier Gruben,  $A$ ,  $B$  die Ausbeutungsprozesse,  $p(t)$  die Wahrscheinlichkeit, daß die Ausbeute bis zur Zeit  $t$  nicht aufhört,  $q_1 \delta + o(\delta)$  bzw.  $q_2 \delta + o(\delta)$  die Wahrscheinlichkeiten, daß die Prozesse  $A$  bzw.  $B$  im Intervall  $\delta$  aufhören,  $r_1 x \delta + o(\delta)$  bzw.  $r_2 y \delta + o(\delta)$  die Ausbeute durch  $A$  bzw.  $B$  im Intervall  $\delta$ ,  $f(t)$  die bis  $t$  zu erwartende Ausbeute.  $dx/dt$ ,  $dy/dt$ ,  $dp/dt$  und  $df/dt$  sind Ausdrücke in  $x$ ,  $y$ ,  $p$ ,  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  und zwei Funktionen  $\Phi_1(t)$ ,  $\Phi_2(t) = 1 - \Phi_1(t)$ ,  $0 \leq \Phi_i \leq 1$ ;  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $p(0) = 1$ ,  $f(0) = 0$ . Es ergibt sich u. a. Satz 1:  $f(\infty)$  wird zum Maximum durch die Strategie  $A$  bzw.  $B$ , wenn  $q_2 r_1 x >$  bzw.  $< q_1 r_2 y$  ist, und durch die gemischte Strategie  $M$  mit Mischungsverhältnis  $r_2/(r_1 + r_2)$ ,  $r_1/(r_1 + r_2)$ , wenn das Gleichheitszeichen an Stelle der Ungleichheitszeichen gilt. — Die Lösung des entsprechenden Systems mit drei Ausbeute-Prozessen geht in bestimmten Fällen in die des erwähnten Systems mit zwei Prozessen über. Verff. stellen noch fest, daß im allgemeinen Falle  $x(t)$  und  $y(t)$  stochastische Variablen sind, so daß an die Stelle der gewöhnlichen partielle Differentialgleichungen treten. *H. Härten.*

**Bellman, Richard:** Dynamic programming and a new formalism in the calculus of variations. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **40**, 231—235 (1954).

Die von Verf. in der Theorie des „dynamic programming“ (vgl. z. B. Bellman, dies. Zbl. **57**, 125) entwickelte Funktionalgleichungstechnik für mehrstufige Entscheidungsprobleme wendet er auf Probleme der Variationsrechnung an. Um

$\int_0^t F(x, z) du$  mit der Nebenbedingung  $x' = G(x, z)$ ,  $x(0) = c$ , zu maximieren, betrachtet er  $c$  und  $t$  als Parameter und erhält die Funktionalgleichung  $f(c, s - t) =$

$\max \left[ \int_0^s F(x, z) du + f(c(s), t) \right]$ , wobei das Maximum bei allen  $z(u)$  über  $0 \leq u \leq s$

zu nehmen ist. Mit  $s \rightarrow 0$  und  $z(0) = w$  wird  $f_t = \max_w [F(c, w) + G(c, w) f_c]$ .

Grundsätzlich dasselbe Verfahren, nur weniger einfach, führt zur Lösung des Eigenwertproblems für  $d^2x/dt^2 + \lambda \Phi(t)x = 0$ ,  $x(0) = x(1) = 0$ , bzw. zur Bestimmung

der sukzessiven Minima von  $\int_0^1 x'^2 du$  mit der Nebenbedingung  $\int_0^1 \Phi(u) x^2 du = 1$ ,  $x(0) = x(1) = 0$ , das Verf. in verallgemeinerter Form behandelt. *H. Härten.*

**Bellman, Richard:** Monotone approximation in dynamic programming and the calculus of variations. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **40**, 1073—1075 (1954).

In der Theorie des „dynamic programming“ wird die Funktionalgleichung  $f(x) = \max_{0 \leq y \leq x} [g(y) + h(x - y) + f(a y + b(x - y))] = T(f)$  mit  $g(x)$  und  $h(x)$  stetig in  $[0, c]$ ,  $g(0) = h(0) = 0$  durch ein Iterationsverfahren mit einer beliebigen, in  $[0, c]$  stetigen Ausgangsfunktion  $f_0(x)$ ,  $f_0(0) = 0$ , gelöst:  $f_{n+1}(x) = T(f_n)$ .

Monotone Konvergenz wird durch Approximation im „policy“-Raum erreicht, d. h. durch Wahl einer Anfangspolitik  $y_0 = y_0(x)$ ; „Politik“ ist die Wahl eines  $y(x)$  mit  $0 \leq y(x) \leq x$ . – Das Verfahren läßt sich auf die Maximierung von  $\int_0^T F(x, y, t) dt$

übertragen, d. h. auf die Lösung von  $f(a, c, T) = \text{Max}_y \int_a^{a-T} F(x, y, t) dt$  mit  $\dot{x} = G(x, y, t)$ ,  $x(a) = c$ . Für  $f$  gilt die Funktionalgleichung  $f_T = \text{Max} [F(c, v, a) + G(c, v, a) f_c + f_a]$ , und die „Politik“ ist jetzt eine Wahl von  $v_0$ , die  $f_0(a, c, T)$  ergibt. Die  $n$ -te Approximation ist durch die Forderung bestimmt, daß  $v_n$  die Gleichung  $H(v, f_{n-1}) = F(c, v, a) + G(c, v, a) f_{n-1, c} + f_{n-1, a}$  maximiert. Verf. skizziert den Konvergenzbeweis und zeigt, daß auch Eigenwertprobleme mit diesem Verfahren behandelt werden können.  
H. Härten.

**Rosenblatt, Murray:** An inventory problem. *Econometrica* 22, 244–247 (1954).

Verf. gibt ein einfaches Modell für das Bevorratungsproblem (z. B. von Getreide), wenn das Angebot (Ernten) Zufallsschwankungen unterworfen ist. Seien  $C_j$  und  $Y_j$  der Verbrauch bzw. die Ernte des Jahres  $j$ ,  $S_j$  der Vorrat aus dem Jahre  $j-1$ , der in das Jahr  $j$  übernommen wird, also  $S_{j+1} = D(S_j, Y_j) - Y_j - S_j - C_j$ ,  $0 \leq D(S, Y) \leq S + Y$ . Seien ferner  $c S_j$  die Bevorratungskosten und  $w(S, Y)$  ein Maß für Verluste. Gesucht wird eine Funktion  $D(S, Y)$  für eine Bevorratungspolitik, die den Erwartungswert  $c E S + E w(S, Y)$  zum Minimum macht. Verf. beschränkt sich auf  $D(S, Y) = a(S + Y)$ ,  $0 \leq a < 1$ . Im stationären Fall ergibt sich der Mittelwert  $E S = \frac{a}{1-a} E Y$ , das zweite Moment  $E S^2 = \frac{a^2}{1-a^2} E Y^2 + \frac{2 a^3}{(1-a)^2(1-a)} (E Y)^2$ . Wenn  $w(S_j, Y_j) = K_1 + K_2 (C_j - M^2)$  eine quadratische Funktion von  $C_j$  ist,  $K_1, K_2, M$  Konstante, dann findet Verf. optimal

$$a = \left( \sqrt{\frac{2 K_2 \sigma^2(Y)}{c E Y}} - 1 \right) / \left( \sqrt{\frac{2 K_2 \sigma^2(Y)}{c E Y}} + 1 \right),$$

d. h. stärkere Fluktuation der Ernten ergibt größeres  $a$ , höhere Ernten niedrigeres  $a$ .

H. Härten.

**Bellman, Richard and Oliver Gross:** Some combinatorial problems arising in the theory of multi-stage processes. *J. Soc. industr. appl. Math.* 2, 175–183 (1954).

Lorsque  $n$  objets manufacturés, non tous identiques, doivent, au cours de leur fabrication, passer à travers une chaîne de plusieurs machines, le temps total nécessaire pour usiner ces  $n$  objets dépend de l'ordre dans lequel les opérations sont faites. Le problème attaqué ici est de déterminer l'ordre d'emploi pour lequel le temps total de fabrication est minimum. Dès que le nombre des étapes de construction s'élève, la solution dépend d'énumérations impraticables. Les AA., après avoir rappelé les résultats de Johnson (Optimal two-stage production schedules . . . , Naval Logistics Research Quarterly, March, 1954), étudient les cas  $m=2$  et 3, avec deux espèces d'articles, le nombre total des objets étant grand. A. Sade.

**Brogden, Hubert E.:** A simple proof of a personnel classification theorem. *Psychometrika* 19, 205–208 (1954).

$N = \sum_j Q_j$  Personen,  $j = 1, \dots, n$ , sollen  $n$  jobs zugeteilt werden.  $C_{ij}$  sei die Produktivität der Person  $i$  im Job  $j$ ;  $X$  eine Zuordnungsmatrix mit  $x_{ij} = 0$  bzw. 1 und  $\sum_i x_{ij} = Q_j$ . Verf. formuliert und diskutiert den Satz: Wenn jedem job ein Gewicht  $K_j$  zugelegt werden kann, dann ergibt sich eine Lösung des Klassifizierungsproblems (d. h.  $\sum_{i,j} C_{ij} x_{ij}$  wird maximal), indem jeder Person der job zugeordnet wird, Zuordnungsmatrix  $X'$ , für den  $C_{ij} + K_j$  den höchsten Wert hat. Der Beweis ist trivial.  
H. Härten.

**Dwyer, Paul S.:** Solution of the personnel classification problem with the method of optimal regions. *Psychometrika* 19, 11–26 (1954).

Das Klassifizierungsproblem (Verf.: „Quoten“-Problem,  $N = \sum q_j$ ) ist ebenso wie das Transport-Problem („Frequenz“-Problem,  $\sum f_i = \sum q_j$ ) ein solches des linearen Programmierens und kann deshalb z. B. mit der Simplex-Methode gelöst werden. Doch sind die  $a_{ij}$  beim Klassifizierungsproblem gleich 1 (bzw. natürliche Zahlen) oder gleich 0; deshalb ist eine einfachere Methode angemessen, nämlich die der optimalen Regionen: Parallel-Verschiebung von Hyperebenen, bis die geforderten Quoten  $q_j$  erfüllt sind. Dieses Verfahren führt z. B. bei 1152 Personen und 7 jobs mit hochkorreliertem  $C_{ij}$  in acht Schritten zum Ziel.

H. Härten.

**Blachman, Nelson M.:** Minimum-cost encoding of information. Transaction of the IRE, Professional group on information theory 3, 139–149 (1954).

Problèmes sans motivation concrète. Solutions formelles. Pas de bibliographie.

B. Mandelbrot.

**Drobot, S. and M. Warmus:** Dimensional analysis in sampling inspection of merchandise. Rozprawy mat. 5, 1–46, russ. Zusammenfassg. 47–53 (1954).

Jedem Teil  $\Omega_i$  einer Warenmenge  $\Omega$  seien zwei distributive Maße  $N_i$  (Größe),  $W_i$  (Wert) zugeordnet, jedem Teil  $\omega_i$  einer Stichprobe  $\omega$  von  $\Omega$  zwei distributive Maße  $n_i$  (Größe) und  $w_i$  (Wert). Es wird postuliert, daß  $N, W, n, w$  „dimensional unabhängig“ sind (und ein „System von Einheiten“ mit den Dimensionen PIECE, GUINEA, piece und guinea bilden), d. h.  $N^\alpha W^\beta n^\gamma w^\delta = \chi$ ,  $\alpha, \beta$  reell,  $\chi$  positiv reell, gilt nur für  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ ,  $\alpha = 1$ . Alle  $N_i, W_i, n_i, w_i$  sind gleicher Dimension, d. h.  $N_i = \alpha_1 N_j, W_i = \alpha_2 W_j, n_i = \alpha_3 n_j, w_i = \alpha_4 w_j$ . Der Preis  $C = W/N$  von  $\Omega$  mit der Dimension  $\text{PIECE}^{-1} \text{GUINEA}^1$ , der Preis  $c$  von  $\omega$  mit der Dimension  $\text{piece}^{-1} \text{guinea}^1$ , der Konversions-Koeffizient  $q$  mit der Dimension  $\text{PIECE}^{-1} \text{piece}^1 \text{GUINEA}^1 \text{guinea}^{-1}$ , die Streuung des Wertes von  $\Omega$  mit der Dimension  $\text{PIECE}^{-1/2} \text{GUINEA}^1$ , des Wertes von  $\omega$  mit der Dimension  $\text{piece}^{-1/2} \text{guinea}^1$ , die Untersuchungskosten für die Stichprobe  $k$  mit der Dimension  $\text{piece}^{-1} \text{GUINEA}^1$  werden definiert. Die Dimensionen der Streuungen können postuliert werden; sie können aber auch aus zwei Postulaten abgeleitet werden, die dem zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und einer abgeschwächten Bedingung über die Zufallsunabhängigkeit der Teile äquivalent sind. Mit Hilfe von Dimensionsbetrachtungen und einfacher dimensions-analytischer Sätze (zwei Beispiele: 1. jede dimensionale Größe eines Systems kann in den Einheiten  $X_i$  des Systems eindeutig in der Form  $\prod_i X_i^{a_i}$  dar-

gestellt werden; 2. die  $m$  Größen  $A_j = \prod_{i=1}^m X_i^{a_{ij}}$ ,  $j = 1 \cdots m$ , sind dann und nur dann dimensional unabhängig, wenn die Exponenten-Determinante nicht verschwindet), werden lediglich aus der Dimension der fraglichen Größen Formeln für den Stichprobenumfang abgeleitet. Zum Beispiel ist  $n = \chi (N q s/k)^{2/3}$ , wenn  $n$  nur von  $N, q, s$  und  $k$  abhängig ist, oder  $n = \delta S N^{1/2} k$ , wenn  $n$  nur von  $S, N, k$  abhängt (bei der Herleitung wird hilfswise angenommen,  $n$  sei auch von  $q$  abhängig;  $q$  fällt aber von selber wieder heraus), oder  $n = \varphi(\beta) S N^{1/2}/k$ , speziell  $n = \delta_0 S N^{1/2} k + \delta_1 C N k$ , oder  $n = \epsilon (s/c)^2$ .  $\chi, \beta, \dots$  sind theoretisch nicht feststellbare Konstante,  $\varphi$  eine theoretisch ebensowenig feststellbare numerische Funktion (die beiden ersten Glieder der Potenzreihenentwicklung von  $\varphi$  führen zu der Formel in den Konstanten  $\delta_0$  und  $\delta_1$ ). Die Konstanten müssen experimentell bestimmt werden. Wie das geschieht, zeigen Verfl. im Schlußkapitel V der Arbeit.

H. Härten.

## Geometrie.

### Grundlagen. Nichteuclidische Geometrie:

**Tits, Jacques:** Sur les  $R$ -espaces. C. r. Acad. Sci., Paris 239, 850–852 (1954).

Suite des remarques faites récemment (v. ce Zbl. 55, 383), spécialement sur le plongement de  $R$ -espaces dans des espaces projectifs. Voir l'exposé détaillé (v. ce Zbl. 67, 123).

H. Freudenthal.



**Nordhaus, E. A. and Leo Lapidus:** Brouwerian geometry. Canadian J. Math. **6**, 217—229 (1954).

Wie bei Untersuchungen von Ellis, Blumenthal und Elliott (vgl. dies. Zbl. **42**, 27; **49**, 226; **52**, 265) werden auch hier Räume untersucht, in denen die Entfernungen durch Elemente eines Verbandes gegeben sind. Ist jedem Elementepaar  $a, b$  einer Menge  $S$  ein Element  $a * b$  eines Verbandes  $L$  mit  $0$  so zugeordnet, daß (1)  $a * b = b * a$ , (2)  $a * b = 0$  genau dann, wenn  $a = b$ , (3)  $(a * b) + (b * c) > a * c$  (für  $\cup$  wird  $+$  und für  $\cap$  wird kein Zeichen gesetzt) gilt, so wird  $S$  ein  $L$ -metrisierter Raum genannt. Verff. nennen einen Verband  $L$  mit  $0$  und  $1$  eine Brouwersche Algebra, wenn es zu  $a, b \in L$  stets ein kleinstes  $x \in L$  gibt, so daß  $b \vdash x > a$  ( $x$  wird mit  $a - b$  bezeichnet) ist. Eine Brouwersche Algebra heißt Brouwersche Geometrie, wenn sie durch die „symmetrische Differenz“  $a * b = (a - b) + (b - a)$ , die im Falle einer Brouwerschen Algebra stets den Bedingungen (1), (2), (3) genügt, „autometrisiert“ wird (hier ist  $S = L$ ). Die Eigenschaften dieser Geometrien werden aufgezeigt und mehrere Charakterisierungen angegeben, wann eine Brouwersche Geometrie bzw. Algebra eine Boolesche Geometrie (hier ist  $L = S$  eine Boolesche Algebra) bzw. Algebra ist. Weiterhin werden Untergeometrien Brouwerscher Geometrien betrachtet, sowie zwei Zwischenbegriffe eingeführt, die auf ihr Zusammenfallen hin untersucht werden. Abschließend wird noch die Kongruenzordnung (im Sinne von Menger vgl. Blumenthal, dies. Zbl. **50**, 385) dieser Metrik erörtert.

*H. Karzel.*

**Castrucci, Benedito:** Grundpostulate der projektiven Geometrie. Soc. Paranaense Mat., Anuário **1**, 1—9 (1954) [Portugiesisch].

Nach einem historischen Rückblick folgt eine Untersuchung eines Systems von grundlegenden Postulaten der projektiven Geometrie, ausgehend von den Arbeiten von O. Veblen. Je nachdem, ob der Desarguessche Dreieckssatz gilt oder nicht gilt, gibt es Desarguessche oder nicht Desarguessche projektive Geometrien. Drei Modelle verschiedener Geometrien werden angegeben: A. Eine projektive, ebene, endliche, Desarguessche Geometrie. — B. Eine projektive, unendliche, Desarguessche Geometrie. — C. Eine projektive, allen Postulaten genügende und nicht Desarguessche Geometrie, Beispiel von F. R. Moulton [Trans. Amer. math. Soc. **3**, 192—195 (1902)]. Es folgen Sätze über das vollständige Viereck, über Einführung von Koordinaten in der projektiven Desarguesschen Geometrie und über den Staudtschen Satz (so nennt Verf. den Satz, daß eine Projektivität, in der drei Elemente sich selbst entsprechen, die Identität ist).

*M. Zacharias.*

**Castrucci, Benedito:** Grundlagen der endlichen  $n$ -dimensionalen projektiven Geometrie. Bol. Soc. Mat. São Paulo **7**, 1—83 (1954) [Portugiesisch].

Expository paper.

*G. Ancochea.*

**Kuiper, N. H.:** Eine ebene Geometrie. Simon Stevin **30**, 94—105 (1954) [Holländisch].

Eine synthetische Untersuchung der zur Gruppe derjenigen ebenen affinen Transformationen gehörenden Geometrie, die eine Richtung (die isotrope Richtung) invariant lassen. Die Einführung des Begriffes „Winkel“ leitet zur Behandlung der zu einem Dreieck gehörenden Kreise, u. a. des Sechspunktekreises, dem Analogon des Neunpunktekreises in der euklidischen Geometrie.

*J. J. Seidel.*

**Fadini, Angelo:** Geometrie affini e geometrie metriche generalizzate. Ricerca, Rivista Mat. pur. appl. **5**, Nr. 4, 18—26 (1954).

Verf. untersucht einige Eigenschaften des verallgemeinerten affinen Raumes, den man aus einem projektiven dreidimensionalen Raum dadurch erhält, daß man als uneigentliche Punkte alle diejenigen annimmt, die auf zwei reellen, windschiefen Geraden liegen. Im Rahmen der Untersuchungen wird auf die Existenz metrischer Invarianten in solchen affinen Räumen hingewiesen.

*R. Permutti.*

Hjelslev, Johannes: *Einleitung in die allgemeine Kongruenzlehre*. Danske Vid. Selsk., mat.-fysiske Medd. **25**, Nr. 10, 27 S. (1949).

This paper is a continuation of the third and fifth communications in this series (this Zbl. **26**, 339; **60**, 326). Like the cited papers, it deals with plane geometry in which two points can always be connected by a straight line, but the intersection of several straight lines may be a whole segment („osculating straight lines“). Congruence is defined by means of a group  $C$  of incidence-preserving transformations, which is transitive both with respect to the points and the straight lines. To every straight line  $a$  there is one and only one transformation in  $C$  different from the identity which leaves all the points of  $a$  fixed; it has no other fixed points („reflection  $a'$ “). The reflections serve to define the orthogonality of two straight lines and to introduce the midpoints of segments. Let  $a$  and  $b$  be two straight lines intersecting at a point  $O$ . Suppose  $a$  and  $b$  are not almost orthogonal, i. e.,  $b$  and the normal of  $a$  at  $O$  are neither identical nor osculating. By mapping each point  $P$  on the midpoint of the segment connecting  $P$  with its image under the „rotation“  $a, b$ , we obtain the „half-rotation“  $(a, b)$  about  $O$ . The half-rotations about  $O$  and their inverses generate a commutative group  $S$ . If two nonosculating straight lines  $a$  and  $b$  intersect at  $O$ , then  $a, b, c$  is an involution if and only if  $O$  lies on  $c$ ; the straight lines through  $O$  are said to form a real pencil. Let  $a$  and  $b$  be two nonintersecting straight lines such that the straight lines connecting the points of  $a$  with those of  $b$  are always uniquely determined. Then the set of all the straight lines  $c$  such that  $a, b, c$  is an involution forms an „ideal pencil“. Through each point there exists exactly one straight line of an ideal pencil. To each pencil of this kind we associate an ideal point that lies on all the straight lines of the pencil. The point associated to the ideal pencil of all the normals of a straight line is called the pole of that line. Let  $O$  be a given point („fundamental point“). If any ideal pencil  $\pi$  is given, let  $a$  be its straight line through  $O$ . The pencil  $\pi$  and its ideal point are called regular if  $\pi$  contains a straight line  $b$  whose normal  $a'$  through  $O$  is not almost orthogonal to  $a$ . In that case any three straight lines of  $\pi$  are in involution and the half-rotation  $(a, a')$  transforms  $\pi$  into a real pencil. The „enlarged plane“  $\Omega$  of all the real and the regular ideal points is invariant under  $S$ . The same holds true of the „fundamental straight line“  $\omega$ , i. e., the set of the poles of all the straight lines through  $O$ . A „regular ideal straight line“ is transformed into a real straight line through a suitable half-rotation about  $O$ . Thus the set of the real and of the regular ideal straight lines is also invariant under  $S$ . By means of  $\omega$  and of  $S$  various concepts can be defined in or extended to  $\Omega$ : parallelism, angles and their equality, similarity, orthogonality, reflection, and congruence. The group  $C$  of all congruences can also be enlarged and  $\Omega$  becomes a plane „of Euclidean type“ in which rectangular coordinate systems can be introduced. The coordinates are elements of a ring in which every sum of nonzero squares is a nonzero square. The straight lines are represented by linear equations.

*P. Scherk (Math. Rev. 11, 124).*

Blanuša, Danilo: *Plongement isométrique de l'espace hyperbolique à  $n$  dimensions à distance finie d'un point dans l'espace de Hilbert*. Bull. internat. Acad. Yougoslave Sci. Beaux-Arts, n. Ser. **12** (Cl. Sci. math. phys. techn. 4), 25–30 (1954).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **53**, 109) hat Verf. eine isometrische und singularitätenfreie Einbettung des  $n$ -dimensionalen hyperbolischen Raumes in den Hilbertschen Raum diskutiert. In dieser Arbeit wird eine neue Lösung derselben Aufgabe mitgeteilt.

*J. C. H. Gerretsen.*

Est, W. T. van: *Gruppenerweiterungen und Begriff des Flächeninhalts in der Elementargeometrie*. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1954–014, 4 S. (1954) [Holländisch].

Der Dreiecksinhalt in der hyperbolischen Ebene als Funktion der Eckpunkte ist ein nullkohomologer 2-Kozykel. Bei der Projektion der hyperbolischen Bewegungs-

gruppe  $G$  auf die hyperbolische Ebene entspricht ihm ein Kozykel auf  $G$ , der eine zentrale Erweiterung von  $G$  durch  $A$  (Additionsgruppe der reellen Zahlen) definiert. Da  $G$  halbeinfach ist, muß der Kozykel nullkohomolog sein. Das läßt sich interpretieren als die Tatsache der Gleichheit von Inhalt und Winkeldefekt. — In der elliptischen Geometrie muß man  $A$  ersetzen durch die Additionsgruppe mod  $2\pi$ .

*H. Freudenthal.*

### Elementargeometrie:

**Matsumura, Sōji:** Über Zerlegungsbeweise des Pythagoreischen Lehrsatzes. *J. Osaka Inst. Sci. Technol., Part. I* 5/6, 49—50 (1954).

Durch Diskussion der drei möglichen Unterteilungen eines Rechtecks (Quadrats) in drei Teildreiecke wird gezeigt, daß die Zerlegungsgleichheit des größeren Kathetenquadrats ( $a^2$ ) mit dem zugeordneten Hypothenusenrechteck ( $pc$ ) mindestens vier Paare kongruenter Dreiecke beansprucht. Daß vier Paare stets genügen, ist bekannt.

*W. Süss.*

**Beatty, S.:** Upper and lower estimates for the area of a triangle. *Trans. Roy. Soc. Canada, Sect. III, III. Ser.* 48, 1—5 (1954).

Verf. diskutiert einige vom Ref. mit elementargeometrischen Mitteln gefundenen Ungleichungen im Dreieck [*Nieuw Tijdschr. Wiskunde* 41, 1—7 (1953)], indem er die Sache analytisch darstellt. Es gelingt ihm eine Verschärfung zu finden. Sein Ergebnis ist das folgende. Bezeichnet man mit  $s, H, K$  die symmetrischen Funktionen  $\frac{1}{2}(a+b+c)$ ,  $\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$ ,  $ab+bc+ca$  der Seiten und mit  $A$  den Flächeninhalt eines Dreiecks, so hat man

$$\frac{1}{12}(K-H)^2 \geq A^2 \geq \frac{1}{12}(K-H)^2 - \frac{1}{6}(K-H)(2H-K).$$

*J. C. H. Gerretsen.*

● **Guitel, Geneviève:** Étude métrique des familles de tétraèdres et de figures apparentées. Préface par Georges Bouligand. (Études pratiques d'accès à la recherche. A. Section des actualités géométriques.) Paris: Centre de Documentation Universitaire 1954. VI, 139 p.

Der erste Teil der Arbeit befaßt sich mit der Klassifikation der Dreikante und der Tetraeder nach dem Geschlecht. Dabei ist das Geschlecht eines Dreikants die Anzahl stumpfwinkliger Stücke und das Geschlecht eines Tetraeders wird durch seine vier begrenzenden Dreikante bestimmt. Es gibt sieben Geschlechter von Dreikanten, die im ersten Kapitel eingehend besprochen werden, ebenso die aus ihnen hervorgehenden Parallelepipede. Im zweiten Kapitel wird die 27 Geschlechter der Tetraeder behandelt, deren Konstruktion erörtert und eine Zusammenfassung zu Familien vorgenommen. Kapitel drei behandelt spezielle Tetraeder, Kapitel vier die Tetraederwinkel (= Gesamtheit der Halbstrahlen durch einen Punkt, die senkrecht zu den vier Tetraederebenen stehen). Der zweite Teil handelt von der graphischen Analyse von Beweisen und Lehrgängen. Es werden u. a. folgende Arbeiten analysiert: Van der Corpouts Beweis des Primzahlsatzes, van der Waerdens Moderne Algebra Teil II, Beweis des kleinen Fermatschen Satzes, Satz von Feuerbach.

*J. J. Burckhardt.*

**Finoulst, J.:** Merkwürdige Identitäten im Zusammenhang mit regelmäßigen Vielecken. *Simon Stevin* 30, 79—89, französ. Zusammenfassg. 89 (1954) [Holländisch].

Es seien  $n, p$  ganz,  $0 < p < n$ . Verf. definiert  $(n, p) = 2 \sin(p\pi/n)$  und zeigt für diese Funktion zweier ganzzahliger Veränderlicher einige Identitäten auf. Wenn  $k$  eine beliebige natürliche Zahl ist, gilt z. B.  $(n, p) = \prod_{j=0}^{k-1} (kn, \lambda n + p)$ .

*H. J. Kanold.*

**Bilinski, Stanko:** Eine Verallgemeinerung des Satzes von Ptolemaios. *Simon Stevin* 30, 90—93 (1954).

$A_1, A_2, \dots, A_n$  sei eine gegebene Punktmenge im Raum, und es sei  $A_i A_j =$



$a_{i,j} \geq 0$ , je nachdem  $i \leq j$ , also immer  $a_{i,j} = -a_{j,i}$ . Die Verallgemeinerung des Satzes von Ptolemaios lautet dann: Liegen die Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_n$  in dieser zyklischen Folge auf einem Kreis, d. h. ist  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ein einfaches konvexes Sehnenvieleck, so ist der Rang der Matrix  $M_n = ||a_{i,j}||$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) gleich 2. — Es gilt auch die Umkehrung. Falls sich  $n$  gegebene Punkte des Raumes so numerieren lassen, daß der Rang der Matrix  $M_n$  gleich 2 wird, so liegen diese Punkte auf einem Kreis in zyklischer Folge der ausgeführten Numerierung, d. h.  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ist dann ein einfaches konvexes Sehnenvieleck. — Durch Nullsetzen der Determinante  $|a_{i,j}|$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ) erhält man den Sonderfall  $a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23} = 0$ , d. h. den Satz von Ptolemaios.  
M. Zacharias.

### Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

Bilo, J.: On Schäfli sets of lines issued from the vertices of a simplex in a linear space of  $n$  dimensions. Simon Stevin 30, 1—4 (1954).

$n + 1$  gerade Linien  $l_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) des projektiven  $R_n$  bilden einen „Schäfflischen Wurf“, wenn jeder lineare Treff- $R_{n-2}$  von  $n$  dieser Geraden auch die restliche Gerade trifft. Notwendig und hinreichend hierfür ist bekanntlich, daß die Matrix der Grassmann-Koordinaten der  $l_i$  den Rang  $n$  hat. — Seien nun  $A_i$  die auf den  $l_i$  gelegenen Ecken eines regulären Simplex;  $x_{rs}$  sei die  $(n-2)$ -dimensionale Gegenseite der Kante  $a_{rs} = A_r A_s$ , ferner bezeichne  $C_i^{rs}$  ( $i \neq r, s$ ) die Projektion von  $l_i$  aus  $x_{rs}$  auf  $a_{rs}$ . Verf. folgert dann aus dem oben genannten Kriterium, daß bei ungeradem  $n$  die  $(n^2-1)/n+2$  Punkte  $C_i^{rs}$  auf einer Hyperfläche  $(n-1)$ -ter Ordnung liegen und daß die projizierenden Hyperebenen eine Hyperfläche  $(n-1)$ -ter Klasse berühren. Im Falle gerader Dimension  $n$  sind die Punkte  $C_i^{rs}$  durch die bezüglich  $A_r, A_s$  harmonischen zu ersetzen.  
W. Wunderlich.

Barsotti, Leo: Gleichung der regulären, gesternt und Sternpolygone. Soc. Paranaense Mat., Anuário 1, 11—14 (1954) [Portugiesisch].

Mit Benutzung der Funktion  $E(x)$  ( $=$  größte in  $x$  enthaltene ganze Zahl) werden in Polarkoordinaten Gleichungen für die Umfänge regelmäßiger Sternvielecke abgeleitet.  
M. Zacharias.

Stephanides, N. K.: Einige Bemerkungen über Fußpunktkurven. Bull. Soc. math. Grèce 29, 74—76 (1954) [Griechisch].

Verf. bestimmt Kurven  $C$  mit Fußpunktkurven  $C^*$  von der Eigenschaft, daß die entsprechenden Bogenelemente von  $C$  und  $C^*$  aufeinander senkrecht stehen, und zeigt, daß die Fußpunktkurven einer konischen Schraubenlinie wieder konische Schraubenlinien sind, deren entsprechende Bogenelemente einen konstanten Winkel miteinander bilden.  
O. Volk.

Lorent, H.: Courbes ou surfaces associées à des faisceaux de courbes ou de surfaces données. Anais Fac. Ci. Porto 38, 81—105 (1954).

Dem 1. Teil der Arbeit liegt folgende Erzeugungsweise ebener Kurven zugrunde: Punkt  $P'(x', y')$  bewegt sich auf einer festen Kurve  $C_1$ . Durch  $P'$  geht eine bestimmte Kurve  $C_2$  eines gegebenen Büschels mit Parameter  $a$ . Der Kurve  $C_2$  ist durch  $b = f(a)$  eine Kurve  $C_3$  eines zweiten gegebenen Büschels mit Parameter  $b$  zugeordnet. Die Schnittpunkte  $P(x, y)$  von  $C_3$  mit der Geraden  $OP'$  beschreiben dann die zu erzeugende Kurve. Dies wird an 36 speziellen Beispielen durchexerziert. (Verwendete Kurven: Gerade, Kegelschnitte, Neilsche Parabel, Kissoiden, Strophoiden u. a.)  $f(a)$  ist linear oder  $\sqrt{c^2 - a^2}$ . Unter den erzeugten Kurven sind 11 von der 5. Ordnung, die Ordnungen der übrigen gehen von 2 bis 22. Die meisten Kurven sind ein- oder mehrfach zirkular. — Im 2. Teil führt Verf. die entsprechende Erzeugung von Flächen an 13 Beispielen durch, wobei Flächen der Ordnungen 4, 5, 6, 8, 10 und 12 entstehen. (Verwendete Flächen: Kugel, hyperbolisches Paraboloid, eine Fläche 3. Ordnung, ein Zylinder und eine Rotationsfläche der Ordnung 4 bzw. 6). —

An jede der erhaltenen Gleichungen schließt Verf. einige Bemerkungen über die Singularitäten und sonstige gestaltliche Eigenschaften der betreffenden Kurve bzw. Fläche an, die jedoch zahlreiche Unrichtigkeiten enthalten. — Die Rechnung gestaltet sich dadurch sehr einfach, daß Verf. in allen Beispielen des 1. Teiles  $C_1$  und  $C_2$  in der Form  $p(x', y') = q(x', y')$  bzw.  $P(x', y') = a \cdot Q(x', y')$  wählt, wo  $p, q$  sowie  $P, Q$  homogene, in der Ordnung nur um 1 oder 2 differierende Polynome sind. Infolgedessen stellt sich  $a$  oder  $a^2$  als rationale Funktion von  $x, y$  dar, und die Erzeugung läuft auf die einfachere mittels zweier durch  $b = f(a)$  aufeinander bezogener Büschel algebraischer Kurven hinaus. Dasselbe gilt sinngemäß für den 2. Teil.

*E. Schönhardt.*

### Algebraische Geometrie:

**Nakai, Yoshikazu:** Notes on Chow points of algebraic varieties. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A 28, 125—127 (1954).

Two properties of Chow points are proved. First: Let  $V$  be a projective variety and  $k_0$  be the prime field. Let  $M^\lambda$  ( $\lambda = 1, 2, \dots$ ) be a sequence of independent generic points of  $V$  over a field of definition for  $V$ . Then for a sufficiently large  $n$  the Chow point of  $V$  is rational over  $k_0(M_1, \dots, M_n)$ . Second: Let  $k$  be a field of definition for  $V$  and denote by  $X$  a divisor on  $V$ . Then it is characterized the dimension of the Chow point of  $X$  over  $k$  as the maximal number of independent generic points of  $V$  over  $k$  lying in  $\text{Supp}(X)$ . This theorem may be sometimes useful when we treat Chow points of divisors. This theorem is proved as an immediate corollary of the first, though one can prove it without using that.

*Y. Akizuki.*

**Rosenlicht, Maxwell:** Generalized jacobian varieties. Ann. of Math., II. Ser. 69, 505—530 (1954).

Let  $C$  be an absolutely non-singular curve, let  $k$  be a field of definition of  $C$  and let  $K = k(C)$  be the function field of  $C$  over  $k$ . Let  $\mathfrak{o}$  be a semilocal subring of  $K$  (with quotient field  $K$ ). In a preceding paper (see this Zbl. 47, 145), the author introduced notions such as  $\mathfrak{o}$ -equivalence relation,  $\mathfrak{o}$ -genus and  $\mathfrak{o}$ -differentials of 1st kind. Divisors  $\mathfrak{o}$ -equivalent to zero are divisors of functions in  $\mathfrak{o}$  which are invertible in  $\mathfrak{o}$ . Everything is preserved by constant field extensions. Now, the generalized jacobian variety  $J(\mathfrak{o})$  is a commutative group variety (i. e. quasi-abelian variety) isomorphic to the quotient group of those divisors of degree zero which contain no place in  $\mathfrak{o}$  modulo the divisors  $\mathfrak{o}$ -equivalent to zero. Its dimension is equal to the  $\mathfrak{o}$ -genus  $\pi$  of  $K$ . In the classical case,  $J(\mathfrak{o})$  is the quotient group of the additive group  $(k)^\pi$  by the discrete subgroup of periods of  $\mathfrak{o}$ -differentials of 1st kind on  $C$  (where  $k$  is the complex number field). After preparing some results on group varieties, the author constructs, under the assumption that  $C$  has infinitely many  $k$ -rational points,  $J(\mathfrak{o})$  as an abstract variety over  $k$  by the method of A. Weil. (We may note that  $J(\mathfrak{o})$  can also be constructed over  $k$  by Chow's method without any restriction on  $k$ .) The canonical mapping  $q$  is regular at each point of  $C$  except the places of  $\mathfrak{o}$ . If  $\mathfrak{o}$  and  $\mathfrak{o}'$  are semilocal subrings of  $K$  such that  $\mathfrak{o} \subset \mathfrak{o}'$ , then there exists a homomorphism  $\tau_{\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'}$  of  $J = J(\mathfrak{o})$  onto  $J' = J(\mathfrak{o}')$  such that  $\tau_{\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'} \varphi_{\mathfrak{o}} = q_{\mathfrak{o}'}$  for suitable choice of the canonical mappings.  $\tau_{\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'}$  is an isomorphism if  $\pi = \pi'$ . The kernel  $H$  of  $\tau_{\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'}$  is an irreducible group variety over  $k$ , and if  $k$  is infinite then  $H$  is a rational variety over  $k$ . Moreover,  $J$  is birationally equivalent to  $J' \cdot H$ . Hence  $J(\mathfrak{o})$  is an abelian variety if and only if it is an ordinary jacobian variety. Moreover, under the conditions that  $\mathfrak{o}$  and  $\mathfrak{o}'$  have the same places and that  $\mathfrak{o}'$  modulo each of its maximal ideal is precisely  $k$ , the kernel  $H$  is a group of the form  $(G_m)^t \times H_1$ , where  $G_m$  is the multiplicative group of the universal domain,  $t$  is the number of local rings of  $\mathfrak{o}'$  minus the number of local rings of  $\mathfrak{o}$ , and  $H_1$  is a group which is as a variety biregularly equivalent to a whole affine space. If the characteristic is zero,  $H_1$  is of the form  $(G_a)^s$ , where  $G_a$  is the additive group of the

universal domain. Taking the integral closure  $\mathfrak{o}$  of  $\mathfrak{o}$ , we get the ordinary jacobian variety  $J_0 = J(\mathfrak{o})$ . If  $\dim J > \dim J_0$ , there exists no regular cross section of  $J_0$  in  $J$ . The generalized jacobian varieties may be as useful as the ordinaries, especially to the class field theory of function fields and to the theory of differentials of 3<sup>rd</sup> kind, on a curve.

*Y. Akizuki.*

**Barsotti, Iacopo:** Il teorema di dualità per le varietà abeliane ed altri risultati. *Rend. Mat. e Appl.*, V. Ser. **14**, 98—114 (1954).

In seinen früheren Untersuchungen über algebraische Geometrie nach dem Standpunkt von A. Weil hatte der Verf. bereits einige Sätze über abelsche Mannigfaltigkeiten bewiesen [s. *Rend. Circ. mat. Palermo*, II. Ser. **2**, 236—257 (1953)]. In der vorliegenden Arbeit wird unter Benutzung von Resultaten von Matsusaka und von einigen noch nicht erschienenen Ergebnissen des Verf. gezeigt: (1) der Dualitätssatz einer abelschen Mannigfaltigkeit über einem Körper der Charakteristik Null bezüglich ihrer Picardischen Mannigfaltigkeit; (2) der Basissatz der abelschen Mannigfaltigkeiten über beliebigen Körpern; (3) der Satz, nach dem die Torsionszahl  $\sigma$  einer abelschen Mannigfaltigkeit über einem Körper der Charakteristik Null den Wert 1 hat. In Übereinstimmung mit dem Geiste der modernen algebraischen Geometrie werden die Beweise nur mit algebraischen Mitteln geführt [(1) und (3) wurden von anderen Verff. mit transzendenten oder topologischen Methoden bewiesen]. Verf. bemerkt, daß der Beweis des Satzes (1) im Falle eines Körpers der Charakteristik  $\neq 0$  große Schwierigkeiten bietet: er vermutet sogar, daß der Satz in diesem Falle nicht richtig ist. Ob (3) im Falle einer Charakteristik  $\neq 0$  gilt, ist noch nicht entschieden.

*M. Rosati.*

**Franchetta, Alfredo:** Sulle forme algebriche di  $S_4$  aventi l'hessiana indeterminata. *Rend. Mat. e Appl.*, V. Ser. **14**, 252—257 (1954).

Caractérisation géométrique des  $\Gamma_3$  du  $S_4$  pour lesquelles la hessienne devient indéterminée (v. ce Zbl. **43**, 362).

*G. Ancochea.*

**Spampinato, Nicolò:** Sulla  $V_8^7$  dell' $S_{11}$  contenente tutte le  $V_6^{2(n+m)}$  rispondenti alle curve di ordine  $n$  e classe  $m$  dell' $S_2$ . *Rend. Accad. Sci. fis. mat. Napoli*, IV. Ser. **21** (93), 157—165 (1954).

Étant donné dans un  $S_{11}$  quatre plans  $S^{(1)}, S^{(2)}, S^{(3)}, S^{(4)}$  ne se rencontrant pas deux à deux et projectifs à un plan  $S$ , l'A. associe à un élément de contact  $(P, p)$  de  $S$  l'espace  $S_5$  déterminé par les points  $P_1$  de  $S^{(1)}$ ,  $P_2$  de  $S^{(2)}$  homologues de  $P$  et par les droites  $p_3, p_4$  de  $S^{(3)}, S^{(4)}$  homologues de  $p$ . Lorsque les éléments de contact appartiennent à une courbe d'ordre  $n$  et de classe  $m$ , l'espace  $S_5$  engendre une variété  $V_6^{2(n+m)}$ . Lorsque la courbe varie dans  $S$ , cette variété décrit une variété  $V_8^7$  dont l'A. étudie les propriétés.

*L. Godeaux.*

**Manara, Carlo Felice:** Questioni di esistenza di curve algebriche piane con caratteri assegnati. *Rend. Sem. mat. fis. Milano* **24**, 66—77 (1954).

In questa conferenza l'A. si trattiene sul problema (studiato da vari Autori) di dimostrare l'esistenza di curve piane algebriche aventi certi caratteri plückeriani ed espone alcuni procedimenti seguiti a tale scopo.

*M. Villa.*

**Hély, Jean:** Une généralisation du théorème de Pascal; le théorème des trois courbes. *Revue sci.* **92**, 32—33 (1954).

Es gilt folgender Satz: Nummeriert man die Seiten eines einem Kegelschnitt  $K$  eingeschriebenen  $2n$ -Ecks fortlaufend und faßt die geraden und die ungeraden Seiten je als eine ausgeartete Kurve  $C_n'$  und  $C_n''$  der Ordnung  $n$  auf, so haben  $C_n'$  und  $C_n''$  gewiß die gegebenen  $2n$  Punkte auf  $K$  gemein. Die weiteren  $n^2 - 2n$  gemeinsamen Punkte von  $C_n'$  und  $C_n''$  liegen dann auf einer Kurve der Ordnung  $n - 2$ . Für  $n = 3$  ist dies der Satz des Pascal. Verf. bringt aber noch folgende weiteren Verallgemeinerungen davon: a) Wenn 3 ebene Kurven  $A, B, C$  der Ordnungen  $l, m, n$  mit  $l \leq m \leq n$  und  $l + m - n > 0$  insgesamt  $p$  Punkte gemein haben, wobei  $p \geq$



$l m = \frac{1}{2} (l + m - n - 1) (l + m - n - 2)$  ist, so haben sie von selber auch  $l m$  Punkte gemein, und bei  $l = n$  bestimmen diejenigen  $m - 1$  Punkte, die auf  $B$  und  $C$ , aber nicht notwendig auf  $A$  liegen, eine Kurve  $A'$  der Ordnung  $n - l$ . Bei  $m < n$  bestimmen die nicht auf  $B$  gelegenen Schnittpunkte von  $A$  und  $A'$  eine Kurve  $B'$  der Ordnung  $n - m$ . Die gemeinsamen Punkte von  $A'$  und  $B'$  liegen auf  $A$ .  
 b) Bei  $l + m - n \leq 0$  und  $p = l m$  gehen auch durch die unter a) erklärten Punktgruppen je Kurven der Ordnung  $n - l$  und  $n - m$ . Diese sind jedoch nicht eindeutig bestimmt, aber man errechnet leicht die Dimension der zugehörigen Linearsysteme. Die Beweise dieser Sätze werden in dieser Note nur angedeutet, nach Ansicht des Ref. wären hierzu zweckmäßig mehrdimensionale Betrachtungen heranzuziehen.  
 W. Burau.

## Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

● **Convegno internazionale di geometria differenziale, Italia, 20—26 Settembre 1953.** Roma: Edizioni Cremonese della Casa Editrice Perrella 1954. XV, 346 p.

Die Arbeiten werden in diesem Zbl. einzeln angezeigt.

**Crommelin, C. A. et W. van der Woude:** Quelle courbe est égale à sa développée? Un cas simple. *Simon Stevin* 30, 17—24 (1954).

Die in der Überschrift dieser Arbeit angegebene Fragestellung nach solchen Kurven, die zu ihren Evoluten kongruent sind, ist schon im letzten Jahrhundert von Ponceux und Binet eingehend behandelt worden. Die beiden erwähnten bekannten Kurven mit dieser Eigenschaft sind die Zykloide und die logarithmische Spirale. Aus „Freude an der Figur“ stellen die Verf. den allgemeinen Resultat von Ponceux das Beispiel einer weiteren expliziten Kurvenklasse auf Seite, welche Eigenschaften der beiden angegebenen Kurven in sich vereint.  
 K. Leichtweiß.

**Bakel'man, I. Ja.:** Die Bestimmung einer glatten Fläche durch die erste und die verallgemeinerte zweite quadratische Form. *Uspechi mat. Nauk* 9, Nr. 4 (27), 155—162 (1954) [Russisch].

Verf. zeigt die eindeutige Bestimmtheit einer Fläche durch ihre erste und verallgemeinerte zweite Grundform.  
 Joachim Nijsche.

**Šulikovskij, V. L.:** Eine invariante Kennzeichnung der Liouvilleschen Flächen. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 94, 29—32 (1954) [Russisch].

V. Wagner (dies. Zbl. 60, 361) hat gezeigt, daß das Auffinden des quadratischen Integrals  $a_{12}(du^2/ds)(dv^2/ds) = C$  der geodätischen Längen einer Fläche durch Lösung eines Systems von Differentialgleichungen mit einer unbekannten Funktion herbeigeführt wird. Die Diskussion der Anzahl der Lösungen dieses Systems von Gleichungen führt zu einer invarianten Kennzeichnung der Liouvilleschen Flächen.  
 W. Wrona.

**Blanuša, Danilo:** Le plongement isométrique de la bande de Möbius infiniment large euclidienne dans un espace  $R_5$ . *Bull. internat. Acad. Yougoslave Sci. Nat. X. Arts, n. Sér.* 12 (Cl. Sci. math. phys. techn. 4), 7—10 (1954).

Ein unendliches Möbiussches Band entsteht, wenn man die Randpunkte eines ebenen Parallelstreifens identifiziert, die bezüglich eines auf der Mittellinie gelegenen Punktes diametral liegen. Verf. zeigt, daß die Fläche isometrisch und singuläritätsfrei in einem 5-dimensionalen Raum eingebettet werden kann. Die eingebettete Fläche läßt sich darstellen durch die Formeln  $x_1 = \frac{1}{2} \varphi$ ,  $x_2 = \varphi \cos \frac{1}{2} \varphi$ ,  $x_3 = \varphi \sin \frac{1}{2} \varphi$ ,  $x_4 = \frac{1}{2} \{1 - \varphi^2 \cos u\}$ ,  $x_5 = \frac{1}{2} \{1 - \varphi^2 \sin u\}$ , wobei  $\varphi$  eine gewissen Bedingungen genügende Funktion bedeutet. Wenn man  $\varphi_0 = \sqrt{1 - \varphi^2}$  nimmt, dann wird die Fläche sogar algebraisch.  
 J. C. H. Gerretsen.

**Blanuša, Danilo:** Le plongement isométrique de la bande de Möbius infiniment large euclidienne dans un espace sphérique, parabolique ou hyperbolique à quatre

dimensions. Bull. Internat. Acad. Yugoslave Sci. Beaux-Arts. n. Sér. 12 (Cl. Sci. math. phys. techn. 4), 19—23 (1954).

Die in der oben referierten Arbeit besprochene Einbettung wird benutzt, um eine angularitätenfreie und konmetrische Einbettung des unendlichen Möbiusschen Bandes in einem 4-dimensionalen Räume zu finden. Die Metrik des Raumes darf hyperbolisch, elliptisch oder parabolisch sein.

*J. C. H. Gerretsen.*

Aoki, Kiyoshi: On symbolic representation. Proc. Japan Acad. 30, 160—164 (1954).

Aoki, Kiyoshi: Note on topological transitivity. Proc. Japan Acad. 30, 428—430 (1954).

In diesen beiden Notizen werden auf Grund von Theoremen von M. Morse und G. A. Hedlund Sätze über geodätische Linsen in zweidimensionalen geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten vom Geschlecht  $\geq 1$  bewiesen, die die Voraussetzung erfüllen, daß es auf keiner ihrer Geodätischen Paare konjugierter Punkte gibt.

*F. Löbell.*

Green, L. W.: Surfaces without conjugate points. Trans. Amer. math. Soc. 76, 529—546 (1954).

Verf. betrachtet zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten  $M$  der Klasse 3 mit folgenden Eigenschaften: 1.  $M$  ist vollständig, 2.  $M$  ist einfach zusammenhängend, 3. die Gaußsche Krümmung ist nach unten beschränkt, 4. auf keiner Geodätischen von  $M$  existieren Paare konjugierter Punkte, 5. zu keinem Punkt einer beliebigen Geodätischen existiert ein Fokuspunkt. Man sagt, zwei geodätische Strahlen (bzw. zwei Geodätische) seien vom gleichen Typ, wenn der Abstand eines beliebigen Punktes des einen Strahls von dem andern Strahl beschränkt ist. Das erste Ergebnis der Arbeit besteht in folgendem Satz: Genügt  $M$  den Bedingungen 1. bis 4., so sind keine zwei verschiedene vom gleichen Punkt ausgehende geodätische Strahlen vom gleichen Typ. Das zweite Ergebnis lautet: Genügt  $M$  den Bedingungen 1. bis 5. und sind  $g$  und  $h$  zwei Geodätische von gleichem Typ, so ist für jeden Punkt zwischen  $g$  und  $h$  die Gaußsche Krümmung gleich Null. Es folgt daraus, daß  $M$  isometrisch der euklidischen Ebene ist, wenn  $M$  den Bedingungen 1. bis 5. genügt und außerdem noch analytisch ist. Verf. erhält diese Sätze, indem er Eigenschaften im großen der Lösungen der Jacobischen Differentialgleichung studiert. Im letzten Abschnitt benutzt Verf. seine Ergebnisse, um die Sätze von M. Morse, G. A. Hedlund (dies. Zbl. 28, 28) und T. Salenius (dies. Zbl. 38, 144) über topologische Transitivität unter allgemeineren Voraussetzungen zu beweisen.

*W. Rinow.*

Gorowara, K. K.: On certain ruled surfaces. Ganita 5, Nr. 2, 105—112 (1954).

Verf. betrachtet im ersten Teil die zu einer beliebigen Regelfläche gehörigen Scharen der Zentraltangenten und Zentralnormalen, sowie die von den Krümmungsachsen gebildete Fläche und deren Zentraltangenten- und Zentralnormalenflächen. Für diese Regelscharen werden die einfachsten Differentialinvarianten berechnet und gezeigt: Hat die Ausgangsfläche und die Fläche der Krümmungsachsen die gleiche Striktionslinie, so ist diese auch Asymptoteneile und umgekehrt. Im zweiten Teil werden die Differentialinvarianten der Regelflächen ermittelt, die das begleitende Dreibein eines beliebigen Flächenstreifens erzeugt.

*H. R. Müller.*

Saban, Giacomo: Sur les congruences cylindriques. Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul. Sér. A 19, 108—118 (1954).

Bilden  $\mathfrak{M}(u, v)$ ,  $\mathfrak{N}(u, v)$ ,  $\mathfrak{I}(u, v)$  das duale begleitende Dreibein einer Regelfläche, so kann man ein zylindrisches Strahlensystem darstellen durch

$$\mathfrak{A}(u, v) = \mathfrak{G}(u) - \varepsilon v [\sin \varphi(u, v) \mathfrak{N}(u) + \cos \varphi(u, v) \mathfrak{I}(u)].$$

Verf. zeigt: 1. Ist  $\varphi$  Funktion von  $u$  allein, dann sind die Zylinder des Systems Ebenen. 2. Ist  $\varphi = 0$ , dann ist das Strahlensystem parabolisch. 3. Ist  $\varphi = 1$ , dann

ist das System ein Normalensystem. Die Arbeit des Ref. über allgemeine zylindrische Strahlensysteme (dies. Zbl. 5, 24), in der die obigen Sonderfälle als Entartungen ausgeschlossen werden, scheint Verf. nicht bekannt zu sein.

W. Haack.

**Bhattacharya, P. B. and Ram Behari:** Congruences of Guichard. *Ganita* 5, Nr. 2, 237—249 (1954).

Bekanntlich ist eine Kongruenz von Guichard als eine Geradenkongruenz definiert, bei der die Torsallinien ihrer Brennflächen mit den Krümmungslinien dieser Flächen zusammenfallen. In der vorliegenden Arbeit werden sowohl analytische als auch geometrische Bedingungen dafür hergeleitet, daß eine gegebene Fläche Brennfläche einer Kongruenz von Guichard ist. Ebenso lassen sich derartige Bedingungen für das sphärische Bild einer Guichardschen Kongruenz herleiten, welches durch zu den Kongruenzgeraden parallele Einheitsvektoren gebildet wird. Verf. gewinnt so eine Reihe bekannter Resultate, bei denen u. a. die Evoluten der Brennflächen eine besondere Rolle spielen.

K. Leichtweiß.

**Kovancov, N. I.** Anwendung der Ideen der anholonomen Geometrie auf einen Linienkomplex. *Ukrain. mat. Žurn.* 6, 270—281 (1954) [Russisch].

In den Zentralpunkt  $\alpha$  des Komplex-Strahles wird ein Dreiein gelegt, dessen Einheitsvektoren  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$  in die Richtungen der Haupt-, der Binormalen- und in Richtung des Komplexstrahles fallen. Dann ist  $da = \sum \omega_i \mathfrak{F}_i$ . Die drei Differentialformen  $\omega_i$  wählt Verf. als Grundformen des Komplexes. In einer früheren Arbeit hat Verf. die Flächenscharen  $\omega_i = 0$  untersucht für den Fall, daß ein  $\omega_i$  integrabel, also  $[d, \omega_i] = 0$  ist (dies. Zbl. 50, 382). Jetzt wird die Integrabilitätsforderung fallen gelassen; im Sinne der anholonomen Differentialgeometrie werden die Kurvenscharen bzw. die anholonomen Flächenelemente studiert, die  $\alpha$  beschreibt, wenn ein  $\omega_i = 0$  ist. Dabei wird im Falle  $\omega_1 = 0$  der Punkt  $\alpha$  als Zentralpunkt des Hauptnormalenkomplexes, im Falle  $\omega_2 = 0$  des Binormalen- und im Falle  $\omega_3 = 0$  des Grundkomplexes angesehen. Verf. berechnet die Krümmungslinien I. und II. Art, die Gaußsche und die totale Krümmung (die in der anholonomen Geometrie nicht übereinstimmen). Zwischen der Gaußschen und der totalen Krümmung besteht eine einfache Beziehung, die nur von der Krümmung des Grundkomplexes abhängt. Zwischen den Gaußschen Krümmungen der drei Flächen gilt die Beziehung  $K_3 + K_1 = K_2$ . — Zum Schluß werden spezielle Klassen von Komplexen behandelt. Die Arbeit des Ref. (dies. Zbl. 34, 91) scheint Verf. nicht bekannt zu sein.

W. Haack.

### Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

**Santaló, L. A.:** Fragen der affinen Differentialgeometrie der Flächen. 2° Sympos. Probl. mat. Latino América, Villavicencio-Mendoza 21—25 Julio 1954, 21—33 (1954) [Spanisch].

L'A. adotta per una superficie  $X = X(u, v)$  dello spazio ordinario un riferimento mobile  $(X; I_1, I_2, I_3)$  legato ad essa da proprietà affini che consentono solo trasformazioni del tipo: (1)  $I_1^* = \lambda I_1, I_2^* = \lambda^{-1} I_2, I_3^* = I_3$ . Determina quindi per detto riferimento le formule di derivazione esprimenti le componenti relative dei vettori  $dX, dI_i$  rispetto alla terna  $I_1, I_2, I_3$ : le combinazioni di dette componenti che rispetto alle trasformazioni consentite (1) risultano indipendenti da  $\lambda$  sono invarianti affini della superficie. Seguono alcune formule integrali e applicazioni.

P. Buzano.

**Čachtauri, A. J.:** Anwendungen der inneren Geometrien ebener Netze in der Flächentheorie. *Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze* 20, 89—130 (1954) [Russisch].

In der vorliegenden Arbeit wird die projektive Differentialgeometrie der Flächen des  $P_3$  völlig in der Art behandelt, wie sie in den bekannten Werken von Fubini-Čech



dargestellt ist (vgl. Fubini-Čech, Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces, Paris 1930) und in vermutlich schwer zugänglichen Arbeiten von Norden (vgl. Norden, dies. Zbl. 41, 502) und vom Verf. (s. Čachtauri, Innere Geometrien ebener Netze, Diss. Kasan 1946) weitergeführt wurde, während die in den Büchern von Bol niedergelegte Behandlung der projektiven Differentialgeometrie (s. Bol, Projektive Differentialgeometrie II, Göttingen 1954, 450 S.) leider völlig unbekannt zu sein scheint. Der wesentliche, zuerst von Norden stammende Gedanke, der in der vorliegenden Arbeit weiter ausgesponnen wird, ist folgender: Man ordne der Fläche  $F_2$  des  $P_3$  zwei Geradenkongruenzen, die sogenannten Normalen 1. und 2. Art, zu. Hiervon gehen die Normalen 1. Art durch die Flächenpunkte, während diejenigen 2. Art in den Tangentialebenen liegen. Diese Kongruenzen, kurz Normalenkonfiguration genannt, definieren zwei affine Zusammenhänge auf  $F_2$ , zwischen denen, je nach der Wahl der Konfiguration, mannigfache Beziehungen bestehen können. Ein wichtiger Sonderfall ist der, wo die Normalen 1. und 2. Art konjugiert in bezug auf die Liequadriken der Punkte sind. Zunächst wird folgender Zusammenhang zwischen der Geometrie auf  $F_2$  und der Geometrie ebener Netze hergestellt: Man projiziere  $F_2$  von irgendeinem Punkt  $O$  des  $P_3$  auf eine Ebene  $P_2$ , dann gehen die Asymptotenlinien von  $F_2$  in die Kurven eines ebenen Netzes  $N$  über. Die besondere Struktur von  $N$  hegt darin, daß die Laplace'schen Geraden von  $N$  eine äquiaffine Geometrie definieren. Netze dieser Art heißen Asymptotennetze, ein dazu duales Gebilde wird erhalten, wenn man die Tangentialebenen einer Fläche mit einer Ebene  $P_2$  schneidet und die entstehenden Geraden von  $P_2$  nach Maßgabe der Asymptotenlinien von  $F_2$  zu 2  $\infty^1$  Hüllkurven zusammenfaßt. Hiermit ergibt sich eine wichtige Normalenkonfiguration auf  $F_2$ , die sog. Laplacekonfiguration: Alle Normalen 1. Art gehen dabei durch einen festen Punkt  $O$ , während die Normalen 2. Art dadurch festgelegt werden, daß man die Laplacegeraden eines ebenen Asymptotennetzes  $N$  von  $O$  aus je auf die Tangentialebenen der Fläche projiziert. Hiervon ist wiederum ein Sonderfall, daß die genannten Laplacegeraden von  $N$  ihrerseits wieder das Duale zu einem Asymptotennetz bez.  $F_2$  oder einer anderen Fläche bilden. Es wird ausgerechnet, daß dies genau dann der Fall ist, wenn  $N$  ein kanonisches Netz im Sinne von Fubini-Čech ist. Besondere Aufmerksamkeit erfahren die Fälle, daß die Konfiguration ganz oder teilweise aus den bekannten projektiven Normalen 1. und 2. Art von Wilczynski u. a. besteht, die ja ihrerseits den bekannten mit den Flächenpunkten verbundenen kanonischen Büscheln angehören. In der zweiten Hälfte der Arbeit werden vor allem die Beziehungen der vorher eingeführten Begriffe zu Fragen der projektiven Deformierbarkeit herausgearbeitet. Es ist z. B. für die projektive Deformierbarkeit zweier Flächen notwendig und hinreichend, daß sich auf beiden Flächen Normalenkonfigurationen mit affinen Zusammenhängen finden lassen, die übereinstimmen, wenn man die Flächen unter Zuordnung der Asymptotenlinien zuvor eineindeutig aufeinander bezogen hat.

W. Burau.

**Mastrogiacomo, Pasquale:** Trasformazioni puntuali tra spazi proiettivi osculabili con trasformazioni quadratiche di seconda specie particolari. Ricerca, Rivista Mat. pur. appl. 5; Nr. 1—2, 27—32; Nr. 3, 40—49 (1954).

È noto (M. Villa, questo Zbl. 27, 129) che una trasformazione puntuale  $T$  fra due spazi  $S_3$ , in una coppia regolare  $O, O'$  di punti corrispondenti, si può osculare (cioè approssimare fino all'intorno del 2° ordine) con  $\infty^9$  trasformazioni cremoniane cubiche mentre, in generale, non si può osculare con trasformazioni quadratiche. I casi particolari in cui  $T$  ammette in  $O, O'$  trasformazioni quadratiche osculatrici ( $\infty^3$ ) sono stati studiati da G. Martini (questo Zbl. 41, 492), A. Cossu (questo Zbl. 44, 363), P. Mastrogiacomo (questo Zbl. 56, 407). Nel lavoro attuale l'A. considera il caso in cui le trasformazioni quadratiche osculatrici sono di 2ª specie particolari.

M. Villa.

**Grigorev, I. N.:** Die asymptotische Transformation von  $p$ -orthogonal-konjugierten Systemen im  $n$ -dimensionalen Raum. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 97, 765—767 (1954) [Russisch].

Verf. bringt einen Satz über  $p$ -orthogonal-konjugierte Systeme. Ein solches besteht aus  $p$  paarweise orthogonalen  $(p - 1)$ -dimensionalen Flächen, bei denen die Schnittkurven auf den Flächen jeweils konjugiert sind. (Liegen die Flächen im  $n$ -dimensionalen Raum, so ist für  $p = n$  die Bedingung der konjugierten Schnitte von selbst erfüllt.) In Verallgemeinerung eines Satzes der klassischen Differentialgeometrie (für  $p = n = 3$ ), auf den Verf. am Anfang besonders eingeht, gilt hier: Gestattet ein solches System asymptotische Transformationen, so besteht es aus einer Schar pseudosphärischer dreifach orthogonaler Systeme, von denen jedes in einem dreidimensionalen euklidischen Raum liegt. Joachim Nitsche.

**Matsumura, Soji:** Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln. LXII. J. Osaka Inst. Sci. Technol., Part. I 5/6, 47—48 (1954).

**Matsumura, Soji:** Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln. J. Osaka Inst. Sci. Technol., Part. I 5/6, 55—60 (1954).

**Copal, Sofia:** Sur quelques propriétés remarquables des congruences de sphères. Acad. Republ. popul. Române, Fil. Iași, Studii Cerc. ști. 2, 83—87, russ. und französ. Zusammenfassg. 87—88 (1951) [Rumänisch].

Etant donnée une famille  $\infty^2$  de sphères, soient  $M$  le centre d'une de ces sphères,  $M_1, M_2$  les points des nappes focales correspondant à  $M$ ,  $d\sigma_1, d\sigma_2$  des aires infinitésimales décrites respectivement par  $M_1, M_2$ ,  $dv_1, dv_2$  des volumes infinitésimaux décrits respectivement par  $M, M_1, M, M_2$ ,  $\theta$  l'angle de  $MM_1$  avec  $M_1M_2$ ,  $d\sigma_1 + d\sigma_2$ ,  $dv_1 + dv_2$ ,  $\theta$  sont invariants pour les déformations de la surface décrite par  $M$ . M. Haimovici.

### Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

● **Yano, Kentaro:** Gruppi di trasformazioni in spazi geometrici differenziali. Roma: Istituto Matematico dell'Università di Roma 1954. 281 p. [In litografia].

Die Vorlesungsausarbeitung deckt sich der Sache nach mit Teilen des späteren Buches des Verf. (K. Yano, The theory of Lie derivatives and its applications, Amsterdam 1957). Sie enthält (durchweg in Kern-Index-Schreibweise der Tensorrechnung) Einführungen in Riemannsche Geometrie, affinen Zusammenhang, Wegegeometrie, konforme Riemanngeometrie und die Grundlagen der lokalen Theorie der Lie-Gruppen; der Stil entspricht etwa dem von Schoutens Ricci-Calculus, (dies. Zbl. 57, 378), doch ist die Darstellung dem Zwecke entsprechend ausführlicher. Die Lie-Ableitung wird am Beispiel der Bewegungen in Riemannschen Räumen eingeführt und dann für beliebige geometrische Objekte definiert. Es folgen dann ausführliche Kapitel über Bewegungen in den obengenannten Räumen, die sich oft nahezu wörtlich mit den entsprechenden Kapiteln des Buches decken. Ein Anhang befaßt sich mit pseudo-analytischen Vektorfeldern in Kählerschen Räumen.

D. Laugwitz.

● **Lichnerowicz, André:** Geometria differenziale in grande. Gruppo d'olonomia e omologia. Roma: Istituto Matematico dell'Università di Roma 1954. Pp. 132—IV—4 [in litografia].

Ce cours expose les éléments de la géométrie différentielle de manière à amener rapidement le lecteur en présence de problèmes concernant notamment les groupes d'holonomie et d'homologie des variétés. Il contient: I. Cartes; espace vectoriel tangent. Formes différentielles extérieures. — II. Connexion affine; courbure. Dérivée de Lie. — III. Variétés à connexion affine; transport parallèle, groupe d'holonomie. — Variétés riemanniennes, groupes d'holonomie, réductibilité. — IV. Formes harmoniques; homologie, opérateurs  $K_A$ . — V. Structures complexes et quasi-complexes. Ce cours est à rapprocher de l'ouvrage imprimé de l'A.: „Théorie

globale des connexions et des groupes d'holonomie" (Rome 1955). Si l'étendue des matières traitées n'a pas toujours permis de faire figurer les démonstrations, le lecteur trouvera cependant dans ce cours une introduction de valeur aux méthodes de la géométrie différentielle et de la relativité.

*P. Lelong.*

**Lense, Josef:** Zum Einbettungssatz der Differentialgeometrie. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1953, 69—75 (1954).

Unter dem Einbettungssatz versteht der Verf. die Aussage, daß es immer  $N = \frac{1}{2} n(n+1)$  analytische Funktionen  $\xi^\lambda$  der  $n$  komplexen Veränderlichen  $x^\mu$  gibt, so daß identisch in den  $x^\mu$  und  $dx^\mu$  die Beziehung

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \sum_{\lambda=1}^N (d\xi^\lambda)^2$$

bei vorgegebenen analytischen Funktionen  $g_{\mu\nu}(x^1, \dots, x^n)$  gilt. Im Fall  $\text{Rg}(g_{\mu\nu}) = n$  hat E. Cartan (1927) einen Beweis des Satzes angegeben, während ein Induktionsbeweis von M. Janet (1926), der keine Voraussetzungen über den Rang der Koeffizientenmatrix macht, unvollständig blieb, da das Nichtverschwinden einer gewissen Determinante nicht allgemein geklärt werden konnte. Verf. beschäftigt sich mit dem Janetschen Ausnahmefall des identischen Verschwindens dieser Determinante für  $n = 2$  und zeigt, daß dadurch unter den Flächen die isotropen Ebenen charakterisiert werden.

*K. H. Weise.*

**Ôtsuki, Tominosuke:** Isometric imbedding of Riemann manifolds in a Riemann manifold. J. math. Soc. Japan 6, 221—234 (1954).

Verf. verallgemeinert die Ergebnisse von S. S. Chern und N. K. Kuiper (dies. Zbl. 52, 176) über die Einbettbarkeit einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit in den euklidischen Raum auf die isometrische Einbettbarkeit in eine beliebige andere Riemannsche Mannigfaltigkeit. Er benützt hierzu Hilfsmittel, die S. B. Myers (dies. Zbl. 45, 110) entwickelt hat. Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit können hier nicht im einzelnen wiedergegeben werden. Es werde daher nur auf die folgende Aussage hingewiesen: Eine  $n$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, für die die Krümmung jedes Flächenelementes negativ ist, kann nicht isometrisch eingebettet werden in eine  $(2n-2)$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, für die die Krümmung jedes Flächenelementes nicht negativ ist.

*W. Rinow.*

**Nash, John:**  $C^1$  isometric imbeddings. Ann. of Math., II. Ser. 60, 383—396 (1954).

Die Realisierung einer Einbettung einer gegebenen Riemannschen Mannigfaltigkeit in einen euklidischen Raum hängt in hohem Maße davon ab, eine wie hohe Regularitätsklasse der eingebetteten Mannigfaltigkeit verlangt wird. Es zeigt sich, daß im Falle, daß nur  $C^1$ -Einbettung (d. h. von der Klasse  $C^1$ ) verlangt wird, die Dimension  $m$  des euklidischen Raumes, in welchen die Einbettung erfolgt, bedeutend herabgesetzt werden kann im Vergleich zum allgemeinen Fall. Der Verf. behandelt den Fall, daß die eingeprägte Metrik der Riemannschen Mannigfaltigkeit von der Klasse  $C^0$  ist, und versucht diese Mannigfaltigkeit in einen euklidischen Raum  $E_m$  einzubetten bzw. „einzutauchen“ (imbedding bzw. immersion). Der letztgenannte Begriff ist gemeint im Sinne von H. Whitney (dies. Zbl. 15, 320). Negative Resultate bezüglich der Einbettung bei gegebener Klasse  $C^k$  sind jüngst von Tompkins und Chern-Kuiper angegeben. Die verwendete Methode beruht auf den sukzessiven Perturbationen der erzielten Einbettung, und die unendliche Folge der Einbettungen führt schließlich zu der gewünschten Einbettung. Der Verf. bedient sich einer Operation der „short imbedding“, bei welcher die Abstände verkürzt werden. Das Hauptergebnis der Arbeit ist in den folgenden zwei Sätzen enthalten: Jede geschlossene  $V_n$  besitzt eine isometrische  $C^1$ -Einbettung in einen  $E_{2n}$ . Jede  $V_n$  besitzt ein  $C^1$ -isometrisches Eintauchen in einen  $E_{2n}$  und eine isometrische  $C^1$ -Einbettung in einen  $E_{2n+1}$ .

*S. Golab.*



Takizawa, Seizi: On the Stiefel characteristic classes of a Riemannian manifold. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A 28, 1—10 (1953).

Takizawa, Seizi: On the primary difference of two frame functions in a Riemannian manifold. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A 28, 11—14 (1953).

Takizawa, Seizi: On the characteristic classes of a submanifold. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A 28, 241—251 (1954).

C. B. Allendoerfer (dies. Zbl. 40, 381) hat die Stiefelschen charakteristischen Klassen einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $R^n$  mit Hilfe von gewissen Differentialformen  $\Pi_r, \Omega_r$  dargestellt. Verf. gibt eine neue mehr geometrische Herleitung dieser Formeln, indem er zeigt, daß sie mittels der Homotopietheorie der gefaserten Räume aus Ergebnissen von S. Chern [Ann. of Math. II. Ser. 45, 747—752 (1944); dies. Zbl. 60, 381] hergeleitet werden können. Im Anschluß hieran wird die Deformationskokette zweier  $r$ -Bein-Felder im  $R^n$  vermöge der Formen  $\Pi_r, \Omega_r$  berechnet. Diese Differentialformen verwendet Verf. schließlich dazu, die charakteristischen Kohomologieklassen der Tangenten- und Normal-Bündel einer in  $R^n$  eingebetteten Untermannigfaltigkeit darzustellen. *W. Rinow.*

Yagyu, Toshikazu: On the Whitney characteristic classes of the normal bundle. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A 28, 15—17 (1953).

Mit den Methoden der vorstehend besprochenen Arbeiten von Takizawa leitet Verf. eine Integralformel für die Whitney'schen charakteristischen Klassen des Normalbündels einer in  $R^n$  eingebetteten Mannigfaltigkeit her. Er erhält so eine Verallgemeinerung der Formel von S. Chern für die Whitney'sche Invariante [Ann. of Math. II. Ser. 46, 674—684 (1945), dies. Zbl. 60, 381]. *W. Rinow.*

Aragnot, André: Classes caractéristiques et formes différentielles. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 2387—2389 (1954).

$T$  sei ein Faserraum über einem  $m$ -dimensionalen Komplex  $K$ . Die Faser von  $T$  sei der  $n$ -dimensionale euklidische Vektorraum  $E_n$ .  $T$  sei orientiert, d. h. die Strukturgruppe reduziere sich auf die Gruppe der Drehungen des  $E_n$ . Ferner werde  $T$  als differenzierbar von der Klasse  $r \geq 4$  vorausgesetzt.  $R(O)$  bezeichne den Raum der positiv orientierten orthonormierten  $n$ -Beine. In  $R(O)$  sei ein euklidischer Zusammenhang  $w_{ij}$  gegeben. Dann lassen sich Differentialformen  $\Omega^p$  und  $\Pi^p$  definieren, mit deren Hilfe Integralformeln abgeleitet werden können, die die Whitney'schen charakteristischen Klassen zu berechnen gestatten. *W. Rinow.*

Ishihara, Shigeru: Fibred Riemannian spaces with isometric parallel fibres. Tôhoku math. J., II. Ser. 6, 243—252 (1954); Correction. Ibid. 8, 333 (1956).

Im Anschluß an Y. Mutô (Sci. Rep. Yokohama nat. Univ. Sec. 1, 1, 1—14 (1952)) und A. G. Walker (dies. Zbl. 51, 129) betrachtet Verf. differenzierbare Faserbündel  $(E, B, F)$ . Totalraum  $E$ , Basis  $B$  und Faser  $F$  sind zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeiten. In  $E$  und damit in allen Fasern sei eine Riemannsche Metrik eingeführt. Dann hat man in  $E$  das „Orthogonalfeld“, das jedem Punkt  $x \in E$  das zu der durch  $x$  gehenden Faser orthogonale und komplementäre Ebenenelement zuordnet. Ein stückweise differenzierbarer Weg in  $B$ , der von  $b_0$  nach  $b_1$  geht, induziert mittels der über ihm in  $E$  im Orthogonalfeld verlaufenden Wege einen Diffeomorphismus von  $F_{b_0}$  auf  $F_{b_1}$ . Wenn alle diese Diffeomorphismen Isometrien sind, dann sagt man, daß  $E$  isometrische Fasern hat. In diesem Falle ist also die Holonomiegruppe  $H_0$  (Diffeomorphismen von  $F_{b_0}$  auf  $F_{b_0}$  induziert durch geschlossene Wege in  $B$  von  $b_0$  nach  $b_0$ ) eine Gruppe von Isometrien. Die Strukturgruppe des Faserbündels ist immer auf  $H_0$  reduzierbar. Wenn  $E$  isometrische Fasern hat und wenn außerdem das Orthogonalfeld vollständig integrierbar ist, dann spricht man von einem IPF-Bündel (isometric parallel fibres). Für ein IPF-Bündel gilt nach Mutô und Walker folgendes (0): Die Riemannsche Metrik von  $E$  ist lokal nach Fasern und Orthogonalflächen zerlegbar. (1):  $F$  und  $B$  haben natürliche Riemannsche Metriken. (2): Die Strukturgruppe ist eine Liesche Gruppe  $G$  von Isometrien der Faser. (3): Die

„transition functions“  $f_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow G$  können als konstant gewählt werden, d. h. das Bündel rührt her von einem Homomorphismus  $\pi_1(B) \rightarrow G$ . Verf. nimmt jetzt an, daß umgekehrt ein differenzierbares Faserbündel  $(E, B, F)$  gegeben sei, für das (1)–(3) erfüllt sind. Dann läßt sich in  $E$  eine Riemannsche Metrik so einführen, daß  $E$  zu einem IPF-Bündel wird. Verf. untersucht jetzt weiter die IPF-Bündel für den Fall, daß  $E, B, F$  kompakt und orientierbar sind. Er beweist, daß die reellen Homologiegruppen von  $E$  zu denen von  $B \times F$  isomorph sind (unter der Annahme, daß die Strukturgruppe  $G$  in (2) zusammenhängend ist). Schließlich beweist Verf. folgenden Satz: Es sei  $(E, B, G)$  ein Prinzipal-Faserbündel mit der kompakten Lieschen Gruppe  $G$  als Strukturgruppe.  $(E, B, G)$  besitzt dann und nur dann einen infinitesimalen Zusammenhang (connexion), der lokal „flat“ ist, wenn man für  $(E, B, G)$  konstante „transition functions“  $f_{ij}$  einführen kann (siehe (3)). Vgl. S. S. Chern, *Topics in differential geometry*, dies. Zbl. **54**, 68. F. Hirzebruch.

**Igusa, Jun-ichi:** On the structure of a certain class of Kaehler varieties. *Amer. J. Math.* **76**, 669–678 (1954).

Verf. betrachtet kompakte  $n$ -dimensionale Kählersche Mannigfaltigkeiten, die in einem bestimmten Sinne von „konstanter Krümmung“  $k$  sind, was nach Bochner äquivalent auch so ausgedrückt werden kann, daß die Kählersche Metrik in bezug auf geeignete lokale Koordinaten ein lokales Potential

$$U(z, \bar{z}) = \frac{1}{k} \log \left( 1 + k \sum_{j=1}^n \bar{z}_j z_j \right) \quad (k \neq 0), \quad = \sum_{j=1}^n z_j \bar{z}_j \quad (k = 0)$$

hat. Für positives  $k$  spricht man von elliptischen, für negatives  $k$  von hyperbolischen und für  $k = 0$  von parabolischen Mannigfaltigkeiten. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man für  $k = 0$  annehmen, daß  $k = 1$  oder  $k = -1$  ist. Die universelle Überlagerung  $\bar{X}$  einer (kompakten) elliptischen bzw. hyperbolischen bzw. parabolischen Mannigfaltigkeit  $X$  ist komplex-analytisch und isometrisch äquivalent mit dem komplexen projektiven Raum (Fubinische Metrik), der Hyperkugel im  $C^n$  (Bergmannsche Metrik) bzw. mit dem  $C^n$  (Euklidische Metrik). Im elliptischen Fall ist  $\bar{X} = X$ . Verf. zeigt mit Hilfe automorpher Formen, daß jede hyperbolische Mannigfaltigkeit algebraisch ist, d. h. in einen komplexen projektiven Raum geeigneter Dimension eingebettet werden kann. [Inzwischen hat Kodaira einen allgemeineren Satz bewiesen, dies. Zbl. **57**, 141; vgl. auch H. Cartan, *Princeton math. Series* **12** (Algebraic geometry and topology. A Symposium in honor of S. Lefschetz), 90–102 (1957)]. Eine parabolische Mannigfaltigkeit läßt in kanonischer Weise eine endliche Überlagerung zu, welche ein komplexer Torus ist. Die Gesamtheit der parabolischen Mannigfaltigkeiten der Dimension  $n$  zerfällt in eine endliche Anzahl von analytischen Familien, derart, daß zwei Mannigfaltigkeiten derselben Familie reell-analytisch äquivalent sind; diejenigen parabolischen Mannigfaltigkeiten, welche algebraisch sind, bilden also eine endliche Anzahl von Unterfamilien. Die hyperbolischen Mannigfaltigkeiten und die algebraischen parabolischen Mannigfaltigkeiten sind minimale Modelle im Sinne von A. Weil. Der Körper der meromorphen Funktionen einer hyperbolischen Mannigfaltigkeit läßt nur endlich viele Automorphismen zu; das ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Schwarz-Klein. — Verf. erhält einige weitere interessante Resultate, z. B. zeigt er, daß die Euler-Poincarésche Charakteristik einer  $n$ -dimensionalen hyperbolischen Mannigfaltigkeit  $X$  gleich dem arithmetischen Geschlecht  $\chi(X) \left( = \sum_{j=0}^n (-1)^j g_j \right)$

multipliziert mit  $n + 1$  ist. Der Beweis ergibt sich aus der Tatsache, daß der Krümmungstensor von  $X$  sich von demjenigen des komplexen projektiven Raumes  $P_n(C)$  nur um das Vorzeichen unterscheidet. Man kann daraus schließen, daß  $X$  und  $P_n(C)$  im folgenden Sinne proportional sind: Es existiert eine Zahl  $a$  ( $a \neq 0$ ),

derart, daß jede Chernsche Zahl von  $X$  gleich dem  $a$ -fachen der entsprechenden Chernschen Zahl von  $P_n(C)$  ist. Da das arithmetische Geschlecht eine Linearkombination von Chernschen Zahlen ist (Toddsches Polynom, vgl. Ref., Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Berlin 1956; dies. Zbl. **70**, 163) und da ferner das arithmetische Geschlecht von  $P_n(C)$  gleich 1 ist, folgt, daß die Proportionalitätskonstante  $a$  gleich  $\chi(X)$  ist. Da die Eulersche Zahl eine Chernsche Zahl ist, folgt die Behauptung des Verf. Die Proportionalitätsaussage wird vom Verf. nicht so explizit formuliert, sie war aber für Ref. Anregung zu einem Proportionalitätssatz, der nicht nur hyperbolische Mannigfaltigkeiten betrifft, sondern allgemeiner kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten, deren universelle Überlagerung ein beschränktes homogenes symmetrisches Gebiet ist (Vortrag auf dem Symposium on Algebraic Topology, Mexico 1956). *F. Hirzebruch.*

**Yano, K.:** On pseudo-kählerian spaces of constant holomorphic curvature. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1954-012, 5 p. (1954).

A complete exposition with proofs has appeared meanwhile (this Zbl. **64**, 163). *H. Guggenheimer.*

**Sasayama, Hiroyoshi:** On the extended cohomology of higher order. Tensor, n. Ser. **3**, 123—127 (1954).

Zugrunde gelegt sei eine kompakte, zusammenhängende und orientierbare  $n$ -dimensionale Basispunktmannigfaltigkeit  $\hat{M}_n$  von der Klasse  $C^k$  ( $k \geq M + 2$ ). In einer vorangehenden Arbeit (s. dies. Zbl. **49**, 231) hat Verf. den Begriff der äußeren Differentialform, der äußeren Ableitung  $\overset{M}{d}$  einer solchen Form, sowie die damit verknüpften Integralformeln vom Stokesschen Typus auf Räume von Linienelementmannigfaltigkeiten übertragen. Diese Räume lassen sich dabei durch Erweiterung aus Punkträumen gewinnen. Hier wird nun noch ein weiterer von H. V. Craig herrührender Differentialoperator  $(M)$  eingeführt. Auf dem vom Verf. eingeschlagenen Wege ergibt sich derselbe formal auf folgende Weise. Falls  $\hat{A}_p$  eine gewöhnliche auf einer Kette von  $\hat{M}_n$  erklärte  $p$ -Form ist, und die lokalen Koordinaten  $x^i$  von  $\hat{M}_n$  formal als Funktionen eines Parameters  $t$  betrachtet werden, so führt eine  $M$ -fache Differentiation nach  $t$ , wegen des Eingehens höherer Ableitungen der  $x^i$  nach  $t$ , zu einer auf der erweiterten Mannigfaltigkeit definierten, erweiterten äußeren Form. Die Koeffizienten der erweiterten Form sind genau die Craigschen Ableitungen des Feldes, auf dem die ursprüngliche Form  $\hat{A}_p$  definiert war. Für beide Sorten von erweiterten Formen bzw. Feldern kann die Untermenge der geschlossenen Formen und der nullkohomologen Formen erklärt werden. Werden diese für den Differentialoperator  $\overset{M}{d}$ , mit  $\overset{M}{Z}_p$  bzw.  $\overset{M}{B}_p$  bezeichnet, so führt die Quotientenbildung  $\overset{M}{H}_p = \overset{M}{Z}_p / \overset{M}{B}_p$  zu den erweiterten Kohomologiegruppen. Für diese kann unter der Voraussetzung  $M_1 < M_2 \leq M$  ein natürlicher Homomorphismus  $\overset{M_1}{H}_p \rightarrow \overset{M_2}{H}_p \rightarrow \overset{M}{H}_p$  erklärt werden. Im Falle des Craigschen Operators  $(M)$  sind die erweiterten Kohomologiegruppen mit den entsprechenden Kohomologiegruppen der Basismannigfaltigkeit  $\hat{M}_n$  isomorph. Dies ergibt sich aus der Erklärung dieses Operators, sowie der vom Verf. bewiesenen Vertauschbarkeit der Operatoren  $\overset{M}{d}$  und  $(M)$ . *O. Varga.*

**Sasayama, Hiroyoshi:** On the space of line-elements of fractional order with derived metric extensors. Tensor, n. Ser. **4**, 91—106 (1954).

**Sasayama, Hiroyoshi:** On generalized spaces with metric of fractional order. Tensor, n. Ser. **4**, 107—121 (1954).

In der ersten dieser beiden Arbeiten gibt der Verf. die Analogien mit den Ergebnissen von Y. Katsurada (dies. Zbl. **45**, 434) nur formelhaft an, im Raum von



Linienelementen bruchzahliger Ordnung, der vom Verf. definiert worden ist (dies. Zbl. **51**, 381). In der zweiten wird die Analogie mit der Theorie von Kawaguchischen Räumen, besonders dem Syngeschen Vektor, der intrinseken Ableitung usw. (vgl. A. Kawaguchi, dies. Zbl. **15**, 275) in demselben Raum in ganz derselben Weise angegeben.

A. Kawaguchi.

Sasayama, Hiroyoshi: On the extended harmonic and invariant multiple integrals of higher order. Tensor, n. Ser. **4**, 122–127 (1954).

Wird die differenzierbare Punktmannigfaltigkeit, die mit einer Riemannschen Metrik ausgestattet ist, zu einer Mannigfaltigkeit von Linienelementen höherer Ordnung erweitert, so induziert das auch eine Erweiterung des Fundamentaltensors. Für den so erweiterten Riemannschen Raum soll der Begriff der harmonischen Form erklärt werden. Nachdem in einer vorangehenden Arbeit (s. dies. Zbl. **49**, 231) der Begriff der erweiterten  $p$ -Form und des äußeren Differentials derselben eingeführt wurde, muß nur ein dazu entsprechendes Kodifferential eingeführt werden. Dasselbe kann mit Hilfe der von Y. Katsurada (s. dies. Zbl. **45**, 434–435) eingeführten erweiterten kovarianten Ableitung genau so definiert werden, wie im klassischen Falle. Eine erweiterte  $p$ -Form heißt dann wie im klassischen Falle harmonisch, wenn sie gleichzeitig geschlossen und kogeschlossen ist, d. h. ihre äußere Ableitung und die Koableitung verschwinden. Als erste Folgerung ergibt sich hieraus, daß mit jedem erweiterten harmonischen Integral auch das ursprüngliche Integral harmonisch ist und umgekehrt. Bei Heranziehung der von Y. Katsurada eingeführten erweiterten Lieschen Ableitung (s. dies. Zbl. **49**, 121) ergeben sich folgende Sätze, die klassischen Ergebnissen entsprechen. Die erweiterte Liesche Ableitung einer geschlossenen erweiterten Form ist nullkohomolog. Die erweiterte Liesche Ableitung ist ein Operator, der sowohl mit dem erweiterten äußeren Differential wie mit dem Kodifferential vertauschbar ist. Die erweiterte Liesche Ableitung einer erweiterten harmonischen Form ist harmonisch.

O. Varga.

Nasu, Yasuo: On the normality in Minkowskian spaces. Kumamoto J. Sci., Ser. A **2**, Nr. 1, 11–17 (1954).

The author studies the concept of normality in Minkowski spaces in the sense of H. Busemann (this Zbl. **40**, 375) analytically under certain differentiability hypothesis. The same problem was studied by Barthel (this Zbl. **51**, 396), but there was a case overlooked by him. The author completes his results.

S. Sasaki.

Rapesák, András: Eine neue Definition der Normalkoordinaten im Finslersehen Raum. Acta Univ. Debrecen. Ludovico Kossuth **1**, 109–116 (1954) [Ungarisch], deutsche Zusammenfassg. *ibid.*, Addit. ad **1**, 17 (1955).

Verf. beweist, daß die von Ref. (dies. Zbl. **49**, 119) für einen Finslerschen Raum eingeführten Normalkoordinaten eine entsprechende Deutung zulassen, wie dies für Riemannsche Normalkoordinaten zuerst von H. S. Ruse (dies. Zbl. **1**, 169) gezeigt wurde. Es sei  $(x, v)$  das Bezugselement der Normalkoordinaten des Finslerschen Raumes und  $x^i$  ein zu  $x_0^i$  genügend benachbarter Punkt. Dann gibt es genau eine zum Bezugselement  $(x_0, v_0)$  gehörende Quasigeodätische durch  $x^i$ . Ist die von  $x_0^i$  bis  $x^i$  gemessene Bogenlänge dieser Quasigeodätischen  $s - s_0$ , dann sind die zum Bezugselement  $(x_0, v_0)$  gehörenden Normalkoordinaten durch

$$\bar{x}^i = -\frac{1}{2} g^{ki} \left[ \frac{\partial}{\partial x^k} (s - s_0)^2 \right]_{x^k = x_0^k}$$

bestimmt.

O. Varga.

Takasu, Tsurusaburo: Connection spaces in the large. X: A new view on the relation between the „Erlanger Programm“ and the linear connections. Yokohama math. J. **2**, 81–94 (1954).

Das Ziel dieser Arbeit ist es, einen neuen Gesichtspunkt zu formulieren, was den

Zusammenhang zwischen dem „Erlanger Programm“ und der Theorie des linearen Zusammenhanges betrifft. Die Idee wurzelt in der Tatsache, daß das System der geodätischen Linien, die mit Hilfe der Parameter der linearen Übertragung definiert sind, durch das System der „geodätischen Linien zweiter Art“ ersetzt wird. Das letztere ist mit Hilfe von  $n$  Pfaffschen Ausdrücken  $(d\xi)^i = \omega_\mu^i(x^j) dx^\mu$  gegeben. Nicht alle Auseinandersetzungen des Verf. sind nach der Meinung des Ref. ganz klar.

S. Gotab.

**Laptev, B. L.:** Die Liesche Ableitung im Raum der Stützelemente. Uspechi mat. Nauk **9**, Nr. 3 (61), 238—240 (1954) [Russisch].

Man betrachtet in jedem Punkte  $x^i$  von  $X_n$  die Menge der differentialgeometrischen Objekte  $\omega^i$ . Einen Punkt mit dem Objekt,  $(x; \omega)$ , nennt man das Stützelement. Das topologische Produkt von  $X_n$  und der lokalen Mannigfaltigkeit der Objekte  $\omega^i$  nennt man Raum der Stützelemente. Den Linienelementenraum, den Hyper-ebenen-elementenraum, u. a. kann man als besondere Fälle des Raumes der Stützelemente betrachten. Verf. definiert die Liesche Ableitung eines Objektes  $\mathcal{Q}^i(x; \omega)$  im Raume der Stützelemente und gibt dann Anwendungen auf die Theorie der Automorphismen.

W. Wrona.

**Postelnicu, Tiberiu:** Espaces  $A_2$  à connexion affine linéaire localements euclidiens. Revista Univ. C. I. Parhon Politehn. Bucureşti, Ser. Şti. Natur. **3**, Nr. 4/5, 101—130 u. russ. u. französ. Zusammenfassg. 131 (1954) [Rumänisch].

Dans ce travail, on étudie le problème d'équivalence globale d'un espace à connexion affine linéaire à deux dimensions  $A_2(x^1, x^2)$ , localement euclidien, avec l'espace euclidien affine  $E_2(u^1, u^2)$ . En utilisant un sous-groupe du groupe affine à deux variables, on établit un certain nombre de formes canoniques de la connexion de l'espace  $A_2$ , et on donne un criterium algébrique de reconnaître si deux formes canoniques sont ou non distinctes. Pour chaque forme déterminée, un système de coordonnées affines dans  $E_2$  est défini par deux solutions linéaires indépendantes du système d'équations aux dérivées partielles  $\mathcal{L}^2 u^i \partial x^j \partial x^k + \Gamma_{jk}^i u^i \partial x^i = 0$  ( $i, j, k = 1, 2$ ) et l'équivalence globale dépend de la nature des intégrales de ce système. Le Ref. observe que dans certains cas, comme c'est le dernier, l'affirmation où l'A. dit que l'on a équivalence globale n'est pas justifié, car la variable  $u^1$  est toujours positive.

G. Vranceanu.

**Vrănceanu, G.:** Sur les espaces  $A_n$  non projectivement euclidiens, sans torsion avec group maximum. Revista Univ. C. I. Parhon Politehn. Bucureşti, Ser. Şti. Natur. **3**, Nr. 4/5, 87—99 u. russ. u. französ. Zusammenfassg. 100 (1954) [Rumänisch].

Précédemment, l'A. avait montré que l'espace à connexion affine non projectif euclidien pouvait avoir tout au plus un groupe de mouvement avec  $m = n^2 - 2n + 5$  paramètres et que ce maximum était atteint par les espaces de Kagan ayant les composantes  $\Gamma_{jk}^i$  de la connexion, nulles, sauf  $\Gamma_{22}^1 = x^1$ . Dans le présent travail, l'A. montre qu'un espace, possédant un groupe de mouvements  $G_m$ , peut être réduit, par une transformation de variables, à l'espace dont les composantes de connexion sont celles susmentionnées. On y montre d'abord qu'un espace, correspondant aux conditions requises, a les tenseurs contractés de courbure nuls et ensuite on montre que l'espace est symétrique. Après avoir démontré les propriétés envisagées, on donne quelques propriétés différentielles globales. On y montre notamment que les courbures autoparallèles sont des courbes planes de 3<sup>e</sup> degré (pouvant se réduire, dans des cas spéciaux, à des paraboles ou à des droites). Par un changement convenable de variables on arrive à donner à l'espace la connexion définie par les formules

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{2}{3} y^3, \quad \Gamma_{32}^1 = \Gamma_{23}^1 = -\frac{1}{3} y^2, \quad \Gamma_{33}^1 = \Gamma_{jk}^i = 0, \quad (i = 1; j, k = 2, 3)$$

d'où il résulte que par deux points de l'espace passe une seule courbe autoparallèle et aussi une seule géodésique.

Gh. Th. Gheorghiu.

**Kurita, Minoru:** Realization of a projectively flat space. Tensor, n. Ser. 3, 128—130 (1954).

Gegeben sei ein torsionsfreier affinzusammenhängender  $n$ -dimensionaler Raum  $L_n$  mit inhaltstreuer Übertragung. Der Raum sei ferner projektiv eben. Verf. beweist, daß man den  $L_n$  durch eine Hyperfläche  $S$  in einem gewöhnlichen euklidisch-affinen Raum realisieren kann. Dies bedeutet, daß es ein  $(n+1)$ -Bein gibt, von dem  $n$  Vektoren Tangentenvektoren des  $S$  sind, während der  $(n+1)$ -te Vektor von einem festen Raumpunkt nach  $S$  führt; die infinitesimale Bewegung des  $(n+1)$ -Beines bestimmt den affinen Zusammenhang des  $L_n$ . O. Varga.

**Varga, Ottó:** Eine Charakterisierung der Finslerschen Räume mit absolutem Parallelismus der Linienelemente. Acta Univ. Debrecen. Ludovico Kossuth 1, 105—108 (1954) [Ungarisch], deutsche Zusammenfassg. ibid., Addit. ad 1, 16 (1955).

Ungarische Übersetzung des in dies. Zbl. 55, 157 besprochenen Aufsatzes des Verf. A. Moór.

**Kawaguchi, Akitsugu:** On the theory of non-linear connections. Convegno Internaz. Geometria differenz., Italia, 20—26 Set. 1953, 27—32 (1954).

Verf. gibt einen Überblick über seine Theorie des nicht-linearen Zusammenhangs (zur ausführlichen Darstellung vgl. dies. Zbl. 48, 404): Jedem Punkt einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $X_n$  sei ein  $N$ -dimensionaler Vektorraum  $E_N$  zugeordnet. Das absolute Differential  $dx^I$  eines kovarianten Vektors  $v^I$  des  $E_N$  sei durch  $dx^I = dv^I + \omega_i^I(x, v) dx^i$  gegeben, wobei die Funktionen  $\omega_i^I$  homogen vom 1. Grade in den Komponenten  $v^I$  des Vektors sind. Diese Begriffsbildungen lassen sich insbesondere auf die Finsler-Geometrie anwenden. W. Klingenberg.

**Mizoguti, Yukitoyo:** Theory of path structures. I. Japanese J. Math. 24, 53—147 (1954).

Diese umfangreiche Abhandlung enthält eine ausführliche Darstellung der früher unter demselben Titel veröffentlichten Ergebnisse (s. dies. Zbl. 58, 162). A. Kawaguchi.

**Kovancov, N. I.:** Die räumliche Indikatrix der geodätischen Torsionen eines triorthogonalen Systems anholonomer Flächen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 97, 773—776 (1954) [Russisch].

Verf. zeigt, daß für ein dreifach orthogonales System anholonomer Flächen eine Indikatrix (Fläche zweiten Grades) existiert, die die geodätischen Torsionen ebenso bestimmen läßt wie die Normalkrümmungen von Flächenkurven mit Hilfe der Dupinschen Indikatrix. Joachim Nitsche.

### Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

**Kirkor, A.:** Antoine phenomena and geometric properties of simple arcs. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 2, 257—260 (1954).

Verf. konstruiert eine perfekte 0-dim. Menge im  $E_3$ , deren Komplement nicht einfach zusammenhängend ist, und die (im Gegensatz zum Beispiel von Antoine) auf einem Kurvenbogen liegt, der endliche Länge und eine stetige orientierte Tangente fast überall im Baireschen Sinne besitzt. Zuvor werden folgende Eigenschaften einfacher Kurvenbögen im  $E_3$  verglichen: 1. Besitz einer stetigen orientierten Tangente, 2. Besitz einer stetigen nicht-orientierten Tangente, 3. Wilde Einbettung, 4. Umfassen einer perfekten 0-dim. Menge, deren Komplement bezüglich  $E_3$  nicht einfach zusammenhängend ist. Horst Schubert.

**Wunderlich, W.:** Irregular curves and functional equations. Gapita 5, Nr. 2, 215—230 (1954).

Ausgehend von einem einfach zusammenhängenden beschränkten und abgeschlossenen Bereich in einem euklidischen Raum  $E$  und einer geordneten Menge von endlich vielen topologischen Abbildungen  $A_1, \dots, A_r$  ( $r \geq 2$ ) von  $E$  auf sich,



welche drei Bedingungen unterworfen sind, entsteht ein geometrisches Konstruktionsverfahren, das je nach der Wahl des Bereiches und der Abbildungen zu einer ganzen Menge von bekannten irregulären Kurven führt. Die  $A_j$  liefern automorphe Transformationen der zugehörigen Kurve  $C$ , und damit ebenso viele  $C$  vollständig charakterisierende Funktionalgleichungen, die unter Anwendung geschickt gewählter nicht-dekadischer Zahlensysteme zu einer Parameterdarstellung von  $C$  führen. Durch Spezialisierung erhält man stetige Funktionen ohne Ableitung oder ohne endliche Ableitung (Knopp, Steinitz, Bolzano usw.), die von Kochsche Jordan-Kurve ohne Tangenten, die Sierpinski'sche Kurve mit ausschließlich Doppelpunkten, die ein Quadrat auffüllenden Kurven von Peano und Hilbert, schließlich eine von de Rham konstruierte Kurve mit Tangente in jedem Punkt, aber unendlicher Krümmung in den Punkten einer überall dichten Teilmenge. *J. Ridder.*

**Gergely, E.: La classification des surfaces sur la base de leur géométrie intrinsèque.** Acad. Republ. popul. Romîne, Fil. Cluj, Studii Cerc. ști., Ser. I 5, Nr. 3/4, 27—42, russ. und französ. Zusammenfassg. 42—43, 43—44 (1954) [Rumänisch].

Les surfaces envisagées sont des variétés à 2 dimensions dans l'espace euclidien à 3 dimensions, sur lesquelles deux points quelconques peuvent être joints par une courbe de longueur finie; d'autres hypothèses sont introduites au cours de l'exposé. Un domaine convexe d'une surface est une composante connexe de l'ensemble des points ayant un voisinage à métrique convexe, au sens d'A. D. Alexandrov (Géométrie intrinsèque des surfaces convexes, ce Zbl. 38, 352). Les courbes et points isolés qui composent la frontière d'un domaine convexe constituent les „courbes et points isolés de séparation“ de la surface. L'A. étudie les propriétés de l'ensemble de séparation ainsi défini et introduit une classification des surfaces basée sur la structure topologique de cet ensemble et sur la nature, convexe ou non convexe, des domaines „attachés“ aux diverses courbes de séparation. Il décrit une série de domaines „élémentaires“, convexes ou non, à partir desquels on peut construire une surface de classe donnée quelconque. Certaines imprécisions dans le langage, les hypothèses faites et l'exposé des buts poursuivis, rendent difficile la compréhension détaillée de l'article.

*J. Tits.*

**Rešetnjak, Ju. G.: Isotherme Koordinaten in Mannigfaltigkeiten von beschränkter Krümmung.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 94, 631—633 (1954) [Russisch].

Verf. betrachtet die durch A. D. Aleksandrov eingeführten zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten beschränkter Krümmung und beweist den folgenden Satz: Sei  $R$  eine Mannigfaltigkeit von beschränkter Krümmung und  $M$  ein dem euklidischen Kreise homöomorphes Gebiet in  $R$ , dessen Rand eine Schwenkung von beschränkter Variation hat, dann kann man in  $M$  solche Koordinaten  $x$  und  $y$  ( $x$  und  $y$  variieren in einem beschränkten ebenen Bereiche  $D$ ) einführen, daß die Metrik durch das Linienelement  $\lambda(z) (dx^2 + dy^2)$  bestimmt wird. Dabei ist

$$\lambda(z) = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \iint_D \log \frac{1}{|z - \zeta|} \omega(dE_\zeta) + h(z) \right\},$$

$z = x + iy$ ,  $\omega(E)$  die Krümmung von  $E \subset M$ ,  $dE_\zeta$  das Element der Ebene und  $\zeta$  die Integrationsveränderliche. Das Integral ist im Sinne von Lebesgue-Stieltjes zu verstehen und  $h(z)$  bedeutet eine harmonische Funktion im Bereiche  $D$ .

*W. Wrona.*

**Biernacki, Mieczysław: Sur quelques propriétés des ovales.** Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A 7, 103—111, poln. und russ. Zusammenfassg. 111—112 (1954).

Die Arbeit enthält interessante Resultate über konvexe Kurven von verschiedenartigem Charakter. 1. Eine Übertragung eines Ergebnisses von Polya (Isoperimetric inequalities in mathematical physics, dies. Zbl. 44, 383) auf Rotationskörper und einen einbeschriebenen Zylinder. 2. Einen einfachen Beweis des Satzes, wonach einer

Eilinie mindestens zwei Quadrate einbeschrieben werden können. 3. Es seien  $d$  der Durchmesser einer gegebenen Eilinie und  $P, Q$  zwei Punkte derselben mit der Entfernung  $d$ . Die die Punkte  $P$  und  $Q$  verbindende Strecke möge  $C$  in zwei konvexe Kurvenbögen mit der Länge  $L'$  bzw.  $L''$  teilen. Dann gilt  $\min \{L'/L, L''/L\} \geq 1/(1 + \frac{2}{3}\pi) (L' + L'' - L)$ . 4. Es sei  $P$  ein Punkt auf  $C$  und  $r$  die Entfernung von  $P$  von einem festen Punkt von  $C$ . Dann gilt  $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{d^2} \int_C r \, ds \leq \pi$ . Dabei bedeutet  $ds$  das Bogenelement von  $C$ . Es wird gezeigt, daß die untere Grenze exakt ist.

A. Dinghas.

**Matsumura, Soji:** Beiträge zur Theorie der Kurven und geometrische Anwendungen von Fourierschen Reihen. J. Osaka Inst. Sci. Technol., Part. I 5/6, 45—46 (1954).

„Satz 3: Wenn zwei Eilinen eine beschränkte Anzahl von Tangenten haben, dann haben sie auch eine gerade Anzahl von gemeinsamen Tangenten.“ — Vermutlich sind auch im ersten Teil des Satzes gemeinsame Tangenten gemeint. Sodann denke man zur Illustration an einen Kreis, der von einem kleineren von innen berührt wird.

H. Gericke.

**Bieri, H.:** Ein Minimum-Maximumproblem über konvexe Rotationskörper. Commentarii math. Helvet. 28, 149—154 (1954).

Es wird gezeigt, daß in der Menge der polygonalen konvexen Rotationskörper bei gegebener Körperlänge  $l$  und Meridianlänge  $L$  die Zylinder und nur diese das kleinste Integral der mittleren Krümmung  $M$  und die symmetrischen Doppelkegel und nur diese größtes  $M$  besitzen. Da ein beliebiger konvexer Rotationskörper sich durch Polygondkörper approximieren läßt und die auftretenden Größen stetig vom Körper abhängen, gilt diese Aussage auch für die volle Klasse der konvexen Rotationskörper.

R. Inzinger.

## Topologie:

**Monteiro, António A.:** L'arithmétique des filtres et les espaces topologiques. 2. Sympos. Probl. mat. Latino-América. Villavicencio-Mendoza 12—25 Julio 1954, 129—162 (1954).

Verf. berichtet (mit entsprechenden Literaturangaben) über die Verbandseigenschaften von Filtern, insbesondere von Filtern von abgeschlossenen Teilmengen eines topologischen Raumes. U. a. werden besprochen Charakterisierungen des Verbandes aller Filter eines mit einem kleinsten und größten Element (0 bzw. 1) versehenen Verbandes, eines vollständigen, distributiven und kompakten Verbandes, des Verbandes aller abgeschlossenen Teilmengen eines kompakten Hausdorffschen Raumes. Für die Gültigkeit des Satzes von den Primfiltern (Jeder eigentliche Filter ist obere Grenze von Primfiltern) werden notwendige und hinreichende Bedingungen genannt, ebenso für die analogen Sätze von den Ultrafiltern und Ultraidealen. Für Boolesche Verbände gelten die beiden letztgenannten Sätze; es ist aber nicht bekannt, ob dies die einzigen derartigen distributiven Verbände sind. Die Begriffe Normalität, vollständige Normalität, Hypernormalität werden durch sie betreffende Sätze einander gegenübergestellt; insbesondere erweist sich der Verband aller abgeschlossenen Teilmengen eines topologischen Raumes genau dann als hypernormal, wenn der Raum vollständig normal und total-unzusammenhängend ist. In normalen Verbänden lassen sich die Begriffe „Mannigfaltigkeit“ und „Radikal“ eines Filters  $F$  studieren; das erste ist die Menge aller „Umgebungen“ aller Elemente von  $F$ , das zweite ist die obere Grenze aller Ultrafilter, die  $F$  teilen. ( $e$  ist „Umgebung“ von  $a$ , wenn es ein  $w$  gibt mit  $e \leq w = 1$  und  $a \wedge w = 0$ .) Weiter befaßt sich der Bericht mit den verschiedenen Methoden der Kompaktifizierung von topologischen Räumen, mit „Booleschen“, d. h. kompakten und total-unzusammenhängenden Räumen und mit Brouwerschen Algebren im Sinne der mathematischen Logik. G. Aumann.

**Inagaki, Takeshi:** Contribution à la topologie. III. Math. J. Okayama Univ. 4, 79—96 (1954).

Verf. betrachtet einen „espace quantitatif“ (s. Teil II, dies. Zbl. **53**, 302) mit einem „Charakter“ (universellen Indexbereich für die Umgebungen)  $\mathfrak{A}$  von der Mächtigkeit  $\aleph_\xi$ . Wie üblich von offenen und abgeschlossenen Mengen ausgehend, verallgemeinert Verf. in für solche Räume sinnvoller Weise den Begriff des Borelschen Mengenkörpers und damit der Borelschen Mengen und ihrer Klassifikation, indem er statt abzählbarer Vereinigungs- und Durchschnittsabgeschlossenheit eine solche mit der Mächtigkeit  $\aleph_\xi$  fordert. Für Abbildungen zwischen Räumen gleichen Charakters werden dem üblichen Vorgehen analog ( $B$ )-meßbare oder Bairesche Funktionen definiert und klassifiziert; die Funktionen 0-ter Klasse sind die stetigen. Es bestehen die üblichen Zusammenhänge zwischen verallgemeinerten Borelschen Mengen- und verallgemeinerten Baireschen Funktionenklassen. Insbesondere führt die gleichmäßige Konvergenz einer (nicht zu großen) Funktionenfolge nicht in eine höhere Klasse hinein. Es wird der Bairesche Satz über die Menge der Unstetigkeitsstellen einer Funktion der ersten Klasse verallgemeinert. *Jürgen Schmidt.*

**Papić, Pavle:** Sur la séparation des ensembles. Bull. Soc. Math. Phys. Serbie **6**, 158—161 u. serb. Zusammenfassg. 161 (1954).

Pour abrégéer disons qu'un espace est  $s$ -normal si pour chaque couple  $A, B$  de ses ensembles fermés et disjoints il y a un couple  $A_0, B_0$  d'ensembles ouverts disjoints contenant respectivement  $A$  et  $B$  et tels que  $A_0 \cup B_0 =$  l'espace (si l'on barre la dernière condition, on a affaire à la normalité de l'espace).  $R$ -espace est chaque espace définissable par une base ramifiée de voisinages et vérifiant l'axiome  $T_1$  de séparation. Chaque  $R$ -espace est  $s$ -normal (Th. 1). Pour qu'un espace distancié à 0 dimension soit  $s$ -normal, il faut et il suffit qu'il soit un  $R$ -espace (Th. 2) respectivement totalement ordonnable (Th. 3). *G. Kurepa.*

**Iséki, Kiyoshi:** On hypocompact spaces. Portugaliae Math. **13**, 149—152 (1954).

Hypokompakt heißt ein Raum, falls jede seiner offenen Überdeckungen eine Stern-endliche Verfeinerung besitzt. Es wird bewiesen: 1. die Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossenen Teilmengen eines hypokompakten Raumes ist hypokompakt; 2. das topologische Produkt eines hypokompakten Raumes und eines Raumes, der Vereinigung abzählbar vieler kompakter Teilmengen ist, ist hypokompakt. *T. Ganea.*

**Baum, John D.:** Asymptoticity in topological dynamics. Trans. Amer. math. Soc. **77**, 506—519 (1954).

Se limitant essentiellement au cas des groupes abéliens engendrés par un voisinage compact de l'unité l'A. analyse la notion de trajectoires  $P$ -asymptotiques (où  $P$  réfère à un semi-groupe replet). L'A. étudie une relation entre la  $P$ -limite d'une trajectoire et l'ensemble des trajectoires asymptotes à cette dernière. — L'existence de couples de trajectoires asymptotes est établie par certains systèmes instables. L'article utilise les définitions et notions de l'ouvrage déjà classique de Hedlund et Gottschalk. L'article se termine par la discussion de nombreux exemples puisés dans la „dynamique symbolique“. *G. Reeb.*

**Cartwright, M. L. and J. E. Littlewood:** Some fixed point theorems. Ann. of Math., II. Ser. **54**, 1—37 (1951).

Le résultat essentiel s'énonce ainsi: soit  $T$  un homéomorphisme direct de  $R^2$  sur  $R^2$  qui laisse invariant un continu  $M$  (où  $M$  ne sépare pas  $R^2$ ); alors  $T$  admet au moins un point fixe. Ce résultat est important dans l'étude des solutions périodiques de certains systèmes différentiels. Depuis les démonstrations des AA. ont été simplifiées (voir le rapport suivant). *G. Reeb.*

**Hamilton, O. H.:** A short proof of the Cartwright-Littlewood fixed point theorem. Canadian J. Math. **6**, 522—524 (1954).

Il s'agit du théorème Cartwright-Littlewood (voir le rapport précédent). La démonstration utilise le lemme suivant (démontré dans la présente note): Si  $T$  est un homéomorphisme direct de  $R^2$  sur  $R^2$  laissant invariant un continu  $M$ , sans point



fixe sur  $M$ , (où  $M$  ne sépare pas  $R^2$ ) il existe un homéomorphisme  $T'$  de  $R^2$  sur  $R^2$  sans point fixe, qui coïncide sur  $M$  avec  $T'$ .

G. Reeb.

**Aleksandrov, P.:** Über einige neue Ergebnisse in der kombinatorischen Topologie der nicht-abgeschlossenen Mengen. *Fundamenta Math.* **41**, 68–88 (1954) [Russisch].

In dieser Arbeit gibt Verf. eine zusammenfassende Übersicht über einige der wichtigsten von ihm und Sitnikov erzielten Ergebnisse in der kombinatorischen Topologie der nicht-abgeschlossenen Mengen im  $R^n$ . Zunächst wird berichtet über den allgemeinen Hindernis- und den Deformationssatz sowie über die übrigen Ergebnisse von Sitnikov zur Dimensionstheorie, von denen inzwischen die ausführlichen Beweise erschienen sind (Sitnikov, dies. Zbl. **65**, 161). Dann folgt eine Übersicht über den ersten Dualitätssatz von Sitnikov (dies. Zbl. **55**, 163) sowie ein eingehender Vergleich mit dem Dualitätssatz von Verf., der auch an anderer Stelle (Verf., dies. Zbl. **53**, 126) zu finden ist. Zum Schluß werden einige Fragen formuliert, die inzwischen zum Teil durch weitere Arbeiten von Sitnikov, insbesondere seinen zweiten Dualitätssatz (Sitnikov, dies. Zbl. **55**, 163) beantwortet wurden (vgl. auch Verf., dies. Zbl. **55**, 164).

E. Burger.

**Berikašvili, N. A.:** Über Dualitätssätze für beliebige Mengen. *Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoy SSR* **15**, 407–414 (1954) [Russisch].

Verf. beweist einen Dualitätssatz für beliebige Mengen in der Sphäre, in dem Ref. eine Wendung des Sitnikovschen Dualitätssatzes (der eigentlich ein Isomorphiesatz ist) in einen echten Dualitätssatz zu erkennen meint. Bekanntlich betrachtet K. Sitnikov (dies. Zbl. **43**, 383) einerseits zu einer Menge  $A$  Vietoris-Homologiegruppen mit Zyklusfolgen, die kompakte Träger (in  $A$ ) besitzen, andererseits zu der Komplementärmenge  $B$  Čech-Kohomologiegruppen mit unendlichen Kozyklen auf sternendlichen Überdeckungen (mit den Überdeckungsfolgen wird direkt zum Limes übergegangen). Zwischen solchen Gruppen wird Isomorphie konstatiert, wenn die Koeffizientengruppen diskret sind. Verf. ersetzt die zweite Gruppe nun durch eine, die man erhält, wenn man erst eine Überdeckung betrachtet, Čech-Homologiegruppen auf endlichen Teilkomplexen dieser Überdeckung bildet und direkt zum Čogošvili-Limes übergeht und danach längs der Überdeckungen invers den Limes bildet. Er konstatiert Dualität (wenn der zweite Koeffizientenbereich dual zum ersten ist). — Verf. behandelt ähnlich auch den Alexandrov-Čogošvilischen Dualitätssatz (G. Čogošvili, dies. Zbl. **42**, 169).

H. Freudenthal.

**Gordon, W. L.:** On the coefficient group in cohomology. *Duke math. J.* **21**, 139–153 (1954).

The author discusses the effect of the use of various coefficient groups in the Alexander-Spanier cohomology theory (Spanier, this Zbl. **35**, 248). The exact sequence of coefficients, the direct product theorem etc. are proved. *Atuo Komatu.*

**Vázquez García, R.:** Die  $i$ -Produkte von Koketten in der kubischen singulären Theorie. *Bol. Soc. mat. Mexicana* **11**, 9–32 (1954) [Spanisch].

L'A. étend à la théorie de l'homologie singulière cubique (mod 2) introduite par J. P. Serre (ce Zbl. **45**, 260) la notion de produit  $\psi$  (cup- $i$ ) de Steenrod (ce Zbl. **30**, 416) et en donne la construction explicite. Il montre que les  $i$ -carrés  $Sq_i$  basés sur cette définition coïncident avec les  $i$ -carrés de Steenrod (mod 2) parce qu'ils vérifient les conditions données par Serre (ce Zbl. **52**, 195) qui caractérisent ces derniers.

G. Hirsch.

**Heller, Alex:** Homological resolutions of complexes with operators. *Ann. of Math.*, II. Ser. **60**, 283–303 (1954).

Es werden Homologieeigenschaften von Komplexen mit Operatoren untersucht mit Hilfe von entsprechenden homologie-algebraischen Strukturen, insbesondere der „resolutions“. Diese werden durch einen rekursiven Prozeß erklärt, der ein Homologie-Analogon zu den Konstruktionen von Postnikov (dies. Zbl. **42**, 172) über den

Homotopietypus eines Polyeders darstellt. Er verläuft auf der Grundlage der Homologiealgebra von Cartan-Eilenberg (Homological Algebras, Princeton 1956). Als topologische Anwendung wird eine Verallgemeinerung des P. A. Smithschen Fixpunktsatzes über periodische Abbildung von Sphären angegeben. Besonders betrachtet wird der Fall, daß der Operatorenbereich der Gruppierung einer zyklischen Gruppe von Primzahlordnung ist.

Wolfgang Franz.

**Adem, José:** Algebraische Operationen in der Topologie und einige Anwendungen auf geometrische Probleme. 2° Sympos. Probl. mat. Latino América, Villavicencio-Mendoza 21—25 Julio 1954, 179—189 (1954) [Spanisch].

Der Vortrag gibt einen gedrängten Überblick über bekannte Methoden der algebraischen Topologie; zur Illustration werden Anwendungen dieser Methoden auf einige geometrische Probleme besprochen. In den einzelnen Abschnitten des Vortrags werden folgende Themen behandelt: Homologie- und Cohomologie-Gruppen. Homotopie-Gruppen. Hopfsche Invariante.  $p$ -Potenzen von Steenrod. Homologie von Mannigfaltigkeiten. Abbildungen von Sphären in Sphären. Composition von Sphären-Abbildungen.

H. Bauer.

**Noguchi, Hiroshi:** A characterization of homotopically labil points. Kōdai math. Sem. Reports 1954, 13—16 (1954).

Sind  $A$  ein metrischer Raum und  $p$  ein Punkt aus  $A$ , so heiße  $p$  ein „labiler“ Punkt im Sinne von H. Hopf und E. Pannwitz, wenn zu jeder in  $A$  offenen Menge  $U \ni p$  eine Homotopie  $\{f^t\}$  stetiger Abbildungen von  $\bar{U}$  in sich existiert, die die Eigenschaften hat: es ist  $f^0$  die Identität,  $f^t(p) = p$  in allen  $(p, t)$  mit  $p \in \bar{U} - U$  und  $0 \leq t \leq 1$ , schließlich  $f^1(U) \neq U$ . Ersetzt man die Beziehung  $f^1(U) \neq U$  durch die Beziehung  $p \notin f^1(U)$ , so erhält man die Erklärung eines labilen Punktes im Sinne von K. Borsuk. Ein simplizialer Komplex heiße „kontrahierbar“, wenn seine sämtlichen Homologiegruppen verschwinden und seine Fundamentalgruppe lediglich das Einselement enthält. Hiernach ist der Punkt  $q$  des Polyeders  $B$  genau dann bezüglich  $B$  labiler Punkt im Sinne von B. Borsuk, wenn eine simpliziale Zerlegung  $K$  von  $B$  existiert, so daß gilt: bedeuten  $C$  den offenen Stern von  $q$  in bezug auf  $(B, K)$  und  $L$  die von  $K$  in dem Polyeder  $\bar{C} - C$  induzierte simpliziale Zerlegung, so ist  $L$  kontrahierbar. Die obigen Definitionen und der letzte Satz werden in verschiedener Richtung abgewandelt und ergänzt.

J. Weier.

**Noguchi, Hiroshi:** On the problem of the invariance of homotopical stability of points under Cartesian multiplication. Proc. Amer. math. Soc. 6, 651—655 (1955).

Sind  $A$  ein Polyeder,  $K$  eine simpliziale Zerlegung von  $A$ ,  $a$  ein Eckpunkt von  $K$ , ferner  $U$  der offene Stern von  $a$  bezüglich  $(A, K)$  und  $K_a$  die von  $K$  in dem Polyeder  $\bar{U} - U$  induzierte simpliziale Zerlegung, so heiße  $K_a$  „Nachbarschaftskomplex“ von  $a$  in  $K$ . Ein Punkt aus  $A$ , welcher nicht labil ist im Sinne von H. Hopf und E. Pannwitz (im Sinne von K. Borsuk), heiße „stabil“ im Sinne von H. Hopf und E. Pannwitz (im Sinne von K. Borsuk). Es seien  $B$  ein weiteres Polyeder,  $L$  eine simpliziale Zerlegung von  $B$ ,  $b$  ein Eckpunkt von  $L$ ,  $L_b$  der Nachbarschaftskomplex von  $b$  in  $L$ . Aus  $K_a$  und  $L_b$  werde der Produktkomplex  $K_a \times L_b$  gebildet. Dann gilt: Der Punkt  $(a, b)$  des Polyederproduktes  $(A, B)$  ist genau dann stabil im Sinne von K. Borsuk, wenn eine ganze Zahl  $n \geq 0$  existiert derart, daß die  $n$ -te ganzzahlige Homologiegruppe von  $K_a \times L_b$  nicht Null ist. Ist  $(a, b)$  stabil bezüglich  $(A, B)$ , wenn  $a$  stabil bezüglich  $A$  und  $b$  stabil bezüglich  $B$  ist, die Stabilität im Sinne von K. Borsuk verstanden! Diese Frage ist zu verneinen, wie Verf. an einem Beispiel zeigt. Hingegen ist die Stabilität im Sinne von H. Hopf und E. Pannwitz gegenüber Multiplikationen invariant, sobald man sich auf homogene Komplexe beschränkt.

J. Weier.

**Bartholomay, A. F.:** Type-invariance and  $h$ -retraction. Portugaliae Math. 13, 105—110 (1954).

Some connections of a very general nature between retraction, homotopy equivalence, etc., are established. For instance, the subset  $A_0$  of  $A$  is called a homotopic retract of  $A$  if there exists a map  $r$  of  $A$  onto  $A_0$ , whose restriction to  $A_0$  is homotopic to the identity map of  $A_0$ . It is pointed out that, if  $B$  is homotopically equivalent to a homotopic retract of  $A$ , then there exists a map of  $A$  onto  $B$  which admits a right inverse.

*T. Ganea.*

**James, I. M.:** On the homotopy groups of certain pairs and triads. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 5, 260—270 (1954).

Wenn man die Homotopiegruppen eines Komplexes induktiv über die Dimensionszahlen berechnen will, dann ist Information über die relativen Homotopiegruppen des  $n$ -Skeletts modulo dem  $(n-1)$ -Skelett wesentlich. Verf. verfeinert die Resultate von Blakers und Massey (dies. Zbl. 53, 129) und benutzt auch die Methode der Triaden. Es wäre zu kompliziert, die Hauptsätze des Verf. im einzelnen hier anzugeben. Ref. begnügt sich damit, zwei exakte Sequenzen des Verf. zu beschreiben: Es sei  $Y$  ein 1-zusammenhängender CW-Komplex.  $Y^* = Y \cup e^n$  entstehe durch Ankleben einer  $n$ -Zelle vermöge der Abbildung  $\alpha: S^{n-1} \rightarrow Y$ . Es sei  $H$  die verallgemeinerte Hopfsche Invariante (dies. Zbl. 45, 442) und  $E^n$  die  $n$ -fache Einhängung:

$$\pi_r(S^n) \xrightarrow{H} \pi_r(S^{2n-1}) \xleftarrow{E^n} \pi_{r-n}(S^{n-1}) \xrightarrow{\alpha_*} \pi_{r-n}(Y).$$

Es sei  $n \geq 3$  und  $n+2 \leq r \leq 3n-4$ . Es sei  $H_\alpha = \alpha_* E^{-n} H$ . Es sei  $\chi: \pi_r(Y^*, Y) \rightarrow \pi_r(S^n)$  der durch Zusammenziehen von  $Y$  induzierte Homomorphismus. Es sei  $Q: \pi_{r-n}(Y) \rightarrow \pi_{r-1}(Y^*, Y)$  durch  $Q(\gamma) = [\gamma, i]$  definiert [relatives Whitehead-Produkt,  $i$  erzeugendes Element von  $\pi_1(Y^*, Y)$ ]. Es sei  $Y$  nun  $m$ -zusammenhängend und  $p = \min(3n-4, 2m+n)$ . Dann ist die folgende Sequenz exakt.

$$\pi_p(Y^*, Y) \xrightarrow{\chi} \dots \rightarrow \pi_r(Y^*, Y) \xrightarrow{\chi} \pi_r(S^n) \xrightarrow{H_*} \pi_{r-n}(Y) \xrightarrow{Q} \pi_{r-1}(Y^*, Y) \rightarrow \dots$$

Die zweite exakte Sequenz werde ohne explizite Beschreibung der Homomorphismen angegeben.  $Y^*$  sei  $l$ -zusammenhängend und sei  $q = \min(3n-4, 2l+n-1)$ . Dann hat man eine exakte Sequenz:

$$\pi_{q-1}(S^{n-1}) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_{r-1}(S^{n-1}) \rightarrow \pi_r(Y^*, Y) \rightarrow \pi_{r-n+1}(Y^*) \rightarrow \pi_{r-2}(S^{n-1}) \rightarrow \dots$$

*F. Hirzebruch.*

**Sugawara, Masahiro:** Some remarks on homotopy groups of rotation groups. Math. J. Okayama Univ. 3, 129—133 (1954).

Denote by  $R_n$  the rotation group of the  $(n-1)$ -dimensional sphere. The 9-dimensional homotopy groups  $\pi_9(R_n)$  of  $R_n$  are determined. Proposition 3.  $\pi_9(R_3) = 3$ ,  $\pi_9(R_4) = 3 + 3$ ,  $\pi_9(R_5) = 0$ ,  $\pi_9(R_6) = 2$ ,  $\pi_9(R_7) = 2 + 2$ ,  $\pi_9(R_8) = 2 + 2 + 2$ ,  $\pi_9(R_9) = 2 + 2$ ,  $\pi_9(R_{10}) = 2 + \infty$ ,  $\pi_9(R_n) = 2$ ,  $n \geq 11$ . Partial results for  $\pi_{10}(R_n)$  and  $\pi_{11}(R_n)$  are obtained. Note that the groups  $\pi_i(R_n)$  for  $i < 9$  were calculated in the author's previous paper (this Zbl. 53, 301), with the exception  $i = 7$ , and he determines the groups  $\pi_7(R_n)$  in this paper.

*A. Komatsu.*

**Hirsch, Guy:** Sur les groupes d'homotopie des espaces fibrés. Bull. Soc. math. Belgique 6, 79—96 (1954).

Es sei  $E$  gefasert mit der Basis  $B$ , der Faser  $F$  und der Projektion  $\pi$  von  $E$  auf  $B$ . Für die Cohomologie werde ein Körper  $K$  als Koeffizientenbereich zugrunde gelegt. Es werde vorausgesetzt, daß  $B$  zusammenhängend ist, daß  $H^q(F)$  für jedes  $q$  endlichdimensional über  $K$  ist und daß die Fundamentalgruppe der Basis trivial auf  $H^*(F)$  operiert. Mit  $C^*(X)$  sollen die Cokettengruppen von  $X$  bezeichnet werden. Es sei  $U$  ein Isomorphismus des Vektorraumes  $H^*(F)$  in  $C^*(E)$  derart, daß  $U(x)$  für  $x \in H^*(F)$  bei Beschränkung auf  $F$  ein Cozyklus ist, der die Klasse  $x$  repräsentiert. Man kann dann den Isomorphismus  $V = (\pi^* \otimes 1) \cup (1 \otimes U)$  von  $C^*(B) \otimes H^*(F)$  in  $C^*(E)$  einführen, wo  $\cup$  das Cup-Produkt in  $C^*(E)$  bezeichnet. Verf. beweist, daß man  $U$  so wählen kann, daß das Bild von  $V$  unter dem in  $C^*(E)$  definierten Corand-Operator  $\delta$  abgeschlossen ist. Dann kann  $\delta$  vermöge  $V$  auf  $C^*(B) \otimes H^*(F)$  übertragen werden,



was eine Derivation  $\Delta$  in  $C^*(B) \otimes H^*(F)$  ergibt. Hauptresultat des Verf. ist, daß  $H_A^* C^*(B) \otimes H^*(F) \cong H^*(E)$ . — Dieser Satz des Verf. steht in Zusammenhang mit der Transgression und Untersuchungen von H. Cartan, Chevalley, Koszul [vgl. z. B. A. Borel, Ann. of Math., II. Ser. 57, 115—207 (dies. Zbl. 52, 400), §§ 24, 25].

F. Hirzebruch.

Dedecker, Paul: Jets locaux, faisceaux, germes de sous-espaces. Bull. Soc. math. Belgique 6, 97—125 (1954).

L'A. définit le type local d'applications d'espaces  $E_s$ , munis d'une structure locale, dans des ensembles  $F$ , par analogie avec la notion de jet local d'Ehresmann (ce Zbl. 43, 174 et 52, 398); l'ensemble des applications de même type local  $A$  est la classe locale de type  $A$  associé au couple  $(E_s, F)$ . La classe locale peut être remplacée par un espace  $\mathcal{Q}$  muni également d'une structure locale, d'une projection  $p$  de  $\mathcal{Q}$  sur  $E_s$ , et d'une application  $q$  de  $\mathcal{Q}$  sur  $F$ ; chaque application  $f$  de la classe locale se factorise d'une manière univoque en  $f = q \circ u_f$ , où  $u_f$  est une section locale de  $\mathcal{Q}$ . Le triple  $(\mathcal{Q}, p, q)$  est unique, à un isomorphisme près, et peut être considéré comme espace des jets locaux. La loi de composition des jets d'Ehresmann se généralise aux classes locales. — Lorsque les ensembles  $F$  sont supposés munis de structures algébriques,  $\mathcal{Q}$  est une généralisation de la notion de faisceau, et comprend comme cas particulier les faisceaux analytiques. — L'A. utilise les faisceaux de groupes non abéliens pour obtenir une classification des espaces fibrés principaux, qui sont en correspondance biunivoque avec les classes de cohomologie de dimensions 1 de l'espace de base, à coefficients dans un pareil faisceau.

G. Hirsch.

## Theoretische Physik.

### Mechanik:

● Platrier, Charles: Mécanique rationnelle. I. Paris: Dunod 1954. XII, 452 p. 87 fig. Relié toile 3900 f.

Quest'Opera didattica contiene le Lezioni che l'A. per oltre un trentennio ha professate all'„Ecole Polytechnique“ di Parigi e in altre Scuole superiori di Parigi e di Bruxelles. Questo primo volume dell'Opera contiene le nozioni e i metodi fondamentali concernenti la Cinematica, la Statica e le Dinamica del punto materiale libero o vincolato e del corpo rigido. Seguendo Painlevé, l'A. che di lui fu scolaro e collaboratore, presenta una interessante discussione degli assiomi della meccanica newtoniana. Alla fine del volume si trova un'esposizione dei fondamenti della meccanica relativistica (speciale e generale), preceduta delle nozioni basiche del calcolo tensoriale. La precedente analisi degli assiomi dalla meccanica newtoniana prepara il lettore a comprendere i principi essenziali della dottrina di Einstein. La chiara trattazione del Platrier, anche se non è rivolta ad un uditorio che abbrà finalit  teoriche,   senza dubbio altamente raccomandabile perch  comprende quelle nozioni generali e fondamentali della Scienza moderna che non   lecito ignorare perch  costituiscono l'essenziale della cultura di oggi.

G. Lampariello.

García, Godofredo: Absolute Form der Transformation der Gleichungen der Dynamik in einem gekr mmten Raum von  $n$  Dimensionen. 2. Sympos. Probl. mat. Latino América, Villavicencio-Mendoza 21—25 Julio 1954, 87—111 (1954) [Spanisch].

Some formal developments without a clear statement of either assumptions or conclusions.

M. M. Peixoto.

Rumjancev, V. V.: Die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers mit einem Hohlraum, der zum Teil mit Flüssigkeit gef llt ist. Priklad. Mat. Mech. 18, 719—728 (1954) [Russisch].

Allgemeine Bewegungsgleichungen eines starren Körpers mit einem Hohlraum von beliebiger Form, der entweder zum Teil (mit freier Oberfläche) oder vollständig mit homogener, inkompressibler Flüssigkeit gef llt ist, werden aufgestellt. Die dazu

benützten Voraussetzungen sind: 1. daß der starre Körper und die Flüssigkeit in seinem Hohlraum ein mechanisches System bilden, 2. daß in den Berührungspunkten mit dem Körper die Flüssigkeit die gleiche Verschiebung in der Normalenrichtung des Hohlraumes wie der entsprechende Körperpunkt erfährt, und 3. daß auf der freien Oberfläche (wenn eine solche existiert) der Flüssigkeitsdruck konstant gleich dem Druck der eingeschlossenen Luft ist. Zum Schluß weist der Verf. auf einige Fälle hin, wo die ersten Integrale des Problems existieren. So z. B. existiert ein Energieintegral insofern dieses System als ganzes die erforderlichen Bedingungen befriedigt.

*T. P. Angelitch.*

**Stoppelli, Francesco:** Una generalizzazione di un teorema di Da Silva. Rend. Accad. Sci. fis. mat. Napoli, IV. Ser. **21** (93), 214–225 (1954).

A system of forces acting on a solid has zero resultant. The author considers the problem of finding all rotations to which all forces should be subjected around its point of application in order that the new system of forces so obtained have a given moment.

*M. M. Peixoto.*

**Mjasnikov, P. V.:** Über eine neue Methode zur Aussonderung integrierbarer Fälle für das allgemeine Kreiselproblem; ein neuer Sonderfall der Bewegung. Vestnik Moskovsk. Univ. 9, Nr. 3 (Ser. fiz-mat. estestv. Nauk Nr. 2), 47–55 (1954) [Russisch].

Durch Einführen einer „charakteristischen Ebene“, die durch die Vektoren der Drehgeschwindigkeit und des Impulses aufgespannt wird, gelingt es dem Verf. die bisher bekannten, durch Quadraturen lösbaren Fälle der Kreiseltheorie unter einheitlichen Gesichtspunkten abzuleiten. Neben den Bewegungen des kräftefreien unsymmetrischen Kreisels (Euler), des schweren symmetrischen Kreisels (Lagrange), des Sonderfalles von Bobylev-Steklov ( $2\dot{B} = C$  und spezielle Anfangsbedingungen) können auch die von Staude untersuchten stationären Drehungen und die Pendelbewegungen von Hess erfaßt werden. Mit Hilfe des beschriebenen Verfahrens gelingt die Entdeckung eines neuen integrierbaren Falles, bei dem sowohl das Trägheitsellipsoid des Körpers als auch die Anfangsdrehung speziellen Bedingungen unterworfen sind: Das Trägheitsellipsoid muß bezüglich einer Querachse symmetrisch sein, und der Vektor der Drehung muß zu Beginn der Bewegung in die Schnittlinie zwischen der Horizontalebene mit einer Hauptebene fallen, die senkrecht auf der Verbindungslinie von Schwerpunkt und Stützpunkt steht. Die Lösung läßt sich dann in Form elliptischer Integrale angeben.

*K. Magnus.*

**Aržanyč, I. S.:** Über die Gleichungen der Rotation eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **97**, 403–406 (1954) [Russisch].

Der Verf. will zeigen, daß ein neues, in den ersten Ableitungen der Bestimmungsparameter lineares Integral des Problems der Bewegung des schweren starren Körpers um einen festen Punkt existiert. Es handelt sich dabei natürlich um kein algebraisches Integral. Zu dem Zwecke wird zuerst gezeigt, daß eine solche Bewegung des schweren starren Körpers als die Bewegung eines Massenpunktes auf der Oberfläche des Trägheitsellipsoids unter der Einwirkung von bestimmten Kräften gedeutet werden kann. Es wird weiter bewiesen, daß sich dieselbe Bewegung als die Bewegung eines geladenen Teilchens im ebenen elektrischen und dem dazu senkrechten magnetischen Feld deuten läßt, d. h. das Problem sich auf die Lösung des Differentialgleichungssystems

(1) 
$$x'' = V_x - f\Omega y', \quad y'' = V_y + f\Omega x', \quad (f = \text{const.})$$
 reduzieren läßt. Dabei sind  $V$  und  $\Omega$  Funktionen, die über die Veränderlichen  $u, v$  von  $x, y$  abhängen, und wo die Ableitungen nach einer neuen Veränderlichen  $\tau$  genommen sind, welche mit der Zeit  $t$  durch eine komplizierte Beziehung, elliptische Funktionen von  $u$  und  $v$  enthaltend, verbunden ist. Zum Schluß wird im Satz 3 die am Anfang erwähnte Behauptung über die Existenz des neuen Integrals aus-

gesprochen, aber nicht bewiesen. Dieser Satz wird aus einem früheren Resultat des Verf. [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **96**, 21—24 (1954)] abgeleitet. Dort wird nämlich behauptet, daß ein Differentialgleichungssystem von der Form (1) immer ein erstes Integral  $Sx' + Ty' = K$ , wo  $S$ ,  $T$  und  $K$  Funktionen von  $x$ ,  $y$  sind, besitzt. Diese Behauptung ihrerseits ist aber ungenügend begründet und meiner Ansicht nach unzuverlässig. Der Verf. versucht z. B. mit Hilfe dieser Behauptung in der erwähnten Arbeit das einfache Problem der Bestimmung der Bahnkurve eines Massenpunktes, der sich unter der Einwirkung einer Zentralkraft, die der fünften Potenz der Entfernung  $r$  vom Attraktionspol umgekehrt proportional ist, zu lösen. Es handelt sich dabei um das System  $x'' = -\mu x/r^5$ ,  $y'' = -\mu y/r^5$  ( $\mu = \text{const.}$ ), das dem Falle  $f = 0$  im System (1) entspricht und wo die Ableitungen nach der Zeit  $t$  genommen sind. Er findet auf diese Weise, wenn die Energiekonstante  $h_0 = 0$ , als die gesuchte Bahnkurve eine Kurve vierter Ordnung. Ganz elementar aber läßt sich zeigen, daß es sich eigentlich um einen Kreis durch das Attraktionszentrum handelt, eine Lösung, die z. B. auch im P. Appell, *Traité de mécanique rationelle* I, S. 434 (Paris 1926) zu finden ist. Deswegen sind hinsichtlich der Behauptung über die Existenz eines neuen Integrals gewisse Bedenken am Platze, um so mehr da durch Druckfehler, unübersichtliche Bezeichnungen und komplizierte Transformationen die Arbeit schwer lesbar ist.

T. P. Angelitch.

**Grammel, Richard:** Il giroscopio asimmetrico soggetto a momenti interni. Conferenze Sem. Mat. Univ. Bari Nr. **4**, 20 S. (1954).

Als „innere“ Drehkräfte eines unsymmetrischen Kreisels werden solche bezeichnet, deren Komponenten bezüglich der Trägheitsachsen bekannte Funktionen der Zeit sind. Die Haupt-Drehmassen sollen dabei konstant sein — das ist ein auch technisch wichtiger Grenzfall, der sich angenähert durch Rückstoßantriebe verwirklichen läßt. Verf. fragt nach den Lösungen der Eulerschen Gleichungen für die Drehgeschwindigkeit  $\omega$ , insbesondere bei zeitfesten inneren Drehkräften  $\mathfrak{M}$ . Auch abgesehen von trivialen Fällen kann dann  $\omega$  (im Körper) fest sein, falls die ablenkende Wirkung der Kreiselkräfte durch  $\mathfrak{M}$  gerade aufgehoben wird.  $\omega$  kann dabei jede Lage haben,  $\mathfrak{M}$  ist auf 4 der 8 Oktanten beschränkt (und  $\perp \omega$ ). Die stabilen Richtungen von  $\omega$  sind auf bestimmte Teile der Hauptebenen beschränkt (andere Lagen könnten durch Zusatzeinrichtungen stabilisiert werden). — Hinsichtlich veränderlicher  $\omega(t)$  fand Verf. folgendes: Liegt  $\mathfrak{M}$  auf der ersten oder dritten Hauptachse (d. h. der Hauptachse größten oder kleinsten Trägheitsmoments) und ist  $\omega(t_0) \notin \mathfrak{M}$ , so gibt es für  $\omega(t)$  eine Lösung durch verallgemeinerte Jacobische elliptische Funktionen. In einer schönen Betrachtung des Lösungsausdrucks wird gezeigt, daß der Drehvektor  $\omega$ , falls sein Anfangsbetrag unterhalb einer gewissen Schranke liegt, bei kleineren Drehkräften eine periodische Funktion der Zeit wird, hingegen bei größerem  $\mathfrak{M}$  — und unabhängig von  $\mathfrak{M}$  immer dann, wenn  $\omega(t_0)$  oberhalb jener Schranke liegt — auf die Dauer unbeschränkt wächst, wobei die Richtung von  $\omega$  gegen die von  $\mathfrak{M}$  strebt. (Einen Sonderfall bilden dabei die stabilen Rotationen.) Liegt hingegen  $\mathfrak{M}$  auf der zweiten Hauptachse, so entsteht auch bei beliebig großem  $\mathfrak{M}$  in der Regel immer eine periodische Funktion  $\omega(t)$ . Bei bestimmten Anfangslagen jedoch bleibt  $\omega(t)$  auf eine körperfeste Ebene beschränkt. Die Polkurven in diesen Ausnahmefällen werden ausführlich diskutiert. — Wenn  $\mathfrak{M}$  nicht auf einer Hauptachse liegt, aber in der Nähe eines der bisher betrachteten Fälle, so kann man die zusätzlichen Komponenten als Störungen behandeln und die Lösung durch Reihenentwicklung finden.

U. T. Bödewadt.

**Grioli, G.:** Forma intrinseca delle equazioni dinamiche del solido pesante asimmetrico con un punto fisso e ricerca dei moti di precessione. Ann. Univ. Ferrara, n. Ser., Sez. VII **3**, 31—43 (1954).

Für den schweren unsymmetrischen Körper werden die dynamischen Gleichungen in tensorieller Form aufgestellt und zur Untersuchung der allgemeinen



Präzessionsbewegung herangezogen. Es wird vorausgesetzt, daß der Körper in einem seiner Punkte reibungsfrei gelagert ist. Verf. gelangt zu Aussagen über die Möglichkeit spezieller Präzessionsbewegungen. *H. Neuber.*

**Mitropol'skij, Ju. A.:** Über instationäre Schwingungen in Systemen mit mehreren Freiheitsgraden. *Ukrain. mat. Žurn.* **6**, 176—189 (1954) [Russisch].

Verf. betrachtet gewisse mechanische Systeme von  $n$  Freiheitsgraden, deren Lagrangesche Funktionen zeitabhängig sind. Durch Transformationen läßt sich erreichen, daß diese Zeitabhängigkeit nur in den (kleinen) Störungsgliedern auftritt. Dieses System wird dann unter Berücksichtigung der Glieder erster Ordnung gelöst. Für ein System von zwei Freiheitsgraden wird die Rechnung nochmals explizit durchgeführt. *W. Haacke.*

**Salvadori, Luigi:** Un'osservazione su di un criterio di stabilità del Routh. *Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli*, **IV**, Ser. **20** (92), 269—272 (1954).

Es seien  $q_1, q_2, \dots, q_n$  die Lagrangeschen Koordinaten eines Punktsystems mit holonomen Bindungen und mit  $n$  Freiheitsgraden. Im Falle der zyklischen Koordinaten  $q_1, \dots, q_m$  ( $m < n$ ) hat man die Impulsintegrale (1)  $dT_i/d\dot{q}_i = c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), wobei die doppelte kinetische Energie  $T$  aus zwei Teilen  $T_2$  und  $T_0$  besteht. Das bekannte Routhsche Stabilitätskriterium besagt: falls  $T_0 = U$  ( $U =$  Kräftefunktion) ein effektives Minimum besitzt, so ist die Bewegung stabil unter der Bedingung, daß die Störungen die Impulsintegrale (1) befriedigen. Verf. beweist, daß diese letzte Bedingung nicht notwendig ist. Die Beweismethode beruht auf der Bemerkung, daß eine gewisse Funktion, welche den Abstand darstellt zwischen den von  $T = U$  und  $\partial T / \partial \dot{q}$  angenommenen Werten in der Umgebung des das Minimum angehenden Punktes im fingierten Raume, positiv bleibt. *V. Válcovici.*

**Raithel, Aldo e Aldo Ambrosanio:** Sulla determinazione delle sollecitazioni massime nei sistemi ad alto grado di iperstaticità. *Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli*, **IV**, Ser. **20** (92), 195—206 (1954).

Das vom Verf. vorgeschlagene Verfahren zur Bestimmung der Einflußlinien für hochgradig statisch unbestimmte Stabwerke [*Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli*, **IV**, Ser. **18**, 32—36 (1951)] wird in der vorliegenden Mitteilung zur Bestimmung der Höchstbeanspruchung in solchen Stabwerken verwendet. Die praktische Anwendung wird an Beispielen gezeigt. *H. Neuber.*

### Elastizität. Plastizität:

**Sved, G.:** The minimum weight of certain redundant structures. *Austral. J. appl. Sci.* **5**, 1—9 (1954).

**Sucharevskij, I. V.:** Zum Problem der Torsion eines zusammengesetzten mehrfach zusammenhängenden Balkens. *Inženernyj Sbornik* **19**, 107—124 (1954) [Russisch].

The problem of the torsion of a composed shaft (i. e. cylindrical body consisting of longitudinal rods with different elastic behaviour) was first investigated by N. I. Muskhelishvili (c. f. his well-known book: Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, this Zbl. **52**, 414). In the present paper the author has formulated and analysed the integral equation of the problem, which possesses a unique solution immediately giving the values of the shearing stresses at the boundary. The solution is illustrated by numerical examples. The method can be extended to other more general problems. *D. Radenković.*

**Okubo, H.:** The torsion and stretching of spiral rods. II. *Quart. appl. Math.* **11**, 488—495 (1954).

In seiner ersten Mitteilung zur Torsion und Zugbeanspruchung von Spiralfedern (s. dies. Zbl. **50**, 403) benutzte Verf. spezielle Ansätze über die Verschiebungen, so daß die Lösung nicht allgemein brauchbar war. Die nunmehr vorliegende Darstellung ist allgemeiner und führt auf die Spannungsverteilung bei beliebigem

Abstand des Querschnittsschwerpunkts von der Schraubenachse und beliebigem Steigungswinkel.  
*H. Neuber.*

**Nowiński, J.:** Certain characteristic points of cross-sections of thin walled tubes. *Rozprawy mat.* 7, 1—45, russ. und engl. Zusammenfassg. 46—48 49—51 (1954) [Polnisch].

Im Anschluß an seine früheren Arbeiten beweist Verf., daß bei den dünnwandigen Rohren der Schubmittel- und Drillruhepunkt nicht Querschnittsfestpunkte sind, sondern auch von der Art der Belastung und der Lagerungsart, bzw. der Stablänge, abhängen. Die Theorie wird auf den Fall eines dünnwandigen Kastenträgers mit Trapezquerschnitt angewendet. Es wird auch ein Zahlenbeispiel für den Fall eines Rechteckrohres mit Eckgurten gegeben.  
*V. Bogunović.*

**Sekiya, Tsuyoshi, Atsushi Saito and Shigeo Yamada:** On the bending of a circular plate with a circular hole at the center under a concentrated load. *J. Osaka Inst. Sci. Technol., Part. I* 5/6, 1—28 (1954).

This paper contains an exact solution for the deflection of a circular plate with a circular hole at the center under a concentrated load, supported in various ways. The solution is sought in the form of the sum of a plane biharmonic function and a particular integral which is a logarithmic function of the coordinates of the load point. Boundary conditions are satisfied by expanding the solution in Fourier-series.  
*D. Radenković.*

**Lechnickij, S. G.:** Die Verteilung der Spannungen in einer anisotropen Platte mit einem elliptischen elastischen Kern (ebenes Problem). *Inženernyj Sbornik* 19, 93—106 (1954) [Russisch].

The subject of this paper is the problem of the plane stress distribution in an infinite anisotropic plate with elliptic hole, in which elastic anisotropic kernel is fixed in such a way that it is deformed together with the plate. The cases of an orthotropic plate with a circular hole, subjected to tension, shear and bending in its own plane are specially considered. The solutions are given by means of the use of the theory of complex functions like in other works of this author (cf. his books: *Anisotropic plates*, Moscow 1947, and *Theory of elasticity of anisotropic bodies*, Moscow 1950).  
*D. Radenković.*

**Pagano, Michele:** Contributo al calcolo delle volte a vela e delle volte di traslazione. *Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli. IV. Ser.* 20 (92), 186—194 (1954).

Für eine spezielle Gruppe von Membranschalen mit quadratischer Grundfläche wird ein Näherungsverfahren zur Berechnung der Spannungsverteilung angegeben, welches nach den Untersuchungen des Verf. nur wenig von den Ergebnissen exakter Methoden abweicht.  
*H. Neuber.*

**Sobolev, V. A.:** Die dynamische Deformationsstabilität eines Streifens bei exzentrischer Kompression und reiner Biegung. *Inženernyj Sbornik* 19, 65—72 (1954) [Russisch].

The paper is concerned with the dynamical stability of a strip bent in its own plane with excentric periodically varying forces. Having formulated the differential equations of the problem the author shows that the problem is reduced to the discussion of the stability of the solutions of a Hill's equation. The results of the experimental investigation of the problem are also given: it is found that they are in good agreement with theoretical data.  
*D. Radenković.*

**Föppl, L.:** Ein neues Auswerteverfahren der ebenen Spannungsoptik. *Z. angew. Math. Mech.* 34, 454—459 (1954).

Bezieht man die Gleichgewichtsbedingungen des ebenen Spannungszustandes auf die Hauptspannungslinien, so läßt sich der Gradient der Spannungssumme durch die Spannungsdifferenz und ihren Gradienten, sowie den Gradienten des Tangentialwinkels darstellen [H. Neuber, *Proc. Roy. Soc., London, Ser. A* 141, 314(1933); ferner L. Föppl und H. Neuber, *Festigkeitslehre mittels Spannungsoptik*, München 1935].

Verf. zeigt, wie sich auf diesem Wege ein Integrationsverfahren längs einer beliebigen Linie aufstellen läßt, das in manchen Fällen Vorteile aufweist. *H. Neuber.*

**Birman, S. E.:** Über das Einsinken eines starren Stempels auf einer Bodenschicht mit darunter liegendem Felsengrund. *Inženernyj Sbornik* 20, 142—153 (1954) [Russisch].

The soil layer of the finite depth resting on a rigid basement is considered as a homogeneous elastic medium in the condition of plane strain. The friction under the slab and between the layer and the rock is neglected. The mixed problem of the theory of elasticity (prescribed forces and displacements at the boundary) is solved by means of the theory of complex functions. The boundary conditions are expressed by complex Fourier integrals. The kernel and the unknown function in the integral equation, obtained from the boundary conditions, are represented by series, after some transformations, and an approximative solution is obtained. In the examples given, the cases of the slab loaded by a central force and by a couple are considered.

*D. Radenković.*

**Wilhoit jr., J. C.:** An addition to Poritsky's solutions of a differential equation of torsion. *Quart. appl. Math.* 11, 499—501 (1954).

Weiterführung einer Arbeit von Poritsky [Proc. Symposia Appl. Math. 3, 163—185 (1951)], wobei die Verwandtschaft der Lösungen der Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Torsion von Umdrehungskörpern mit Kugelfunktionen erster und zweiter Art weiter ausgenützt wird.

*H. Neuber.*

**Pârvu, A.:** Une solution des déformations élastiques pour les corps à isotropie transverse. *Revista Univ. C. I. Parhon, Politehn Bucureşti, Ser. Şti. Natur.* 3, Nr. 4/5, 139—140 u. russ. u. französ. Zusammenfassg. 141 (1954) [Rumänisch].

L'A. trouve un type de solutions pour les déformations élastiques des corps à isotropie transverse, en généralisant les trouvées par S. G. Lehnitzky pour les déformations axial à isotropie transverse.

Französ. Zusammenfassg.

**Nikolai, B. L.:** Berechnung der Spannungen in dünnwandigen elastischen Stäben von offenem Profil und kegelförmiger Gestalt. *Inženernyj Sbornik* 20, 132—141 (1954) [Russisch].

The paper is concerned with thin-walled bars of pyramidal shape with open cross-section. In the discussion it is assumed that: 1. the thickness of each single wall is constant (different walls may have different thickness), 2. the contour of the cross-sections is rigid and 3. the angle between the ribs and the center-line of the bar is small. The paper is in fact a further extension of Vlassov's theory of prismatical bars (V. Z. Vlassov, *Elastic thin-walled bars*, Moscow 1940).

*D. Radenković.*

**Buckens, F.:** Théorie limite du flambage d'une plaque circulaire chauffée en son centre. Déformées caractéristiques. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles, I. Sér.* 68, 157—163 (1954).

In einer früheren Arbeit (s. dies. Zbl. 56, 182) wurde die kritische Temperatur für das Ausbeulen einer in ihrer Mitte erwärmten Kreisplatte berechnet, wobei sich zeigte, daß die Auflagerbedingungen des Außenrandes auf das Ergebnis nur wenig Einfluß haben. In der vorliegenden Fortsetzung wird die für die Radialverschiebung maßgebliche nichtlineare Integro-Differentialgleichung mit Hilfe einer Fourierreihe integriert.

*H. Neuber.*

**Davies, R. O.:** The thermodynamics of volume flow. *Proc. 2nd Internat. Congr. Rheology*, Oxford, 26—31 July 1953, 171—177 (1954).

Basandosi sui principi della termodinamica dei processi irreversibili, si dà una giustificazione teorica dell'effetto elastico ritardato che presenta la dilatazione cubica di numerose sostanze sottoposte bruscamente ad una pressione uniforme o ad un rapido cambiamento di temperatura. Si ammette che lo stato del corpo resti indovinato dalla pressione, temperatura e da una terza variabile caratterizzata dalla



condizione di rimanere costante durante le trasformazioni estremamente rapide del sistema. Ad essa può anche essere sostituita una variabile di più chiaro significato fisico mediante la condizione che, durante una trasformazione classicamente reversibile, l'affinità si annulli identicamente. Nell'ambito della approssimazione lineare, si perviene così ad una equazione di stato che coincide nel caso isoterma con l'equazione sperimentale, ma in più può adattarsi anche a trasformazioni adiabatiche, ciò che può consentire ricerche sperimentali di nuovo tipo. *T. Manacorda.*

**Manacorda, T.: Sulla più generale teoria linearizzata delle trasformazioni reversibili adiabatiche.** Rivista Mat. Univ. Parma 5, 233—253 (1954).

Im Anschluß an drei Arbeiten von Signorini [Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 22, 33—143 (1943); ferner dies. Zbl. 30, 395; 65, 403] untersucht Verf. mit einer linearisierten Theorie umkehrbar-adiabatische Transformationen für vollkommen elastische, jedoch inkompressible Körper. Es wird eine quadratische Form eingeführt, mit deren Hilfe sich die Eindeutigkeitsaussagen in der Elastodynamik und das Theorem des Minimums der potentiellen Energie in der Elastostatik formulieren lassen. Als Beispiele werden u. a. die kleinen Biegeschwingungen eines homogenen Zylinders und die Wellenausbreitung erörtert. *H. Neuber.*

**Adkins, J. E., A. E. Green and R. T. Shield: Finite plane strain.** Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 246, 181—213 (1953).

In questa Memoria viene sviluppato, relativamente al caso di deformazioni piane di solidi incomprimibili, un procedimento di successive approssimazioni per l'integrazione delle equazioni di equilibrio che al recensore sembra vada senz'altro collegato a quello introdotto già da diversi anni da A. Signorini (Cfr. ad es. questo Zbl. 36, 395) delle cui ricerche sembra che gli AA. non siano a conoscenza. In una prima parte ci si occupa in generale delle deformazioni piane finite, indicando tra l'altro un metodo di integrazione in coordinate generale con l'intervento di una funzione del tipo di Airy. Il risultato sembra non differire da quello contenuto in un lavoro di B. Finzi (questo Zbl. 9, 376) anch'esso, pare, non conosciuto dagli A. Si ritrovano poi non metodo differente, e si generalizzano, alcune soluzioni esatte già dovute a Rivlin (questo Zbl. 33, 415; 36, 249) e si esamina un problema di scorrimento. Infine si introduce e si sviluppa il metodo approssimato, di cui è fatto cenno poco sopra, che consiste in sostanza nello sviluppare lo spostamento, e di conseguenza il potenziale elastico, in serie di un parametro, e di associare a tale sviluppo il sistema di equazioni che si ottengono dalla prima, seconda ecc. approssimazione. L'uso della variabile complessa, consentito dall'essere il problema piano, semplifica i calcoli. La teoria generale viene infine applicata al caso di un mezzo infinito forato oppure contenente un nucleo rigido. *T. Manacorda.*

**Adkins, J. E., A. E. Green and G. C. Nicholas: Two-dimensional theory of elasticity for finite deformations.** Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 247, 279—306 (1954).

In questo lavoro gli AA. sviluppano per il caso di distribuzioni piane di sforzi un metodo approssimato di soluzione analogo a quello esposto in un precedente lavoro sulle deformazioni piane (Cfr. la recensione precedente). Ci si riferisce qui alle trasformazioni di una piastra simmetriche rispetto al piano meridiano  $x_3 = 0$ , nella ipotesi di assenza di forze superficiali sulle due facce inizialmente normali all'asse  $x_3$ . L'ipotesi che la lastra sia sottile, permette di ridurre il problema ad un problema piano, in cui occorre tener tuttavia conto che lo spessore della piastra nello stato deformato non è costante. Con l'uso di variabili complesse si passa poi ad esporre un metodo di soluzione per successive approssimazioni che consiste in sostanza nello sviluppare lo spostamento, il potenziale elastico ecc. in serie di un parametro reale e nel prendere in considerazione i sistemi di equazioni che si ottengono dalla prima, secondo ecc. approssimazione. Vengono prese in esame solo la prima e seconda approssimazione, ma il calcolo viene sviluppato tanto per solidi incomprimibili che compri-

mibili. Si osserva infine che l'analogia tra il caso di deformazioni piane e quello di sforzi piani permette di tracciare una teoria degli effetti di secondo ordine comune per i due casi.

*T. Manacorda.*

**Stoppelli, Francesco:** Un teorema di esistenza ed unicità relativo alle equazioni dell'elastostatica isoterma per deformazioni finite. *Ricerche Mat.* **3**, 247–267 (1954).

Für den homogenen, isotropen Körper bei isothermer endlich-elastischer Deformation bringt Verfasser den Nachweis, daß die bei der Einwirkung gegebener Kräfte auftretenden Verschiebungen unter bestimmten Bedingungen beschränkt bleiben.

*H. Neuber.*

**Keane, A.:** An investigation of finite strain in an isotropic material subjected to hydrostatic pressure and its seismological applications. *Austral. J. Phys.* **7**, 322–333 (1954).

Es werden neue Gesetze über die elastischen Konstanten bei hohen Drucken und die daraus resultierende Druck-Dichte-Beziehung abgeleitet. Vergleich mit Bridgman's experimentellen Untersuchungen an Alkalimetallen bei hohen Drucken und Anwendung auf Probleme des Erdinnern.

*W. Kertz.*

● **Harrison, V. G. W.** (edited by): *Proceedings of the second international congress on rheology*, Oxford, 26–31 July 1953. London: Butterworths Scientific Publications; New York: Academic Press, Inc. 1954. IX, 451 pp., 60 s. net.

Die Arbeiten werden, soweit für dies. Zbl. von Interesse, einzeln angezeigt.

**Filonenko-Borodič, M. M.:** Über die Bedingungen der Festigkeit von Materialien, die verschiedenen Widerstand gegenüber Dehnung und Kompression aufweisen. *Inženernyj Sbornik* **19**, 13–36 (1954) [Russisch].

Among all classical failure theories only Mohr's theory is capable of representing the properties of brittle-plastic materials, characterised by different strengths in tension and pressure. At the same time this theory stands in a way apart from the others with respect to its graphic representation, for which Mohr has adopted the  $\sigma, \tau$  coordinate axes, while all other theories are usually represented in the  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  coordinate system,  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  being principal stresses at the point under consideration. This peculiarity of Mohr's theory is not essential and, as it is shown in the paper, it can be avoided. Another peculiarity of this theory, which is a drawback often stressed in literature, is that the influence of the mean principal stress  $\sigma_2$  on the condition of failure is neglected. In the paper an attempt is made to formulate a generalisation of Mohr's theory which at the same time avoids this drawback. (From author's summary).

*D. Radenković.*

**Renzulli, Tullio:** Sul calcolo delle strutture monodimensionali in regime elastoplastico. *Rend. Accad. Sci. fis. mat. Napoli*, IV, Ser. **21** (93), 208–213 (1954).

The equation of four moments for the calculation of frames is generalised for the elastic-plastic range and it is shown that, if the elastic deformations are neglected, the solution is reduced to the method of plastic hinges. The general, nonlinear, equations are liable to a solution by means of successive approximations rapidly converging in the case of concentrated forces. From author's summary.

*D. Radenković.*

**Volterra, E.:** A mathematical interpretation of some experiments on plastics and rubberlike materials. *Proc. 2nd. Internat. Congr. Rheology*, Oxford, 26–31 July 1953, 73–78 (1954).

**Iljusin, A. A.:** Normale und tangentielle Spannungen bei der reinen Biegung von Balken jenseits der Elastizitätsgrenze und die Analogie mit der Aufgabe über die Biegung von Platten. *Inženernyj Sbornik* **19**, 3–12 (1954) [Russisch].

When a beam is bent beyond the elastic limit, some fibres are elastically deformed while the others are subjected to various grades of plastic deformation. Poisson's ratio, constant in the elastic region, increases rather sharply when passing the boundary between the two regions. The compatibility conditions require there-

fore essential shears to appear in the plane  $xy$  of the cross-section, especially near the mentioned boundary. Consequently, together with the essential axial stresses  $Z_z$ , complementary normal and tangential stresses  $X_x$ ,  $Y_y$ ,  $X_y$  must develop in the beam. In the present paper the problem of the pure bending of beams is solved taking into account the mentioned effect and the analogy between this problem and the problem of the elastic bending of a clamped plate with corresponding form is established. From author's summary.

*D. Radenković.*

**Panovko, Ja. G.: Über die kritische Kraft eines zusammengedrückten Stabes im nichtelastischen Bereich.** Inženernyj Sbornik 20, 160—163 (1954) [Russisch].

The author gives a short account of the problem of inelastic buckling of bars taking into account Shanley's effect i. e. the increase of axial force during the buckling. He points out that during the unloading the modulus  $E$  is constant only up to the yield stress in tension  $\sigma_y$  and then decreases sharply to the tangent modulus value  $\nu E$ . The analysis of a simplified model, similar to Shanley's, leads to the conclusion that unlimited bending starts under a definite axial load lying between Engesser's and Kármán's values (and not only when Kármán's load is reached as in Shanley's theoretical analysis).

*D. Radenković.*

**Kayan, İlhan: Plastic torsion problem and residual stresses for the regular hexagonal cross-sectioned prismatical bars by relaxation methods.** Bull. techn. Univ. Istanbul 6, 45—61 (1954).

Nach einer Relaxationsmethode ähnlich der von Southwell, wird vom Verf. das gemischt elasto-plastische Torsionsproblem für den Stab mit regulärem Sechseckquerschnitt behandelt. Die Auswertung ist weitgehend durchgeführt, so daß aus den angegebenen Diagrammen die Ausbreitung der plastischen Zone und die Veränderung der Spannungsverteilung mit zunehmendem Torsionsmoment, sowie die nach Entlastung auftretenden Eigenspannungen deutlich zu erkennen sind. Die zahlenmäßigen Ergebnisse sind in Tabellen zusammengestellt.

*H. Neuber.*

**Grigorev, A. S.: Die Verbiegung von kreis- und ringförmigen Platten von veränderlicher und konstanter Dicke jenseits der Elastizitätsgrenze.** Inženernyj Sbornik 20, 59—92 (1954) [Russisch].

The author presents in this paper a method of solving the problems of the elastic-plastic bending of plates subjected to any axisymmetrical loading, the thickness of the plate being variable. Saint-Venant's yield criterion is adopted. Numerical solutions for a number of different cases are given and the data for a simply supported plate under uniform loading are compared with experimental results. For the plates with a circular hole at the center an approximate solution in finite form is proposed.

*D. Radenković.*

**Gross, B.: Structure of the theory of linear viscoelasticity.** Proc. 2nd Internat. Congr. Rheology, Oxford, 26—31 July 1953, 221—228 (1954).

L'A., rinviando per i particolari dei calcoli a precedenti lavori [J. Appl. Phys. 18, 212—221 (1947); 19, 257—264 (1948)] svolge qui alcune considerazioni di carattere generale sulle funzioni caratteristiche del comportamento dei mezzi elastico viscosi lineari. Una perfetta analogia può essere stabilita tra queste funzioni relative al caso di trasformazioni a sforzo o deformazione assegnati. Introdotte allora, per ognuna delle due classi di trasformazioni, le funzioni caratteristiche della risposta del mezzo e quelle caratteristiche della costituzione del mezzo, l'A. stabilisce le relazioni che devono sussistere tra di loro, in una stessa classe, e tra le funzioni corrispondenti delle due classi.

*T. Manacorda.*

**Staverman, A.J.: Thermodynamics of linear viscoelastic behaviour.** Proc. 2nd Internat. Congr. Rheology, Oxford, 26—31 July 1953, 134—139 (1954).

Si cerca di provare che i parametri caratteristici in una trasformazione isoterma di un solido elastico viscoso lineare rimangono inalterati per una piccola variazione della temperatura della trasformazione. Sembra disgraziatamente al recensore che



una banale svista di carattere matematico comprometta irrimediabilmente la dimostrazione.

*T. Manacorda.*

**Lodge, A. S.:** Some finite strain generalizations of Boltzmann's equations. Proc. 2nd Internat. Congr. Rheology, Oxford, 26–31 July 1953, 229–235 (1954).

Si tratta di una comunicazione principalmente intesa a provare l'utilità, nello studio delle deformazioni anche finite di solidi elastico viscosi, di un sistema materiale di coordinate, come quello introdotto da Denker [questo Zbl. **24**, 367] e sviluppato da Oldroyd [Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **200**, 523–541 (1950)]. L'A. propone poi una generalizzazione dell'equazione di stato di Boltzmann e ne accenna a possibili interessanti applicazioni.

*T. Manacorda.*

**Federhofer, Karl:** Die durch pulsierende Axialkräfte gedrückte Kreiszylinderschale. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-Ber., Abt. II **163**, 41–54 (1954).

Bei Beanspruchung einer Zylinderschale durch periodisch veränderliche, axial gerichtete Druckkräfte können die im Symmetriefall auftretenden Schwingungen instabil werden, sofern bestimmte Beziehungen zwischen der Druckbelastung und der Eigenfrequenz erfüllt sind. Das zugehörige elastokinetische Stabilitätsproblem wird in vorliegender Arbeit ohne Berücksichtigung der Dämpfung in seinen Hauptgleichungen entwickelt.

*H. Neuber.*

**Krejn, M.:** Über eine Methode zur effektiven Lösung einer inversen Randwertaufgabe. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **94**, 987–990 (1954) [Russisch].

After summarising some of his earlier work on the analytic theory of a stretched loaded string, the author arrives (in his Theorem 3) at an integral equation of the form  $2\Phi'(0)q(t) +$

$\int_{-a}^a \Phi''(t-s)q(s)ds = 1$ , where  $\Phi(t)$ , assumed to have an absolutely continuous derivative, is the transition function of the string, which can be interpreted in terms of the effect of applying unit force for time  $t$  to one end of the string transversely (this Zbl. **48**, 70 and later papers). If there is an integrable solution  $q = q(t; a)$ , there then holds in particular the relation  $\int_{-a}^a q(t; a)dt = M(x_a)$ , where  $M(x)$  is the mass of the string in  $[0, x]$  and  $x_a$  is the distance travelled in time  $a$  (subject to a certain upper bound) by a wave starting from  $x = 0$ . Six examples are worked in which  $\Phi''(t)$  has various special forms. A distinct case is briefly explained, in which the spectral function  $\pi(\lambda)$  [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **87**, 881–884 (1952)] is assumed given by  $d\pi/d\lambda = R(\lambda)/(\pi\sqrt{\lambda})$ , and  $R(\lambda)$  is the ratio of two polynomials of the same degree.

*F. V. Atkinson.*

**Staržinskij, V. M.:** Über die Stabilität einer elastischen Welle mit unsymmetrisch angeordneter Scheibe. Inženernyj Sbornik **20**, 31–36 (1954) [Russisch].

On the contrary to the other authors (Stodola, Pöschl, Shashkoff, Tchetaeff) in this paper one considers the stability problem of the elastic shaft with non-symmetric disc. It is assumed that the shaft is rigid in regard to the torsion and the influence of the weight of the disc is neglected. Because of the nonsymmetry the motion of the disc is not plane and has four degrees of the freedom. Using the generalized coordinates  $r = OO'$ ,  $q$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$  where  $O'$  is the attachmentpoint of the disc and assuming that the deflection  $r$  and the angle  $\theta$  are small the Lagrangian equations give one cyclic integral because the coordinate  $q$  is cyclic. For the steady-state motion it follows:  $\varphi_0 = \frac{1}{2}\pi$  (for  $\beta_0 < 1$ ) or  $\frac{3}{2}\pi$  (for  $\beta_0 > 1$ ),  $r_0 > 0$ ,  $\theta_0 = \nu r_0$ ,  $r_0 = \pm e\beta_0^2(1 - \beta_0^2)$  where  $\nu = b_0/a_0$ ,  $e = O'S$ ,  $\beta_0 = \omega_0/\omega_1$ ,  $S$  is the center of the gravity,  $a_0$ ,  $b_0$  the influence coefficients,  $\omega_0$  is the angular velocity of the steady-state motion. The critical speeds  $\omega_k$  ( $\omega_k^2 = 1/m a_0$ , where  $m$  is the mass of the disc) are determined for three cases (the simple supported shaft, the shaft with built in ends, the shaft with one end built in and other end free). Using the Routh's method of the modified energy the stability criterions are deduced. It is shown that the Routh's conditions are sufficient only in the case when  $\beta_0 < 1$  (then is  $\dot{q} = \omega_0 = \text{const.}$ ). In the case when  $\beta_0 > 1$  it is supposed  $\dot{q} = \omega_0 + \Omega$ ,  $r = r_0 + \varrho$ ,  $\theta = \theta_0 + \theta$ ,  $\varphi = \varphi_0 + \psi$ .

The method of the variations reduces this problem to the stability problem that the polynomial  $\sigma^3 + a_1 \sigma^2 + a_2 \sigma + a_3 = 0$ , where  $\sigma = \lambda^2/\omega_k^2$  ( $\lambda$  is the eigenvalue of the characteristic equation), has the negative roots. The Hurwitz's procedure gives four stability conditions. The second condition  $\dot{q} = (\dot{p}_0 - 1) > (4\varepsilon^2)^{1/3} + \frac{1}{2}\varepsilon(2\varepsilon)^{1/3}$  where  $\varepsilon = e/k$ ,  $k$  is the radius of inertia, differs only with the second member of the known Th. Pöschl's result for symmetric disc [Z. angew. Math. Mech. **3**, 297—312 (1923)].

*D. Rašković.*

**Musgrave, M. J. P.:** On the propagation of elastic waves in aeolotropic media. I. General principles. II. Media of hexagonal symmetry. Proc. Roy. Soc. London. Ser. A **226**, 339—355, 356—366 (1954).

I. Nach einer historischen Übersicht über die Entwicklung des Gedankenmodells der elastischen Wellen leitet Verf. die Bewegungsgleichungen für die Ausbreitung von Störungen in anisotrop-elastischen Medien mit Hilfe des Prinzips der kleinsten Wirkung ab und stellt Gesetzmäßigkeiten für die Orientierung der Wellenfront und die Ausbreitungsgeschwindigkeit auf. — II. Die im ersten Teil dargelegten Beziehungen werden für ein Medium mit hexagonaler Symmetrie ausgewertet. Tabellenangaben für Zink und Beryll.

*H. Neuber.*

**Milne, A. A.:** A theory of grease lubrication of a slider bearing. Proc. 2nd Internat. Congr. Rheology, Oxford, 26—31 July 1953, 427—436 (1954).

L'A. svolge una teoria del moto di un grasso lubrificante in una intercapedine a pareti piane indefinite (di cui una fissa e l'altra mobile parallelamente a se stessa con velocità costante), considerato quale corpo di Bingham, in contrasto alla teoria consueta che tratta i grassi quali liquidi newtoniani. Il problema è piano e l'adozione della ipotesi accennata implica la possibilità che esistano zone nelle quali il gradiente di velocità è nullo. Il realizzarsi di tale possibilità, e l'estensione di tali zone dipende, tra l'altro, dallo sforzo di taglio limite  $\tau_0$  caratteristico di ogni corpo di Bingham. La teoria è poi applicata ad un esempio espressivo.

*T. Manacorda.*

**Tipei, N.:** La solution générale des équations hydrodynamiques de la lubrification. Commun. Acad. Republ. popul. Roum. **4**, 501—506, russ. und französ. Zusammenfassg. 507 (1954) [Rumänisch].

Recherches sur la possibilité d'obtenir des solutions par la méthode de la séparation des variables dans le cas de l'équation aux dérivées partielles régissant la distribution de la pression dans la couche de lubrifiant, lorsque le second membre est lui-même à variables séparées.

*C. Jacob.*

## Hydrodynamik:

**Chejn, A. L.:** Eine Anwendung der Operatorenrechnung auf die Theorie der Strömung einer Flüssigkeit und eines Gases zu einer unvollkommenen Senke. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **95**, 33—36 (1954) [Russisch].

**Nigam, S. D. and P. P. Chatterji:** Hydrodynamical equations for the motion of bodies of revolution in non-viscous rotating liquid. Quart. J. Mech. appl. Math. **7**, 458—461 (1954).

Die Untersuchung gehört zu dem Problemkreis der Bewegungen in rotierenden Flüssigkeiten, der in den letzten Jahren wieder stärker in den Blickpunkt des Interesses gerückt ist, nachdem die aus den Jahren um 1920 stammenden schönen Arbeiten von G. I. Taylor sowie von J. Proudman und S. F. Grace neuerdings durch Untersuchungen von H. Görtler, R. R. Long, G. W. Morgan, H. B. Squire und K. Stewartson wieder aufgegriffen worden sind. Die Verf. zeigen, daß die hydrodynamischen Gleichungen für die stationäre axialsymmetrische Strömung einer idealen, um die Achse im Unendlichen gleichförmig rotierenden Flüssigkeit allgemein auf eine einzige lineare partielle Differentialgleichung zurückgeführt werden

können. Sie weisen darauf hin, daß diese Gleichung mit Vorteil beim Studium der Bewegung eines beliebigen Drehkörpers längs der Rotationsachse der Flüssigkeit benutzt werden kann, ohne daß eine Linearisierung erst durch einschränkende Voraussetzungen erzwingen werden muß.

H. Görtler.

**Dolapčiev, Bl.:** Über die Stabilität und die schiefe Strömung zweiparametriger Wirbelstraßen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 98, 349–352 (1954) [Russisch].

Die Stabilität der zweiparametrigen Wirbelstraße mit Parametern  $\kappa = h/l$ ,  $\lambda = d/l$  ( $h$  = Straßenbreite,  $l$  = Wirbelteilung,  $d$  = Wirbelreihenverschiebung), die bei Gruppenstörungen erster Ordnung vom Verf. festgestellt ist, nämlich (1)  $\text{sh}(\kappa\pi) = \sin(\lambda\pi)$  — Stabilitätsbedingung von Maue-Dolaptschiew — ist für  $\lambda = 1/2$  die bekannte Karmansche Stabilitätsbedingung (2)  $\text{sh}(\kappa\pi) = 1$ , welche von Kotschin als „geringste Instabilität“ beurteilt wird, da (2) nur bei Störungen erster Ordnung (Kármán) und höchstens zweiter Ordnung (Dolaptschiew) gilt, während bei Störungen höherer Ordnung, trotz (2) Instabilität folgt. Es wird darauf hingewiesen, daß die Feststellung der Instabilität, wenn auch bei ganz speziellen Wirbelströmungen (wie bei Kotschin untersuchten Gruppenstörungen) überhaupt Instabilität bedeutet, während für die Feststellung der Stabilität (d. h. der geringsten Instabilität) allgemeinste Störungen verlangt werden. Es wird die Stabilitätsbedingung (1) noch beim allgemeinsten periodischen Störungsgesetz  $\mu e^{ik\varphi}$  ( $\mu$  = Funktion der Zeit,  $k$  = ganze Zahl von  $-\infty$  bis  $+\infty$ , die die Wirbelnummer bezeichnet, und  $\varphi$  = Konstante, welche die periodische Versetzung der Wirbel bedeutet) bestätigt. Die Bewegung der gestörten Wirbel ist durch das linearisierte System unendlich vieler Differentialgleichungen (3)  $\dot{\xi}_s' = a i \xi_s' + e \xi_s' + i \bar{z} b_k \bar{\xi}_k' - \bar{z} e_k \bar{\xi}_k' - i z c_k \xi_k'$ ,  $\dot{\xi}_s'' = -a i \xi_s'' - e \xi_s'' - i \bar{z} b_k \bar{\xi}_k'' - \bar{z} c_k \xi_k'' + i \bar{z} c_k \xi_k''$  ( $\xi = \xi + i\eta$ ,  $s = 0, \pm 1, \dots, \pm \infty$ ) mit Periodizität  $\xi_k = \mu_1' \cos(k + \lambda)\varphi$  usw., ausgedrückt, das in das System von vier Differentialgleichungen (4)  $\mu_1' = \alpha \mu_1' + \beta \mu_2' + \gamma \mu_1'' + \delta \mu_2''$ ,  $\mu_2' = \beta \mu_1' + \alpha \mu_2' + \delta \mu_1'' + \gamma \mu_2''$ ,  $\mu_1'' = -\gamma \mu_1' - \delta \mu_2' - \alpha \mu_1'' - \beta \mu_2''$ ,  $\mu_2'' = -\delta \mu_1' + \gamma \mu_2' - \beta \mu_1'' - \alpha \mu_2''$  reduziert wird, deren partikuläre Lösungen von der Art  $\mu_{\sigma}^{1,2} = \mu_{\sigma}^{1,2} e^{i\sigma\varphi}$  ( $\sigma = 1, 2$ ) sind und zu Bedingungen für  $\varphi$  führen, die der Forderung (1) genügen. Ferner wird gezeigt, daß die Geschwindigkeit der ungestörten zweiparametrigen Wirbelstraße, deren vertikale Komponente

$$Va = [\pi \cdot \sin(2\lambda\pi)]/[2l \cos(2\lambda\pi) - \text{ch}(2\kappa\pi)]$$

von Null verschieden ist, schiefe, der Strömung parallele Translation bewirkt und ist nicht, wie bei Maue zur Strömungsrichtung geneigt. Das letzte Ergebnis kann als vom Versuch bestätigt angesehen werden. Die Arbeit stellt einen Beitrag zur weitgehenden Verallgemeinerung der Wirbelstraßentheorie dar.

M. Popov.

**Ionescu, Dan Gh.:** Intégrales générales des mouvements à symétrie axiale des fluides visqueux incompressibles. Revista Univ. C. I. Parhon Politehn București, Ser. Ști. Natur. 3, Nr. 4-5, 143–147 u. russ. u. französ. Zusammenfassg. 147 (1954) [Rumänisch].

L'A. considère les équations des écoulements lents, permanents, à symétrie axiale des fluides visqueux incompressibles et établit trois représentations des composantes des vitesses et de la pression moyennant des potentiels libres. Ces représentations correspondent à celles obtenues en théorie de l'élasticité par A. E. Love, A. Timpe et G. D. Grodskii.

C. Jacob.

**Prakash, Prem:** On a flow superposable on the two-dimensional radial flow. Ganita 5, Nr. 1, 21–24 (1954).

Die radiale Strömung von der Form  $u = r^{-1} f_1(\theta)$  ist bekanntlich eine Lösung der Stokes-Navierschen Gleichungen. Es wird gezeigt, daß diese Strömung dann und nur dann „selbstsuperponierbar“ ist, wenn  $f_1(\theta) = \text{const.}$  Es wird nun eine wirbelfreie Strömung aufgesucht, die mit der obigen Strömung „gegenseitig superponierbar“ ist. Die Bedingung der gegenseitigen Superponierbarkeit liefert eine



Differentialgleichung für die Stromfunktion der gesuchten Strömung, die eine willkürliche Funktion enthält. Die Bedingung der Wirbelfreiheit führt auf eine weitere Differentialgleichung für diese willkürliche Funktion. Eine partikuläre Lösung liefert als Stromlinien Bernoullische Lemniskaten, die mögliche Ränder für die Strömung einer vollkommenen Flüssigkeit darstellen. Da für zähe Flüssigkeiten nur geradlinige Ränder in Frage kommen, wird auch die Existenz geradliniger Stromlinien untersucht. Im Reellen sind solche nicht möglich. *G. Heinrich.*

**Jacob, Caius:** *L'effort exercé sur une paroi en contact avec un fluide visqueux.* Revista Univ. C. I. Parhon Politehn. București, Ser. Ști. Natur. 3, Nr. 4/5, 133—138 u. russ.: u. französ. Zusammenfassg. 138 (1954) [Rumänisch].

Die von R. Berker angegebene Formel (dies. Zbl. 42, 190) zur Berechnung der auf eine starre Wand von einer zähen Flüssigkeit ausgeübten Kraft wird vom Verf. vermieden und durch direkte Anwendung der Navier-Stokesschen Gleichungen ersetzt. Auf diese Weise erhält Verf. auch einen Ausdruck für den Fall der sich bewegenden Wand. *V. Válcovici.*

**Dean, W. R.:** *Note on the motion of viscous liquid past a parabolic cylinder.* Proc. Cambridge philos. Soc. 50, 125—130 (1954).

Die Navier-Stokesschen Gleichungen werden für die zähe inkompressible ebene und symmetrische Anströmung eines parabolischen Zylinders durch einen geschickten analytischen Ansatz in parabolischen Koordinaten, der die Gesamtströmung einheitlich beschreibt, approximativ gelöst. Für hinreichend große Reynoldssche Zahlen  $R$  liefert diese Näherungslösung in Übereinstimmung mit den Resultaten der Grenzschichttheorie außerhalb einer wandnahen Schicht, deren Dicke proportional  $R^{-1/2}$  ist, die exakte Potentialströmung um den Körper. Im Grenzfall der ebenen einseitig unbegrenzten Platte stimmt die Näherung gut mit jener der Grenzschichttheorie (Blasiussche Grenzschicht) überein: die Näherungslösung wird durch die Blasiussche Funktion geliefert, jedoch mit einer anderen unabhängigen Variablen als in der Grenzschichttheorie, und gilt einheitlich für den gesamten Strömungsraum. Fehlerbetrachtungen zur Rechtfertigung des Näherungsansatzes werden angestellt, sind jedoch wenig überzeugend, obwohl obige Resultate für eine gute Approximation sprechen. *H. Görtler.*

**Eppler, R.:** *Beiträge zu Theorie und Anwendung der unstetigen Strömungen.* J. rat. Mech. Analysis 3, 591—644 (1954).

Es wird die von Helmholtz und Kirchhoff herrührende und von Levi-Civita weiter ausgebaut Theorie der Totwasserströmung hinter stumpfen Körpern, deren Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen noch durchaus unbefriedigend ist, einer Revision unterzogen. Es werden Strömungsformen konstruiert, die als eine bessere Idealisierung der wirklichen Strömung gelten können. Dabei wird als zusätzlicher Parameter der statische Druck im Totwassergebiet eingeführt. Auch wird im Gegensatz zu den früheren Autoren jetzt eine endliche Totwasserbreite erhalten, und damit ein Widerspruch zum Impulssatz vermieden. Die hier angegebene Strömungsform ist eine Verallgemeinerung der bekannten konformen Abbildungen. Ein Vergleich mit Versuchsergebnissen für die senkrecht angeströmte ebene Platte zeigt gute Übereinstimmung sowohl für die Form der Totwassergrenze als auch für den Widerstandsbeiwert. *H. Schlichting.*

● **Ackeret, Jakob:** *Über die Temperaturverteilung hinter angeströmten Zylindern.* Sprenger, Herbert: *Über thermische Effekte in Resonanzrohren.*

**Plaškowski, Zbigniew:** *Schubvermehrung durch Strahlmischung.* (Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik an der ETH Zürich, Nr. 21.) Zürich: Verlag Leemann 1954. 55 S., 35 Abb. geh. 13,50 SFr.

Für zweidimensionale Strömung um Profile mit Strömungsablösung beobachtet man an der Hinterkante in gewissen Fällen Temperaturen, die weit unter der Freistromtemperatur der Anströmung liegen (L. F. Ryan, Mitt. Inst. Aerodyn. ETH

Zürich, 18, 7—52 (1951)]. Dies Phänomen ist vom Standpunkt einer stationären Betrachtungsweise aus recht merkwürdig, weil die Strömungsgeschwindigkeiten an der abgelösten Hinterkante sicher nicht groß sind und demgemäß nach der stationären Energiegleichung nahezu Stautemperatur erreicht werden müßte. — Wie Ryan zeigte, ist dieser aerodynamische Kühlungseffekt immer dann besonders groß, wenn sich bei der Ablösung stärkere Einzelwirbel bilden. Es ist daher zu vermuten, daß weniger die unregelmäßige Turbulenz als vielmehr instationäre wohldefinierte Strömungen bei der Ablösung und beim Wegschwimmen der Wirbel die Abkühlung bewirken. Im ersten Beitrag dieser Mitteilungen wird nun gezeigt, daß tatsächlich schon die Potentialströmung der Felder einzelner abgehender Wirbel Abkühlung liefern kann. Da für das instationäre Potential  $q$  und die Gesamtenergie  $E$  die Beziehung  $E + \dot{c}q \dot{c}t = \text{const}$  im ganzen Feld besteht, und da es für die zeitlichen Energiemittelwerte nur auf die Anfangs- und Endwerte des Potentials ankommt, braucht man die Bewegung der Wirbelzentren gar nicht genauer zu kennen. Die Rechnung für den Kreiszylinder wird sehr einfach, wenn man die Machzahl so klein annimmt, daß approximativ die Zylinderströmung additiv aus einer zirkulationsfreien Strömung und aus einem instationären Wirbel- plus Spiegelwirbelfeld (gespiegelt am Kreis) superponiert werden kann. Daß die Wirbel nicht stets an der gleichen Stelle weggehen, wird durch den Effekt ersetzt, daß die volle Zirkulation des gesamten Wirbels erst in einiger Entfernung vom Zylinder erreicht wird. — Das unter diesen Hypothesen für Machzahl  $M = 0,35$  durchgerechnete Beispiel eines Kreiszylinders (die Wirbel entstanden im Abstand 1,3 Radien vom Mittelpunkt,  $\theta = 110^\circ$  hinter dem vorderen Staupunkt  $\theta = 0^\circ$ ) stimmt in seinem Temperaturverlauf längs der Zylinderkontur mit Messungen von Ryan bei  $Re = 1,2 \times 10^5$  ganz hervorragend überein, falls das für die Verhältnisse im hinteren Punkt ( $\theta = 180^\circ$ ) maßgebliche Produkt  $n F$  ( $2n =$  Anzahl der sekundlich abgehenden positiven und negativen Wirbel,  $F$  deren Zirkulation) so gewählt wird, daß die Temperatur dort ( $\theta = 180^\circ$ ) den Messungen gemäß herauskommt. — Der zweite Beitrag bringt experimentelle Ergebnisse an einseitig offenen, zylindrischen Resonatoren, die nach Art des Hartmannschen Schallgebers durch einen freien Gasstrahl zum Schwingen angeregt werden. Die periodische Kompression und Expansion des im Resonator enthaltenen Gases kann dabei Temperatursteigerungen am Ende des geschlossenen Resonanzrohres hervorrufen, die weit über der adiabatischen Stautemperatur liegen. Interessant ist, daß auch mit erregenden Unterschallstrahlen intensive Oszillationen erzeugt werden können, wenn man nur (z. B. durch hinter dem Erregerstrahl angebrachte Turbulenzdrähte) für leichte, instationäre Störungen des Strahles sorgt. Auch können die Effekte erregender Überschallstrahlen durch solche Maßnahmen verbessert werden. — Eine große Zahl von Röhren mit Frequenzen von 50 bis 3000 Hertz, gefüllt mit Luft und erregt durch aus konvergenten Düsen ausströmende komprimierte Luft vom Druckverhältnis bis zu 7:1 (u. a. auch eine Lavaldüse für  $M = 1,7$ ), wurde systematisch auf optimale thermische Effekte hin untersucht. Auch der Fall, daß das ursprünglich geschlossene Ende des Resonatorrohres angebohrt und demgemäß Luft abgeführt wird, wurde untersucht. Dabei strömt warme Luft aus dieser Öffnung, während gekühlte Luft den Resonatoreintritt verläßt. Zum Abschluß werden die Separationscharakteristiken eines Resonanzrohres und eines Ranqueschen Wirbelrohres, die beide unter gleichen Betriebsbedingungen bei gleichem Kontraktionsverhältnis der Düse arbeiten, verglichen. Die Ähnlichkeit der erhaltenen Kurven läßt die physikalische Verwandtschaft beider Separationsprozesse erkennen. — In der dritten Mitteilung wird eine Strahldüse vom Austrittsquerschnitt  $F_1$  betrachtet, der ein Schubvervielfacher in Gestalt eines zylindrischen (oder auch konischen, diffusorartigen) Rohres vom Eintrittsquerschnitt  $F_2 > F_1$  nachgeschaltet wird. Wichtig ist, daß dieses nachgeschaltete Rohr eine gut ausgebildete runde Einlaufsnase hat. Der schnelle Treibstrahl reißt dann die Umgebungsluft als einen beschleunigten



sekundären Strahl mit. Beide Strahlen vermischen sich und es entsteht a) ein Unterdruck am Treibdüsenende, der eine Vergrößerung des Expansionsgefälles des Treibstrahles (aber auch einen Druckwiderstand an der Düse) zur Folge hat, b) Unterdruck um den Rohreinlauf, der sich als Saugkraft an der Einlaufsnase absetzt. Diese Einlaufsnasensaugkraft erweist sich als der maßgebende Beitrag zur Schubvermehrung. — Unter der Annahme inkompressibler Strömung, vernachlässigbarer Wandreibung und konstanter Geschwindigkeitsverteilungen in den betrachteten Querschnitten werden ein Triebwerk mit Schubvermehrer und ein Triebwerk allein unter den Bedingungen miteinander verglichen, daß die ideal aufzubringenden Leistungen in beiden Fällen gleich groß sind. Außerdem sollen die sekundlichen Volumina beider Treibdüsen und auch die in den verlustlosen Triebwerken theoretisch zu erzeugenden Druckerhöhungen gleich sein. Die Resultate dieses Vergleichs sind, daß mit zunehmender Fluggeschwindigkeit die im Stand erreichbaren Vorteile rasch verschwinden. Der Schubvermehrer kommt daher hauptsächlich nur als Starthilfe in Frage. Zwar können theoretisch bei großen  $F_2$  beträchtliche Zusatzschübe erreicht werden, aber hier setzt die Praxis bald Grenzen, da nur starke Treibimpulse einen sekundären Strahl mit Hilfe nicht zu langer Mischrohrängen erzeugen können. — Zum Schluß wird über einschlägige Messungen des Verf. an verschiedenen Aggregaten und Kombinationen solcher berichtet.

*H. Behrbohm.*

● **Knudsen, James G. and Donald L. Katz: Fluid dynamics and heat transfer.** Michigan: University of Michigan Press 1954. IX, 243 p. \$ 3,50 (paper), \$ 4,50 (cloth).

Der konvektive Wärmeübergang hängt von sehr vielen Größen ab; erst das Ähnlichkeitsprinzip und die Dimensionsanalysis brachten durch die Einführung der Kennzahlen nach Nusselt, Reynolds, Prandtl u. a. soviel Übersicht, daß durch Messungen dann allgemeine Gesetzmäßigkeiten gewonnen werden konnten, die auf empirische Formeln (meist Potenzformeln) gebracht wurden. Weitere Fortschritte ergaben sich erst, als der Einfluß der strömungsdynamischen Vorgänge auf den Wärmeübergang im einzelnen auch theoretisch untersucht wurde. Der vorliegende Bericht, herausgegeben vom Engineering Research Institute der Universität Michigan, will eine Grundlage für weitere Forschungen in dieser Richtung bilden. Er berichtet über den derzeitigen Stand der Wissenschaft und gliedert sich in drei Teile, die der Reihe nach die Dynamik der Flüssigkeitsströmungen, die Energieverluste in ihnen und den Wärmeübergang an strömende Flüssigkeiten behandeln. Entsprechend der technischen Bedeutung für den Wärmeaustausch werden nur die stationären Strömungen behandelt, vor allem erzwungene Strömungen; insbesondere solche durch Röhren von gleichbleibendem Querschnitt in Form von Kreisen, Drei- und Vierecken und Kreisringen (Ringspalten), auch mit Längs-, Quer- oder Schraubenrippen — auf diesem Teilgebiet haben besonders die Verff. gearbeitet. Doch auch Strömungen zwischen parallelen Platten und die Umströmung verschiedener Körper: Kreis- und elliptische Röhren, Kugeln werden besprochen. Laminare und turbulente Strömung werden meist getrennt behandelt. Bei der engen Verwandtschaft der Vorgänge, durch die Wärmeübertragung und Impulsübertragung in Flüssigkeiten bewirkt werden, sei es mehr durch molekulare Wechselwirkung oder durch turbulenten Austausch, ist es möglich — obwohl das Verhältnis der beiden Austauschgrößen nicht gut bekannt ist —, die Wärmeübergangszahl aus dem theoretisch oder durch Messungen ermittelten Geschwindigkeitsprofil einer Rohrströmung zu berechnen. Für mittlere und große Prandtl-Kennzahlen stimmen die durch Prandtl, von Kármán u. a. theoretisch abgeleiteten Formeln gut mit den Messungen überein, hingegen ist bei kleinen Prandtl-Zahlen ( $Pr \sim 0,01$ ), etwa bei flüssigen Metallen mit ihrer hohen Wärmeleitfähigkeit, die Übereinstimmung weniger befriedigend. Es trifft sich günstig, daß sich gerade in diesen Fällen die Berechnung aus der (leichter zu messenden) Geschwindigkeitsverteilung bewährt, weil es dann nicht



besonders auf die Dicke der laminaren Grenzschicht einer turbulenten Strömung ankommt. Die Integralformel für diesen Zusammenhang wird nach der Darstellung von R. N. Lyon wiedergegeben [Heat transfer at high fluxes in confined spaces, Chem. Engineering Progr. **47**, 75—79 (1951)]. Seine Voraussetzungen decken sich praktisch mit denen von R. C. Martinelli [Heat transfer to molten metals, ASME Trans. **69**, 947 (1947)]. Die Ausführungen von H. Reichardt zu dieser Frage [Z. angew. Math. Mech. **20**, 297—328, (1940)] werden jedoch dabei nicht erwähnt. — Mit seinen zahlreichen Formeln, Tabellen, Zeichnungen und Diagrammen bietet das Buch, dessen Literaturliste 129 Nummern aufweist, eine gute Einführung und Übersicht über dieses Gebiet.

U. T. Bödewadt.

Seth, B. R.: New formulation of equations of compressible flow. Bull. Calcutta math. Soc. **46**, 217—220 (1954).

Der Verf. bringt die Kontinuitätsgleichung stationärer kompressibler wirbelfreier Strömungen auf die Form  $\varrho \sqrt{\varphi} = \varphi \sqrt{\varrho}$  ( $\varrho$  ist die Wurzel aus der Dichte,  $\varphi$  das mit  $\varrho$  multiplizierte Geschwindigkeitspotential) und gibt Lösungen dieser Gleichung in zweidimensionalen orthogonalen Koordinatensystemen an. Mit Hilfe der Bernoulligleichung für kompressible Strömungen und der Adiabatangleichung werden aus den erwähnten Lösungen solche ausgewählt, die Strömungsvorgängen entsprechen. Die Anzahl der so erhaltenen Lösungen von Strömungsproblemen ist nicht groß; auch hat Ref. den Eindruck, daß die verwendete Methode nur Unterschallprobleme löst (eine Erweiterung der Methode für die Lösung von Überschallproblemen scheint jedoch möglich zu sein).

F. Cap.

Nikol'skij, A. A.: Aufgaben über das Ausströmen eines Gases mit Schallgeschwindigkeit. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **94**, 401—404 (1954) [Russisch].

Der Verf. geht von den Differentialgleichungen Tschapligins für die Potential- und Stromfunktion in der Geschwindigkeitsebene aus,  $\partial\varphi/\partial\beta = P(\tau)$  ( $\partial\psi/\partial\tau$ ),  $\partial\varphi/\partial\tau = Q(\tau)$  ( $\partial\psi/\partial\beta$ ), worin  $\beta$  der Neigungswinkel des Geschwindigkeitsvektors zur  $x$ -Achse in der Strömungsebene,  $\tau$  das Verhältnis der Geschwindigkeit zur Maximalgeschwindigkeit bedeuten und die Funktionen  $P(\tau)$  und  $Q(\tau)$  nur noch  $\kappa = c_p/c_v$  enthalten. In analoger Weise, wie Tschapligin die Unterschallströmung behandelt, werden hier für das Überschallgebiet Potentialfunktion und Stromfunktion in der Geschwindigkeitsebene in Potenzreihen von partikulären Lösungen des Ausgangssystems entwickelt, die von der Art  $\psi_r = z_r \cos 2r\beta$  und  $\varphi_r = (1/2r)P(\tau)z'_r \sin 2r\beta$  sind; die Funktion  $z_r(\tau)$  befriedigt die Differentialgleichung  $(d/d\tau)[P(\tau)z'_r] + (2r)^2Q(\tau)z_r = 0$ . Im Gegensatz zur Unterschallströmung werden hier zwei linear unabhängige Integrale  $z_{r1}$  und  $z_{r2}$  jeder Gleichung benötigt. Weiter wird das Verfahren auf die Aufgabe von Cauchy zurückgeführt, und bei ihrer Bearbeitung u. a. die Eigenschaften der Wronskyschen Determinante benützt; z. B. für die Stromfunktion ergibt sich

$$\frac{\psi}{\beta_1} = \frac{\beta}{\beta_1} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{z_{r1}(\tau)/z'_{r1}(\tau_0) - z_{r2}(\tau)/z'_{r2}(\tau_0)}{z_{r1}(\tau_0)/z'_{r1}(\tau_0) - z_{r2}(\tau_0)/z'_{r2}(\tau_0)} \sin \pi n \frac{\beta}{\beta_0},$$

worin  $\psi_1$  und  $\beta_1$  zugeordnete Grenzwerte darstellen und  $\tau_0$  und  $\beta_0$  sich auf die kritische Geschwindigkeit beziehen. Schließlich werden die Beziehungen zur Bestimmung der Koordinaten in der Strömungsebene abgeleitet. Die Methode ist wirksamer als die Verfahren von Ferri, Rudnev, und Michailova und gestattet die Lösung einer Reihe ebener Aufgaben, wie z. B. die Umströmung des Keils mit Schallgeschwindigkeit, die Ausströmung mit kritischer Geschwindigkeit in der Mündung usw.

M. Popov.

Gray, C. A. M.: The analysis of the dissipation of energy in water hammer. Austral. J. appl. Sci. **5**, 125—131 (1954).

Consideration is given to the dissipation of the pressure surge produced by closure of a valve at the end of pipeline. Assuming the dissipation to be proportional to the square of the

velocity, a solution is obtained in the form of two integral equations which are shown to be readily evaluated by successive approximations. A numerical example is considered and calculations compared with experiment.

Zusammenfassg. des Autors.

**Bers, Lipman:** Existence and uniqueness of a subsonic flow past a given profile. Commun. pure appl. Math. **7**, 441—504 (1954).

Verf. führt allgemeine Existenz- und Einzigkeitsbeweise für stationäre ebene Unterschall-Potentialströmungen idealer Gase um vorgegebene Profile 1. für Profile mit scharfer Hinterkante bei Vorgabe der Strömungsgeschwindigkeit im Unendlichen, wobei, wie in inkompressibler Strömung, die Kutta-Joukowski-Bedingung die Zirkulation eindeutig festlegt, 2. für glatte Profile bei Vorgabe sowohl der Geschwindigkeit im Unendlichen als auch der Zirkulation. Die Beweise dieser Sätze und gewisser Modifikationen derselben werden erbracht unter Verwendung von Ergebnissen der Theorien der quasi-konformen Abbildungen und der pseudo-analytischen Funktionen. Die Sätze sind von großer Allgemeinheit. Der Fortschritt gegenüber den bisher bekannten einschlägigen Existenz- und Einzigkeitssätzen wird vom Verf. klar herausgearbeitet.

H. Görtler.

**Zarantonello, Eduardo H.:** Parallel cavity flows past a plate. J. Math. pur. appl., IX. Sér. **33**, 29—80 (1954).

It is known that an obstacle placed in a uniform stream of an ideal fluid does not determine a unique steady irrotational flow if the fluid is allowed to cavitate. There are two aspects of this indeterminacy: a number of topologically different flow configurations can occur, and for a given configuration more than one flow may be possible. The author sets for himself the problem of finding all the configurations which are possible when the flow is plane and the obstacle is a flat plate. The main assumptions made are, that the flow not involve a second sheet of the flow plane, and that there be no infinite velocities. These conditions unfortunately exclude at the outset several attractive and useful configurations (the reentrant jet, for example, is disallowed for the former reason, and the finite trailing cavity for the latter). In conclusion the author finds that under the conditions laid down there are only nine configurations; in seven the plate is parallel to the stream and circulation is present, the eighth is the standard Kirchhoff flow with the plate arbitrarily inclined, and the last is the Kirchhoff flow with an added cavity in front of the plate.

J. B. Serrin (Math. Rev. **15**, 836).

**Kostjukov, A. A.:** Der Widerstand von Körpern in einer Flüssigkeit bei Bewegung in der Nähe einer vertikalen Wand. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **99**, 349—352 (1954) [Russisch].

**Krzywoblocki, M. Z. v.:** On the development of the mathematical theory of the boundary layer. Commentarii math. Univ. St. Pauli **3**, 51—66 (1954).

Es ist die Absicht des Verf., die Entwicklung und den gegenwärtigen Stand der mathematischen Grenzschichttheorie kurz darzustellen. Es liegt ihm dabei nicht so sehr an der Konstruktion von Lösungen, für die zumeist eine strenge mathematische Begründung fehlt; es ist ihm vielmehr um Fragen der Existenz und der Einzigkeit der Lösungen des grenzschichttheoretischen Rand- und Anfangswertproblems zu tun. Die Darstellung ist gegliedert nach a) inkompressiblen, b) kompressiblen, c) hypersonischen Strömungen. Umfangreiches Literaturverzeichnis.

H. Görtler.

**Grodzovskij, G. L.:** Ausgleichung der Ungleichmäßigkeit des Geschwindigkeitsfeldes bei axialsymmetrischer turbulenter und laminarer Strömung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **97**, 613—616 (1954) [Russisch].

**Smith, John W.:** Effect of diffusion fields on the laminar boundary layer. J. aeronaut. Sci. **21**, 154—162, 178 (1954).

Es wird ein Berechnungsverfahren für die kompressible laminare Grenzschicht mit einem Diffusionsfeld angegeben. Ein solches Diffusionsfeld kommt zustande, wenn durch eine poröse Wand ein zweites Gas dem längs der Wand strömenden



ersten Gas zugeführt wird, wie es z. B. bei der Schwitzkühlung der Fall ist. Wenn die physikalischen Eigenschaften (Dichte, Wärmeleitfähigkeit) des zweiten Gases von denen des ersten Gases verschieden sind (z. B. Einblasen von Wasserstoff in Luft), so hat dies einen beträchtlichen Einfluß auf die Ausbildung der Strömungs- und Temperaturgrenzschicht. Die Rechnungen werden für die Plattengrenzschicht ausgeführt, und die Lösung der Differentialgleichungen gelingt mit Hilfe eines gut konvergierenden Iterationsverfahrens. An dem Beispiel einer Grenzschicht mit hoher Überschallgeschwindigkeit (Mach-Zahl 12) wird gezeigt, daß die in der Grenzschicht infolge der Reibungswärme auftretenden hohen Temperaturmaxima durch das Einblasen von Helium stark abgebaut werden.

*H. Schlichting.*

**Smith, John W.:** Addendum—Effect of diffusion fields on the laminar boundary layer“. *J. aeronaut. Sci.* **21**, 640—641 (1954).

**Illingworth, C. R.:** The effect of heat transfer on the separation of a compressible laminar boundary layer. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **7**, 8—34 (1954).

Unter der Annahme, daß die Prandtl-Zahl gleich 1 und die Zähigkeit zur absoluten Temperatur proportional ist, wird eine approximative Methode zur Berechnung kompressibler laminarer Grenzschichten bei veränderlichem äußeren Druck und veränderlicher Temperatur längs der Wand entwickelt, die sich an die von M. J. Lighthill (dies. Zbl. **38**, 115) bei der Diskussion des Wärmeüberganges in Grenzschichten benutzten Vereinfachungen unmittelbar anlehnt. Diese Methode ist an sich besser für das indirekte Problem geeignet, Lösungen zu konstruieren, aus denen nachträglich die äußere Druckverteilung und die Wandtemperaturverteilung hergeleitet werden, jedoch ist sie auch für die übliche direkte Fragestellung nützlich. Die behandelten Beispiele beziehen sich auf den Sonderfall konstanter Wandtemperatur, da es dem Verf. in erster Linie um den Einfluß eines Druckgradienten geht. In einigen Beispielen des inkompressiblen Grenzfalles ergibt sich brauchbare Übereinstimmung mit bekannten exakten Lösungen. In den betrachteten allgemeineren Fällen zeigt es sich, daß der Einfluß des Druckgradienten vergrößert (verkleinert) wird, wenn das Verhältnis der Temperatur der Außenströmung zur Wandtemperatur kleiner (größer) als 1 ist. So stellt sich etwa für den Fall langsamer Strömung (Mach-Zahl praktisch Null) an geheizten Wänden eine Erhöhung (Verringerung) der Wand Schubspannung und des Wärmeüberganges ein, wenn die Außenströmung beschleunigt (verzögert) ist. Das ist einleuchtend, da bei erhitzter Wand die wandnächste Flüssigkeit geringere Dichte hat und daher leichter der beschleunigenden (verzögernden) Wirkung der Außenströmung folgt. Bei gleichförmig verzögerter Außenströmung wandert der Ablösepunkt bei zunehmender Wandtemperatur in Übereinstimmung hiermit stromaufwärts; es ergibt sich dagegen nur eine relativ schwache Abhängigkeit seiner Lage von der Mach-Zahl.

*H. Görtler.*

**Lighthill, M. J.:** The response of laminar skin friction and heat transfer to fluctuations in the stream velocity. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **224**, 1—23 (1954).

Untersucht wird die ebene, inkompressible und laminare Grenzschichtströmung an einem Zylinder, wenn die äußere Strömungsgeschwindigkeit dem Betrage nach (aber nicht in der Richtung) kleine zeitlich harmonische Schwankungen aufweist. Dabei werden die entsprechenden Schwankungen in der Verdrängungswirkung der Grenzschicht auf die äußere Strömung vernachlässigt. Die Fälle kleiner und großer Frequenzen  $\omega$  werden methodisch getrennt und beidemal in mehr überschlägiger erster Approximation behandelt. Es zeigt sich der bemerkenswerte — und nachträglich einleuchtende — Sachverhalt, daß die zeitlichen Maxima der Wandschubspannung an einer Wandstelle den Maxima der äußeren Geschwindigkeit voreilen. Verf. findet, daß es eine von der jeweiligen Wandstelle abhängige Frequenz  $\omega_0$  gibt derart, daß für  $\omega > \omega_0$  die Schwankungen praktisch von der mittleren Strömung unabhängig sind und eine Phasenvoreilung von  $\pi/4$  aufweisen; für  $\omega < \omega_0$  dagegen lassen sich die Schwankungen approximativ durch die Summe zweier Terme aus-



drücken, die zur momentanen Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung der Anströmung proportional sind, und diese Schwankungen haben die Phasenvoreilung  $\arctan(\omega/\omega_0)$ . Verf. untersucht auch den Wärmeübergang vom Körper bei konstanter Wandtemperatur und bei konstanter Temperatur der ankommenden Strömung, wobei konstante Stoffwerte vorausgesetzt werden und die Reibungswärme vernachlässigt wird. Besondere Aufmerksamkeit wird dabei dem Falle eines erhitzten kreiszylindrischen Drahtes in Laminarströmung gewidmet. Verf. findet allgemein eine durch thermische Trägheit bedingte Neigung zu Phasenverzögerung der Temperaturschwankungen gegenüber den Schwankungen der äußeren Strömungsgeschwindigkeit, der jedoch die Voreilung der Geschwindigkeitsschwankungen in der Grenzschicht entgegenwirkt. In Bereichen einer Druckabnahme in Strömungsrichtung überwiegt die phasenverzögernde Neigung; bei konstantem Druck (Blasiussche Platte) scheinen sich beide Effekte in erster Näherung gegenseitig aufzuheben; bei Druckanstieg scheint sich wenigstens bei niedrigen Frequenzen Phasenvoreilung einzustellen.

*H. Görtler.*

**Spalding, D. B.: Mass transfer in laminar flow.** Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **221**, 78—99 (1954).

Verf. definiert eine verallgemeinerte lokale Diffusionsgröße, in welche die Konzentrationen der in einem Flüssigkeitsgemisch beteiligten diffundierenden Substanzen eingehen. Es zeigt sich, daß für diese Größe  $b$  die Differentialgleichung bei laminarer Strömung in der Grenzschicht längs einer Körperoberfläche — die Differentialgleichung für den Massenübergang zwischen strömendem Medium und Oberfläche — für weite Problemkreise von derselben Form ist wie die bereits weitgehend beherrschte Differentialgleichung des Wärmeüberganges. (Finden chemische Reaktionen statt oder spielt der Wärmefluß eine wesentliche Rolle, so gilt dies nur unter speziellen Annahmen für die auftretenden Diffusionskoeffizienten.) Die Randbedingung an der Wand jedoch stellt eine Kopplung (Proportionalität) zwischen der Normalkomponente der Geschwindigkeit und der Normalableitung von  $b$  dar. (Man hat es also mit Verhältnissen zu tun analog jenen bei Grenzschichtabsaugung bzw. -ausblasung.) Hier können nun bekannte Lösungs- und Approximationsverfahren unmittelbar übertragen werden. Verf. behandelt mit der Pohlhausen-Methode unter Verwendung von Polynomen 3. Grades im Wandabstand für das Geschwindigkeits- und das  $b$ -Profil die folgenden Probleme: (a) Strömung längs der ebenen Platte; (b) freie Konvektionsströmung an der vertikalen ebenen Platte; (c) Strömung in der nächsten Umgebung des vorderen Staupunktes einer Kugel. Eine Beschränkung auf Massenübergang nur von der Wand zur Flüssigkeit hin ist erforderlich, da das Verfahren für Massenübergang in umgekehrter Richtung versagt. (Dem entspricht Ausblasen durch die Wand mit einer Geschwindigkeit umgekehrt proportional der lokalen Grenzschichtdicke.) Wo angebracht, wird die Prandtl'sche bzw. Schmidt'sche Zahl gleich 0,71 gewählt.

*H. Görtler.*

**Spalding, D. B.: Mass transfer from a laminar stream to a flat plate.** Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **221**, 100—104 (1954).

Diese Arbeit schließt eng an die vorstehend besprochene des gleichen Verf. an. Da das Pohlhausen-Verfahren unter Verwendung von Polynomen 3. Grades für Geschwindigkeits- und Konzentrationsgrenzschicht versagt, falls der Massenübergang zur Wand hin erfolgt, werden andere Approximationsausdrücke verwendet, um das Problem der Strömung längs der ebenen Platte zu behandeln. (Das aerodynamische Analogon ist Absaugung durch die Platte mit einer Geschwindigkeit umgekehrt proportional der Wurzel aus der Entfernung von der Plattenvorderkante.)

*H. Görtler.*

**Dorrance, William H. and Frank J. Dore: The effect of mass transfer on the compressible turbulent boundary-layer skin friction and heat transfer.** J. aeronaut. Sci. **21**, 404—410 (1954).

Es werden Formeln für den Reibungsbeiwert und die Wärmeübergangszahl der turbulenten Grenzschicht an der ebenen Platte mit konstantem Druck hergeleitet, wenn gleichzeitig Grenzschichtmasse kontinuierlich abgesaugt oder Strömungsmasse aus der Wand ausgeblasen wird. Die Prandtl'sche Zahl und das Verhältnis der Koeffizienten für Impuls- und Wärmeaustausch wird dabei zu 1 angenommen. Die Theorie baut sich ferner auf dem Prandtl'schen Mischungswegansatz auf. Die dabei auftretenden Konstanten werden so festgesetzt, daß sich für den Fall inkompressibler Strömung ohne Absaugung und Ausblasung Übereinstimmung mit den entsprechenden Formeln v. Kármáns und Schoenherr's ergibt. Der Vergleich mit Messungen bei inkompressibler Strömung zeigt gute Übereinstimmung hinsichtlich der Wirkung von Absaugung und Ausblasung auf den örtlichen Reibungsbeiwert und die örtliche Wärmeübergangszahl.

*J. Rotta.*

**Truckenbrodt, E.: Die turbulente Strömung an einer angeblasenen rotierenden Scheibe.** Z. angew. Math. Mech. **34**, 150—162 (1954).

Verf. berechnet die turbulente Grenzschicht an einer rotierenden Scheibe, die in Richtung der Drehachse angeströmt wird. Er erweitert damit frühere Untersuchungen der entsprechenden laminaren Strömung [H. Schlichting und E. Truckenbrodt, J. aeronaut. Sci. **18**, 639—640 (1951); A. N. Tifford und Sheng To Chu, J. aeronaut. Sci. **19**, 284—285 (1952)] auf den turbulenten Fall. Er benutzt zur angenäherten Lösung des Problems das von v. Kármán für die rotierende Scheibe ohne Anströmung entwickelte Impulsverfahren [Th. v. Kármán, Z. angew. Math. Mech. **1**, 233—252 (1921)]. Grenzschichtdicke, Wandschubspannung und Drehmoment sowie die Geschwindigkeitsverteilung im einzelnen werden in Abhängigkeit vom dimensionslosen Verhältnis der Anströmgeschwindigkeit zur Drehgeschwindigkeit ermittelt. Man vergleiche hierzu auch das nachstehende Referat.

*H. Görtler.*

**Truckenbrodt, E.: Ein Quadraturverfahren zur Berechnung der Reibungsschicht an axial angeströmten rotierenden Drehkörpern.** Ingenieur-Arch. **22**, 21—35 (1954).

Diese Arbeit schließt eng an die vorstehend besprochene Untersuchung des gleichen Verf. an. Für die Grenzschicht an axial angeströmten rotierenden Drehkörpern war der entsprechende Fall laminarer Strömung bereits behandelt worden (dies. Zbl. **51**, 416). Benutzt wird auch im turbulenten Fall ein Näherungsverfahren, das auf den beiden Impulsgleichungen in meridionaler und azimuthaler Richtung gegründet ist und vereinfachende Ansätze, insbesondere in Anlehnung an verwandte Verhältnisse am schiebenden unendlich langen Flügel, in Anspruch nimmt. Durch die gewählten Ansätze für die Wandschubspannungskomponenten werden die beiden Impulsgleichungen sogar voneinander unabhängig. Verf. vermag dann einfache Quadraturformeln für die Impulsverlustdicken abzuleiten und eine Abschätzung für die Lage der Ablösestelle anzugeben. Er findet, daß sich das Drehmoment bei konstant gehaltener Anströmgeschwindigkeit linear mit der Umfangsgeschwindigkeit ändert. Als Beispiele werden Drehscheibe, Kugel, Rotationsellipsoid und Halbkörper behandelt.

*H. Görtler.*

**Korst, H.: Auflösung eines ebenen Freistrahlandes bei Berücksichtigung der ursprünglichen Grenzschichtströmung.** Österreich. Ingenieur-Arch. **8**, 152—157 (1954).

Die Bewegungsgleichung für die turbulente kompressible Mischungszone eines ebenen Freistrahlandes wird unter gewissen vereinfachenden Annahmen linearisiert im Sinne von S. I. Pai [J. aeronaut. Sci. **16**, 463—469 (1949)]. Dabei wird für die scheinbare Zähigkeit  $\epsilon$  in Verallgemeinerung eines früher von H. Görtler [Z. angew. Math. Mech. **22**, 244—254 (1942)] benutzten Ansatzes eine allgemeine Verteilung in Hauptströmungsrichtung angenommen, die es erlaubt, den Einfluß einer im Austrittsquerschnitt des Strahls vorhandenen Grenzschicht zu berücksichtigen, und die asym-

ptotisch hinreichend weit stromabwärts in den Görtlerschen Ansatz für den Strahlaustritt aus einer Punktquelle übergeht. Die schließlich nach einer zusätzlichen Transformation resultierende Differentialgleichung ist mit der linearen Wärmeleitungsgleichung identisch, und für diese kann unter Beachtung der bestehenden Bedingungen eine einparametrische Lösungsschar angegeben werden. Bei der Zuordnung der Lösungen zu den Strömungen im Strömungsraum bei gegebener Austrittsbedingung wird der Impulsatz benötigt. Dabei wird die Prandtl-Zahl gleich 1 gesetzt. Vergleiche mit Messungen von A. J. Chapman (Thesis, Univ. of Illinois 1953) erlauben, für die  $\varepsilon$ -Verteilung eine spezielle und plausible Form anzunehmen.

H. Görtler.

Ray, M.: Turbulent flow in a plane wake of a compressible fluid. Bull. Calcutta math. Soc. **46**, 129—134 (1954).

Berechnung der ebenen turbulenten Nachlaufströmung in linearisierter Näherung weit stromabwärts vom umströmten Körper a) nach der Prandtlschen Mischungsweg-Hypothese, b) nach der Prandtl-Reichardtschen Annahme konstanten Austausches über den Nachlaufquerschnitt.

H. Görtler.

Taliev, V. N.: Die fundamentalen Gesetzmäßigkeiten einer ringförmigen turbulenten Quelle. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **94**, 405—408 (1954) [Russisch].

Kampé de Fériet, J.: Introduction to the statistical theory of turbulence. I.—III. J. Soc. industr. appl. Math. **2**, 1—9, 143—174, 244—271 (1954).

I. Dans cette introduction, l'A., après un rapide résumé historique, montre que les diverses sortes de moyennes utilisées dans la théorie de la turbulence satisfont aux propriétés suivantes:

$$\overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g}, \quad \overline{af} = a\overline{f}, \quad \overline{fg} = \overline{f}\overline{g}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

qu'il appelle „axiomes de Reynolds“. On peut définir des classes de fonctions satisfaisant à ces axiomes. On peut aussi introduire la notion de moyenne stochastique, ou moyenne relative à un ensemble  $f(x, t, \omega)$  de fonctions,  $\omega$  dérivant un espace  $\Omega$  dans lequel est définie une mesure de probabilité  $\mu$ . Les moyennes stochastiques satisfont aux axiomes de Reynolds et sont d'un emploi théorique commode. Mais elles doivent être rattachées aux moyennes temporelles expérimentales par un théorème qui n'existe pas encore en mécanique des fluides. L'A. considère ensuite un fluide remplissant tout l'espace  $X$ . Si  $u_j(x, t)$  représente le champ de vitesse, on peut définir un tenseur de corrélation par les moyennes temporelles

$$\varrho_{jk}(h) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u_j\left(t + \frac{h}{2}\right) u_k^*\left(t - \frac{h}{2}\right) dt$$

et lui associer un tenseur spectral  $S_{jk}(\lambda)$ . La fin de cette introduction donne le plan des chapitres suivants qui sont développés dans les II°, III° (voir ci-dessous) et IV° (voir ce Zbl. **67**, 182) parties: analyse de Fourier des fonctions  $u_T(x)$  tronquées, passage à la limite lorsque  $T \rightarrow \infty$ , mécanique statistique des systèmes à un nombre fini de degrés de liberté, fonctions aléatoires stationnaires, champ de vitesse de la turbulence homogène, introduction à la mécanique statistique des fluides. — II. L'A. étudie les spectres d'énergie et les fonctions de corrélation des fonctions qui interviennent pour représenter la vitesse d'un fluide turbulent.  $u(t)$  est une quantité physique fonction du temps. Le chapitre I est consacré à l'étude de la fonction tronquée.

$$u_T(t) = u(t) \text{ si } |t| \leq T, = 0 \text{ si } |t| > T.$$

On suppose que  $u(t)$  est fonction complexe de la variable réelle  $t$  et appartient à  $L^2$  sur  $(-T, T)$ .  $u_T(t)$ ,  $(u_T(t))^2$  désignent les valeurs moyennes de  $u(t)$  et  $|u(t)|^2$  sur  $(-T, T)$ . Si  $u(t)$  est une vitesse,  $|u_T(t)|^2$  est une énergie cinétique moyenne.



On pose

$$\alpha_T(\lambda) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} u_T(t) dt, \text{ d'où } u_T(t) = \frac{T}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N e^{i\lambda t} \alpha_T(\lambda) d\lambda.$$

On rappelle les propriétés élémentaires de  $\alpha_T(\lambda)$ , les théorèmes d'approximation, le théorème de Riemann-Lebesgue. À  $u_T(t)$ , on associe une fonction de corrélation

$$\varrho_T(h) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} u_T(t+h) u_T^*(t) dt \text{ et une densité spectrale } f_T(\lambda) \text{ telle que } \varrho_T(h) =$$

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda h} f_T(\lambda) d\lambda$ , dont on rappelle les propriétés classiques et dont on donne des exemples. Si les  $A_n$  sont les coefficients de Fourier de  $u(t)$  sur  $(-T, T)$ ,  $\alpha_T(\lambda)$  est

la somme de la série  $\left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n A_n}{\lambda T - n\pi} \right) \sin \lambda T$ ,  $\sum |A_n|^2 < \infty$ . Une représentation

analogue s'applique à  $\varrho_T(h)$ . Au chapitre II, on étend les propriétés précédentes à un intervalle infini.  $u(t)$ , définie sur  $-\infty < t < \infty$ , est supposée appartenir à  $L^2$  sur tout intervalle fini, de telle sorte que  $\varrho_T(h)$  ait une limite  $\varrho(h)$  lorsque  $T \rightarrow \infty$ ,  $\varrho(h)$  étant continue pour  $h = 0$ . On dit alors que  $u(t)$  appartient à la classe  $S$ .  $S$  n'est pas un espace vectoriel. Les fonctions presque périodiques continues appartiennent à  $S$  et la propriété remarquable de  $S$  est que l'énergie cinétique moyenne

$\frac{1}{b-a} \int_a^b |u(t)|^2 dt$  associée à  $u(t) \in S$  tend vers une limite non nulle lorsque  $b-a \rightarrow \infty$ . Quelques propriétés élémentaires de  $\varrho(h)$  sont rappelées: lemme de Wiener, théorème de Plancherel-Pólya. On en déduit que, quel que soit  $s$  réel,

$$\varrho(h) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+s}^{T+s} u\left(t + \frac{h}{2}\right) u^*\left(t - \frac{h}{2}\right) dt.$$

Il existe une fonction monotone non décroissante  $S(\lambda)$ , dite spectre d'énergie, telle

que  $\varrho(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda h} dS(\lambda)$ . Le théorème de continuité de P. Lévy entraîne que,

si  $S_T(\lambda)$  est le spectre d'énergie de  $u_T(\lambda)$ ,  $S_T(\lambda)$  tend vers  $S(\lambda)$  lorsque  $T \rightarrow \infty$ , en tout point qui n'est pas point de discontinuité de  $S(\lambda)$ .  $S(\lambda)$  est la somme d'une fonction de sauts et d'une fonction continue, qu'on peut supposer, en vue des applications, absolument continue. Pour que le spectre soit un pur spectre de bande, il

suffit que  $\int_{-\infty}^{\infty} |\varrho(h)| dh < \infty$ . On introduit enfin

$$a(\lambda) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-i\lambda t} u(t) dt$$

et on montre que, si  $\varrho(h) \in L(-\infty, \infty)$ ,  $a(\lambda)$  est nul, et que, d'une façon générale, si  $a(\lambda)$  existe,  $a(\lambda)$  n'est différent de zéro que sur un ensemble au plus dénombrable.

— III. Dans le premier chapitre (numéroté IV par rapport à l'ensemble de la publication), l'A. considère un champ de vecteurs  $u_j$  à  $n$  dimensions dépendant du temps  $t$ . Il lui associe le champ tronqué

$$u_j(t, T) = u_j(t) \text{ si } |t| \leq T, u_j(t, T) = 0 \text{ si } |t| > T.$$

Il définit le transformé de Fourier des  $u_j(t, T)$ , le tenseur de corrélation temporel, le tenseur de densité spectrale et le tenseur spectral. Il montre comment s'opère le passage à la limite lorsque  $T \rightarrow \infty$ . Ces résultats sont repris au chapitre V dans le cas d'un champ de vecteurs fonction des coordonnées d'espace  $x_i$ . Les moyennes relatives au champ tronqué sont alors prises dans un domaine borné  $B$ , qu'on fait ensuite tendre vers l'espace  $X$  entier. Le chapitre VI est consacré

à la mécanique statistique et aux fonctions aléatoires stationnaires. L'A. montre en détail, sur l'exemple de l'oscillateur linéaire, comment on peut associer à un problème de dynamique des familles de trajectoires, puis un mouvement hydrodynamique permanent incompressible, puis une mécanique statistique. A un système quelconque à  $k$  degrés de liberté, dont l'hamiltonien ne dépend pas du temps, on associe un point  $\omega$  qui décrit un ensemble  $\Omega$  dans un espace de phase à  $2k$  dimensions. Les trajectoires possible de  $\omega$  sont des lignes de courant fluide. On passe d'un point  $\omega$ , au temps  $t = 0$ , à sa position  $\omega_t$  au temps  $t$ , par un groupe abélien  $G$  de transformations  $T_t$  à un paramètre, homomorphe au groupe additif  $R$  des nombres réels. On peut enfin convenir d'associer au système une statistique, telle que la probabilité pour que  $\omega \in D$  soit égale à la masse de fluide contenue dans  $D$ . Le théorème ergodique de G. D. Birkhoff donne les conditions sous lesquelles il y a égalité entre les moyennes temporelles, le long d'une trajectoire, et les moyennes statistiques. Ces considérations conduisent naturellement à la notion de fonction aléatoire. Une fonction aléatoire  $F(t, \omega)$  attachée au système dynamique considéré est définie par  $F(t, \omega) = f(T_t \omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , la probabilité pour que  $\omega \in D$  étant prise égale à la masse de fluide contenue dans  $D$ . Mais il est alors possible de s'affranchir de la considération d'un système dynamique sous-jacent. On se donne un espace abstrait  $\Omega$ , un corps de Borel ( $\sigma$ -field)  $S$  dans  $\Omega$ , une mesure  $\mu$  définie sur  $S$  et telle que  $\mu(\Omega) = 1$ .  $F(t, \omega)$  est une fonction réelle, mesurable par rapport à  $\omega$ . Si  $E \in S$ , on a par définition

$$\text{Prob} [\omega \in E] = \mu(E), \quad \text{Prob} [F(t, \omega) < \xi] = \mu \{\omega : F(t, \omega) < \xi\}.$$

On peut attacher ensuite à la fonction aléatoire  $F(t, \omega)$  un fluide incompressible remplissant  $\Omega$ , en introduisant un groupe abélien  $T_t$  à un paramètre  $t$  conservant la mesure. Au lieu du groupe additif  $R$  des nombres réels, il est intéressant d'introduire un groupe abstrait  $G$ , et de remplacer le groupe  $T_t$ , homomorphe à  $R$ , par un groupe  $G'$  de transformations homomorphe à  $G$ . On obtient ainsi une définition très générale de la notion de fonction aléatoire. Le cas de fonctions aléatoires complexes appartenant à  $L^2(\Omega)$  est spécialement utile dans les applications, et permet de définir la moyenne et la covariance d'une fonction aléatoire.

J. Bass.

● Frankl, F. I. and E. A. Karpovich: Gas dynamics of thin bodies. Translated by M. D. Friedman. New York: Interscience Publishers Inc. 1954. VIII, 175 p., 1 table, 33 illus. \$ 5,75.

Dieses Buch, das 1948 in russischer Sprache erschienen ist, behandelt die linearisierte Theorie kleiner Störungen der Unter- und Überschallströmungen. Die Theorie kleiner Störungen, die sich in der Hochgeschwindigkeitsaerodynamik so ausgezeichnet bewährt hat, wird in dem Buch einheitlich nach der Singularitätenmethode behandelt, wodurch sich die Ableitungen besonders übersichtlich gestalten. Das Werk ist in fünf Hauptabschnitte unterteilt. In Kapitel I wird die grundlegende Differentialgleichung hergeleitet und eine Lösungsmethode beschrieben. Kapitel II befaßt sich mit der Strömung um Rotationskörper. Kapitel III behandelt die stationäre Strömung um Flügel unendlicher und endlicher Spannweite. Außerdem bringt dieses Kapitel eine Gegenüberstellung der Strömungen um Rotationskörper und Tragflügel. Kapitel IV befaßt sich mit instationären Strömungen und mit der Anwendung der Theorie auf den Überschallpropeller. Das Buch schließt mit einem Kapitel über konische Strömungen und verallgemeinerte konische Strömungen. Die linearisierte Theorie der Hochgeschwindigkeitsaerodynamik ist heute noch keineswegs abgeschlossen, und es sind seit dem Erscheinen des russischen Originaltextes viele neue Erkenntnisse gewonnen worden, die in dem Buch noch keinen Niederschlag gefunden haben. Beispielsweise ist die schallnahe Strömung um schlanke Körper überhaupt nicht berücksichtigt. Außerdem sind in neuerer Zeit mehrere englischsprachige Lehrbücher von berufenen Autoren erschienen, die dasselbe Thema be-

handeln. Trotzdem wird man nicht fehlgehen in der Annahme, daß sich das Buch von Frankl und Karpovich einen bleibenden Platz in der Literatur erhalten wird.

*E. G. Feindt.*

**Bers, Lipman:** Results and conjectures in the mathematical theory of subsonic and transonic gas flows. Commun. pure appl. Math. 7, 79-104 (1954).

Ein Bericht über neuere mathematische Fortschritte auf dem Gebiete des nicht-linearen Randwertproblems der stationären, ebenen, reibungslosen, kompressiblen Potentialströmungen idealer Gase unter Beschränkung auf stoßfreie Strömungen. Während die Theorie der Unterschallströmungen um Profile auf einer gründlich erforschten und weitgehend geklärten mathematischen Theorie fundiert ist, ist man im Bereich trans-sonischer Strömungen noch auf weiten Strecken auf Annahmen und Vermutungen angewiesen. Es liegt dem Verf. bei seiner Darstellung an einer Würdigung des gegenwärtigen Standes unseres Wissens weniger vom Standpunkt des aerodynamischen Nutzens als von jenem des mathematischen Interesses an den zugrunde liegenden Problemen, insbesondere an den offenen Fragen der Existenz und der Einzigkeit stoßfreier Lösungen im trans-sonischen Bereich im Lichte der Frage nach der korrekten Formulierung des Randwertproblems im Sinne von Hadamard. Ausführliches Literaturverzeichnis.

*H. Görtler.*

**Landahl, Mårten T.:** The flow around oscillating low aspect ratio wings at transonic speeds. Kungl. Tekn. Högskol. Inst. Flygtekn., Techn. Notes 40, 27 S. (1954).

Für einen Flügel der Tiefe „1“ bei einer Anströmgeschwindigkeit  $U = 1$  wird unter Voraussetzung eines mittleren Anstellwinkels  $\alpha = 0$  die partielle Differentialgleichung des Störpotentials  $\Phi$  eines schwingenden Flügels kleiner Streckung aufgestellt. Nach Aufspaltung in einen stationären und in einen instationären Anteil,  $\Phi_1$  bzw.  $\Phi_2$ , gelingt unter der Voraussetzung kleiner Störgeschwindigkeiten sowie kleiner Profildicken und Flügelstreckungen die Überführung der Ausgangsgleichung in eine verhältnismäßig einfache lineare Gleichung. Weitere Vereinfachung wird durch Spezialisierung auf bestimmte Sonderfälle erreicht, von denen der Fall mit Schallanströmung ausführlich behandelt wird. Entsprechend dem Ansatz  $\Phi_2 = q(x, y, z) e^{i\omega t}$  für das instationäre Störpotential ergibt die weitere Durchführung eine Integralgleichung für  $q$ , deren Lösung nach der Iterationsmethode von Adams und Sears  $q = q^{(1)} + q^{(2)} + q^{(3)}$  lautet. Die weitere Aufgabe besteht jetzt darin, die einzelnen Näherungen für  $q$  zu bestimmen und daraus die Druckverteilung und die Kräfte und Momente zu ermitteln. Die Beispielrechnungen für den schwingenden Deltaflügel zeigen zunächst, daß bei sehr kleinen Flügelstreckungen  $A \leq 0,5$  die erste Näherung recht gute Ergebnisse bis zu hohen Werten der dimensionslosen Frequenz liefert und kaum einer Verbesserung durch höhere Näherungen bedarf. Jedoch ist bei größeren Streckungen z. B.  $A = 2$  die Berücksichtigung der zweiten und teilweise der dritten Näherung erforderlich. In diesen Fällen würde die erste Näherung, die der Theorie kleiner Streckung (Slender-Body-Theory) entspricht, falsche Ergebnisse liefern. Die neue Theorie stellt danach eine Verbesserung gegenüber der vom gleichen Verf. gemeinsam mit H. Merbt veröffentlichten Arbeit aus dem Jahr 1953 [Kungl. Tekn. Högskol., Inst. Flygtekn., Techn. Notes 30, 205] dar.

*E. Truckenbrodt.*

**Clarkson, M. H.:** A second-order theory for three-dimensional wings in supersonic flow. Quart. J. Mech. appl. Math. 7, 203-221 (1954).

Verf. untersucht Strömungen um Tragflügel, deren Ober- und Unterseite vollkommen im Überschallbereich liegen, mittels der von Lighthill entwickelten Methode. Die Methode wird zur Berechnung der zweiten Näherung der Strömung um einen Trapezflügel benutzt.

*H. Wendt.*

**Khare, R. C.:** The expansion of a gas-cloud into a vacuum. Z. Astrophys. 33, 251-266 (1954).



Die Lösung des Problems der eindimensionalen Bewegung eines idealen Gases, welches der adiabatischen Zustandsgleichung  $p = k \rho^\gamma$  gehorcht, läuft auf die Ermittlung einer Hilfsfunktion  $w(r, s)$  hinaus, die der Differentialgleichung

$$w_{rs} + n(r+s)^{-1}(w_r + w_s) = 0$$

und gewissen Randbedingungen genügt, welche durch den Anfangszustand des Gases gegeben sind.  $r$  und  $s$  sind die Riemannschen Variablen  $r = c/(\gamma - 1) + u/2$ ,  $s = c/(\gamma - 1) - u/2$  ( $c$  = örtliche Schallgeschwindigkeit,  $u$  = Strömungsgeschwindigkeit), und  $n = \frac{1}{2}(3 - \gamma)/(\gamma - 1)$ . Für ganze  $n$  wird die partielle Differentialgleichung gelöst durch  $w = \frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}} \frac{f(r)}{(r+s)^n} + \frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}} \frac{g(s)}{(r+s)^n}$ , wo  $f(r)$ ,  $g(s)$  willkürliche Funktionen. Für nicht-ganze  $n$  hat E. T. Copson (dies. Zbl. 50, 191) die Lösung durch eine komplexe Integraldarstellung gegeben. Verf. zeigt, daß  $w$  auch mit Hilfe von hypergeometrischen Reihen dargestellt werden kann. Diese Darstellung hat den Vorzug, daß sie sich für ganze  $n$  von selbst auf die obige Form reduziert.

A. Schoch.

**Copson, E. T.:** The reflexion of sound waves of finite amplitude by a rigid wall. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 222, 254—261 (1954).

Ein Gas mit der Druck-Dichte-Zustandsgleichung  $p = A \rho^{5/3}$  ruht zur Zeit  $t = 0$  und hat rechts der starren Wand  $x = 0$  die Dichteverteilung  $\rho \sim x^{3/2}$ . Es entsteht eine Welle mit Reflexion an der Wand. Dieses eindimensionale Ausbreitungsproblem wird streng gelöst, wobei die Riemannschen Invarianten  $r = \frac{1}{2}(3c + u)$ ,  $s = \frac{1}{2}(3c - u)$  ( $c = dp/d\rho$  = Schallgeschwindigkeit,  $u$  = Strömungsgeschwindigkeit) als Variable verwendet werden. Wäre die starre Wand nicht vorhanden, dann handelte es sich um die Ausbreitung der Gasmasse im Raum  $x > 0$  in das Vakuum  $x < 0$ . Die strenge Lösung des letzteren Problems wurde vom Verf. früher gegeben (dies. Zbl. 50, 191). Es zeigt sich, daß die Erfüllung der Randbedingungen des Problems mit Reflexion die Einführung eines Verdichtungsstoßes fordert, womit aber auch dieses Problem streng lösbar wird.

A. Schoch.

**Gerjuoy, E. and David S. Saxon:** Variational principles for the acoustic field. Phys. Review, II. Ser. 94, 1445—1458 (1954).

Für die Streuung einer Schallwelle an einer Inhomogenität des Mediums wird ein Variationsprinzip bewiesen, von einem Typus, wie er vor allem von J. Schwinger vor mehreren Jahren für die Behandlung von Beugungs- und Streuproblemen eingeführt worden war. Ausgehend von der Formulierung des Streuproblems als Integralgleichungsproblem (mit Hilfe der Greenschen Funktion des ungestörten, unbegrenzten Mediums) läßt sich die Amplitude  $A(\vec{n}, \vec{n}_0)$  der Streuwelle in großem Abstand vom Streuzentrum, in Richtung des Einheitsvektors  $\vec{n}$  ( $\vec{n}_0$  = Richtung der einfallenden Welle) als ein gewisses Funktional (in Gestalt von Integralausdrücken) der Wellenfeldfunktionen im Gebiet der streuenden Inhomogenität darstellen. Dieses Funktional ist stationär gegenüber willkürlichen Variationen der Feldfunktionen. Eine Abart dieses Variationsprinzips wird außerdem noch für den Fall eines kugelsymmetrischen Streuers und die Zerlegung des Wellenfeldes nach Kugelfunktionen gegeben. Die Streuung ist dann durch die Phasenverschiebungen  $\delta_l$  zwischen den einlaufenden und den auslaufenden Kugelwellen der Ordnung  $l$  charakterisiert, und tang  $\delta_l$  kann durch ein Funktional dargestellt werden, das gegenüber Variationen der Feldfunktionen invariant ist.

A. Schoch.

**Stoker, J. J.:** Some remarks on radiation conditions. Proc. Sympos. appl. Math. 5, 97—102 (1954).

Es wird auseinandergesetzt, daß die Forderung der Ausstrahlungsbedingung bei Wellenausbreitungsproblemen nur deshalb notwendig ist, weil von vornherein die zeitunabhängige Schwingungsgleichung zugrunde gelegt wird. Geht man jedoch von der Wellengleichung aus, und betrachtet als Anfangswertproblem eine etwa

zur Zeit  $t = 0$  nach der Zeitfunktion  $e^{i\omega t}$  beginnende Erregung, so erfüllt die Lösung automatisch die Ausstrahlungsbedingung, wenn man erst den Grenzübergang  $t \rightarrow \infty$  macht und dann den Aufpunkt ins Unendliche rücken läßt. Am Beispiel der Oberflächenwellen im unendlich ausgedehnten Ozean wird die Situation auseinandergesetzt; hier zeigt sich insbesondere, daß sich die zeitfreie Schwingungsgleichung über das Anfangswertproblem sogar einfacher lösen läßt als direkt.

*J. Meixner.*

**Položij, G. N.: Variationssätze der ebenen und axialsymmetrischen Filtration in homogenen und inhomogenen Medien. Die Methode der Gebietsinvarianz.** Ukrain. mat. Žurn. 6, 333—348 (1954) [Russisch].

Der von dem Verf. aufgestellte Erhaltungssatz der Gebiete bei manchen partiellen elliptischen Differentialgleichungssystemen (dies. Zbl. 56, 304) wird auf die Gleichungen der ebenen und axialsymmetrischen Filtration in homogenen und inhomogenen Medien angewandt, indem manche qualitativen Schlüsse über den Einfluß der Änderung der Potentiallinie am Rande des Filtrationsgebietes auf die Integralgrundcharakteristiken der Filtration, wie z. B. der Druck, die Geschwindigkeit und die Filtrationsleistung, gezogen werden. Dieser Erhaltungssatz erlaubt auch die von dem Verf. bearbeitete Methode der sogenannten Majorantengebiete (dies. Zbl. 53, 150) anzuwenden, um die Abschätzungen von unten und oben der Integralgrundcharakteristiken der Filtration anzugeben. Die Methode wird an zwei Beispielen illustriert.

*S. Drobot.*

**Sokolov, Ju. D.: Die druckfreie Strömung des Grundwassers zu einer Senke bei Vorhandensein von Infiltration.** Ukrain. nat. Žurn. 6, 58—80 (1954) [Russisch].

Die bekannte Boussinesqsche Gleichung für die axialsymmetrische Aufgabe der Filtration wird im Falle der radialen, druckfreien Strömung des Grundwassers zu einer Senke mit Berücksichtigung der Infiltration annäherungsweise gelöst. Die Lösungsmethode ist die sogenannte sukzessive Änderung der stationären Zustände und besteht aus zwei Schritten: Die Verbreitung der Dispersionszone, und die Erschöpfung der Schicht. Die hergeleiteten Ergebnisse sind ziemlich kompliziert, deshalb werden auch weitere Vereinfachungen angenommen.

*S. Drobot.*

**Sokolov, Ju. D.: Zur Theorie der ebenen, instationären Filtration des Grundwassers.** Ukrain. mat. Žurn. 6, 218—232 (1954) [Russisch].

Die Boussinesqsche Gleichung für die ebene instationäre einseitige Strömung des Grundwassers mit Berücksichtigung der Infiltration von oben wird unter gewissem Ansatz über den Mittelwert der zeitlichen Ableitung des Wasserzustandes (die „Mittelwertmethode“) annäherungsweise gelöst, und die ziemlich komplizierten Ergebnisse werden mit denen mit der Methode der sukzessiven Änderung der stationären Zustände (s. voransteh. Referat) gewonnenen verglichen.

*S. Drobot.*

**Sokolov, Ju. D.: Über eine axialsymmetrische Aufgabe aus der Theorie der instationären Bewegungen des Grundwassers.** Ukrain. mat. Žurn. 7, 101—111 (1955) [Russisch].

Die im vorletzten Referat besprochenen angenäherten Lösungen werden mit denen mit der „Mittelwertmethode“ (s. obiges Referat) gewonnenen auch angenäherten, und nicht weniger komplizierten Lösungen verglichen.

*S. Drobot.*

● **Nahrgang, Günther: Zur Theorie des vollkommenen und unvollkommenen Brunnens.** (Aus dem Institut für Hydromechanik, Stauanlagen und Wasserversorgung der T. H. Karlsruhe.) Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1954. V, 43 S. m. 23 Abb., geh. 7,50 DM.

Verf. untersucht Fragen des Problems eines rotationssymmetrischen vertikalen Brunnens mit freier Oberfläche bei horizontaler wasserdurchlässiger Schicht in makroskopischer Betrachtung, indem die Strömung des Grundwassers bei Gültigkeit des Darcyschen Filtergesetzes im Großen gesehen als Potentialströmung behandelt wird. Da Verf. fürchtet, daß die analytische Lösung des Problems, die auf Zylinder-

funktionen führt, zu kompliziert sein könnte, um für einen Ingenieur noch brauchbar zu sein, wählt er eine graphische Methode und stellt für 4 verschiedene Fälle das Strömungsnetz (mit Äquipotentiallinien und Stromlinien) sowie das Isotachennetz (Kurven gleicher Geschwindigkeit) dar. Diese 4 Fälle betreffen je 2 Fälle eines unvollkommenen und eines vollkommenen Brunnens, nämlich je mit nicht völliger und mit völliger Absenkung des Wassers aus dem Brunnenschacht. (Vollkommener Brunnen ein solcher, dessen Brunnenschacht bis zur Tiefe der wasserundurchlässigen Schicht führt; unvollkommener Brunnen, wenn die Sohle des Brunnenschachtes höher liegt als die wasserundurchlässige Schicht). Die Ergebnisse für den vollkommenen Brunnen werden zum Teil mit Versuchen von Ehrenberger verglichen, wobei brauchbare Übereinstimmung festgestellt wird. Die Anwendbarkeit des Darcyschen Filtergesetzes scheint auch für diese Sickerströmung gegeben zu sein. Nach dem Verf. mündet die freie Oberfläche tangential in den Brunnenschacht (in positiver Höhe über der Sohle, sogenannte Sickerstrecke). Verf. ist — wohl mit Recht — der Meinung, daß insbesondere beim unvollkommenen Brunnen weitere Untersuchungen erforderlich sind. Die Bestimmung der geometrischen Form der freien Oberfläche sowie sonstige Einzelheiten des Strömungs- und Geschwindigkeitsfeldes bleiben auch beim vollkommenen Brunnen offen. Bei den allgemeinen theoretischen Überlegungen, die Verf. eingangs durchführt, würde der Mathematiker — bei aller Rücksichtnahme auf den Anwendungszweck — größere Schärfe der Beweisführung vorziehen, insbesondere bei einigen indirekten Beweisen [vgl. z. B. Seite 12.  $E$  ist ein Punkt am Rande der Schachtsohle. In bezug auf die Geschwindigkeitskomponente  $v_z$  in Richtung der Brunnen- (Rotations-) Achse liest man: „Da im Punkt  $E$  sowohl  $v_z = 0$  als auch  $v_z \neq 0$  ist, muß er eine Quelle von  $v_z$  sein. Dann ist am Punkt  $E$   $v_r = \infty$ . Gleichzeitig ist  $v_r = 0, \dots$ “]. [Wenn man bei derartigen Strömungen mit scharfen Kanten — also Unstetigkeiten im Verlauf einer geometrischen Tangente — rechnet, ist zu beachten, daß dann auch Geschwindigkeitsfunktionen der Strömung, z. B. ihre Komponenten  $v_z$  und  $v_r$ , in den Knickpunkten, z. B. in  $E$ , unstetig sein können.] Auch bei einigen Literaturangaben wäre eine größere Genauigkeit erwünscht gewesen, z. B. Angabe von Seitenzahlen anstatt der Heftnummer. Insgesamt vermittelt die kleine Schrift — die gemäß dem Vorwort eine etwas gekürzte Fassung der Dissertation des Verf. „Beitrag zur Theorie des vollkommenen und unvollkommenen Brunnens“ (Karlsruhe 1951) ist — dem Fachmann interessante Anhaltspunkte für den Verlauf der Filterströmung eines rotationssymmetrischen Brunnens.

*O. Emersleben.*

## **Wärmelehre:**

● Planck, Max: Vorlesungen über Thermodynamik. 10. Aufl. durchges. u. erw. von M. v. Laue. Berlin: Walter de Gruyter Verlag 1954. XIII. 306, 5. Fig.

This edition follows the 9th edition (1930), and is substantially unaltered, except for the addition of sections on the principle associated with the names of Le Chatelier and F. Braun. In the preface to this edition, Max von Laue remarks that the book will not easily become out of date, and this is great praise indeed for a book whose first edition appeared in 1897 and has dominated the teaching of thermodynamics for many decades. However, the appearance of present edition furnishes a good reason to look at the whole work again from a modern point of view and indicate, without any disrespect for its illustrious author, where it appears to show signs of its remarkable age. There is no mention of adiabatic demagnetisation or of the principle of the unattainability of the absolute zero. There is no systematic discussion of transformations which exist between alternative sets of independent thermodynamic variables (the so-called Legendre transformations). Lying on the fringe of the subject, but certainly still within the framework of macroscopic thermodynamics, are



the relativity transformations of thermodynamic quantities and Carathéodory's principle. Both these topics are omitted, the latter for reasons explained by the author in his preface to the eighth edition. There is also the purposely adopted restriction not to include in the book any discussion of statistical interpretations of thermodynamic quantities. In spite of this framework, which to present days physicists may seem somewhat narrow, this book will undoubtedly remain a classic of thermodynamics. That the absence of a current edition of Planck's „Wärme-strahlung“ is a serious gap in the literature, should also be pointed out.

*P. T. Landsberg.*

● Zeise, H.: *Thermodynamik auf den Grundlagen der Quantentheorie, Quanten-statistik und Spektroskopie. Dritter Band: Ergebnisse in tabellarischer und graphischer Form. 1. Hälfte: Tabellen.* Leipzig: S. Hirzel Verlag 1954. XL, 311 S. Gln. DM 20, —.

Wie Verf. eingangs darlegt, hat er sich entgegen seiner anfänglichen Absicht entschlossen, zunächst den letzten der geplanten drei Bände herauszubringen, um die Ergebnisse seiner Rechnungen schneller zu veröffentlichen. Da der zweite Band noch fehlte, wurde dem dritten eine ausführliche Einführung mitgegeben. — Der Benutzer hat auf diese Weise den großen Vorteil, daß er im gleichen Bande mit den Tabellen auch alle Voraussetzungen erläutert findet, die den berechneten Werten zugrunde liegen, so daß er sich bei Benutzung etwa einer Gleichgewichtskonstanten eine Vorstellung machen wird, ob das betreffende Gleichgewicht sich wirklich einstellt, ob es sich nur verzögert bildet (Relaxation) oder ob ein früheres Gleichgewicht eingefroren sein wird. — Auf die zusammenfassende Einführung folgen sechs Kapitel, die meisten davon noch mit einer besonderen ausführlichen Einleitung.: 1. Molare spezifische Wärme, 2. Molare thermische Enthalpie, 3. Molare Entropie, 4. Molare freie Enthalpiefunktion, 5. Thermodynamische Funktionen für einige kondensierte Substanzen, 6. Gasgleichgewichte. — Ein Anhang bringt darauf Hilfstabellen zur Berechnung der Anteile für Schwingungen und gehemmte innere Rotation. Es folgen 72 Seiten Nachträge, den Abschluß bildet ein Namen- und ein Sachverzeichnis. — Der zweite Teil des dritten Bandes sollte graphische Darstellungen, zahlreiche einzelne Werte und die Literaturangaben enthalten, auf die in diesem Teilbande durch Nummern verwiesen ist. So wünschenswert diese Ergänzung sein wird, so sehr bildet doch schon der vorliegende erste Teil durch die Reichhaltigkeit, Vollständigkeit und Ausdehnung der Tabellen ein wertvolles Nachschlagewerk, in dem der (kurz vor Vollendung dieses Bandes verstorbene) Verf. die bis 1953 erschienene Literatur kritisch verwertet hat, so daß die Tabellen einen hohen Grad von Zuverlässigkeit bieten.

*U. T. Bödeqvadt.*

Klimontovič, Ju. L.: *Die zweite Quantelung im Phasenraum.* Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 96, 43—46 (1954) [Russisch].

General equations are developed for description of a system of interacting particles without recourse to probability concepts. Approximate solutions of the integral equations obtained are briefly discussed.

*P. T. Landsberg.*

Wundheiler, Alexander W.: *Irreversible systems, entropy and Riemann spaces.* Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 844—848 (1954).

In Part 1 of this paper the author develops certain fundamental thermodynamic concepts in a very brief but (in the reviewer's opinion) artificial and implausible manner, using the quantity frigor (reciprocal temperature). In Part 2 the concept of a reversible change is generalized: a (possibly discontinuous) change  $a b$  of a system from state  $a$  to state  $b$  (they may be nonequilibrium states) is „regular“ if both  $a b$  and  $b a$  are producible, so that the residual complementary changes  $I$  and  $I'$  occur in reservoirs only,  $I$  and  $I'$  being independent of each other. The lower bound of the entropy change  $\sigma(I)$  in  $I$  is called the „coentropy“ change,  $\sigma a b$ , in  $a b$ . Let

$$2 R a b = \sigma b a + \sigma a b, \quad 2 S a b = \sigma a b - \sigma a b.$$

Properties of the degradation  $Rab$  and the pre-entropy  $Sab$  are developed. The Clausius entropy theorem is proved without the usual restrictions, and a condition is given for the entropy of a system to exist. In Part 3 these ideas are further developed for infinitesimal displacements, and the coefficients in the quadratic form  $dR^2$  are identified. Conditions are given under which the usual thermodynamic quantities, such as internal energy, may be defined, and the significance of Onsager's coefficients is clarified.

*C. C. Torrance (M. R. 16, 778).*

**Prigogine, I. et H. C. Mel:** Sur la stabilité thermodynamique. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **40**, 588—599 (1954).

Wenn ein thermodynamisches Potential existiert, dann folgt aus der thermodynamischen Stabilität und der Positivität der Entropieproduktion allgemein auch die kinetische Stabilität des betrachteten Systems, d. h. die Annäherung an den Gleichgewichtszustand im Lauf der Zeit. Dies gilt jedoch nicht notwendig, falls es kein thermodynamisches Potential gibt. Eine hinreichende Bedingung für die kinetische Stabilität ist jedoch dann das Bestehen der Onsagerschen Reziprozitätsbeziehungen.

*J. Meixner.*

**Domenicali, Charles A.:** Stationary temperature distribution in an electrically heated conductor. J. appl. Phys. **25**, 1310—1311 (1954).

Für die stationäre Temperaturverteilung in einem elektrisch erwärmten Leiter wurde von Diesselhorst [Ann. der Physik **1**, 312—385 (1900)] eine Differentialgleichung angegeben, die neben dem Temperaturgradienten noch den Gradienten des elektrischen Potentials enthält. Eine konsequente Anwendung der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse läßt fünf zusätzliche Terme auftreten, in denen auch die thermoelektrischen Eigenschaften des Materials zum Ausdruck kommen.

*J. Meixner.*

**Vlieger, J. and S. R. de Groot:** On the theory of reciprocal relations between irreversible processes. Statistical foundations of thermodynamical fluctuation theory in moving media. Physica **20**, 372—382 (1954).

Der Beweis der Onsagerschen Reziprozitätsbeziehungen in der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse wird auf den Fall verallgemeinert, daß die Zustandsvariablen die Geschwindigkeiten der Massenelemente mit umfassen. Es genügt dazu, Verteilungsfunktionen für die Zustandsvariablen in einer und in zwei Zellen zu betrachten.

*J. Meixner.*

**Kuznecov, P. I., R. L. Stratonovič und V. I. Tichonov:** Korrelationsfunktionen in der Theorie der Brownschen Bewegung. Verallgemeinerung der Fokker-Planckschen Gleichung. Žurn. eksper. teor. Fiz. **26**, 189—207 (1954) [Russisch].

Die Beschreibung der Partikelbewegung in der Brownschen Bewegung wird hier auf dem Wege der Integration von  $\dot{X} = \xi(t)$  behandelt, wobei  $\xi(t)$  einen stationären zufälligen Prozeß darstellt, der durch seine in  $t_1, \dots, t_s$  symmetrischen Korrelationsfunktionen  $k_{s,\xi}(t_1, \dots, t_s) = E(\xi(t_1) \cdots \xi(t_s))$  beschrieben sei; wegen der Stationarität genügt dafür auch

$$k_{s,\xi}^*(t_1, \dots, t_{s-1}) = k_{s,\xi}(t_1, \dots, t_{s-1}, 0).$$

Unter Benutzung auch der Fourier-Stieltjesschen Transformation, und unter Voraussetzungen wie Differenzierbarkeit der  $k_{s,\xi}$ -Funktionen sowie Existenz von gewissen ihrer Momenten wird gezeigt:

$$E(X_t - X_0)^2 \approx (t - t_0)^2 k_2^*(0)$$

falls

$$|t - t_0| \ll (k_2^*(0)/k_2^{*''}(0))^{1/2} = \tau^*,$$

$$E(X_t - X_0)^2 \approx (t - t_0) K_2 \quad \text{falls} \quad |t - t_0| \gg \tau^*$$

(beim klassischen Wienschen Prozeß gilt ja  $E(X_t - X_0)^2 = (t - t_0) D$ ). Dabei sind die Strukturzahlen  $K_s$  durch

$$K_s = s(s-1) \int_0^\infty d\sigma \int_0^\sigma \cdots \int_0^\sigma k_s^*(\sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_{s-2}) d\sigma_1 \cdots d\sigma_{s-2}$$

definiert. Für Zeitabstände  $\tau \gg$  eine gewisse „Korrelationszeit“ ist der  $X$ -Prozeß näherungsweise ein Prozeß mit unabhängigen Zuwächsen; die in der kanonischen Darstellung für die Fourier-Transformierte  $f(u, t) = E(\exp i u X_t)$

$$\log f(u, t) = i t k_1 u + t \int \left( e^{i u x} - 1 - i u x \right) x^{-2} dG(x)$$

der auftretenden unbeschränkt zerlegbaren Verteilungen auftretende monotone Funktion  $G(x)$  steht mit den Strukturzahlen in der Beziehung  $\int x^{s-2} dG(x) = K_s$  und es gilt  $k_{s,x}(t_1, \dots, t_s) = K_s \max(t_1, \dots, t_s)$  sowie  $k_s^*(t_1, \dots, t_{s-1}) = K_s \delta(t_1) \cdots \delta(t_{s-1})$ . In Verallgemeinerung der Fokker-Planckschen Differentialgleichung gilt für die

Wahrscheinlichkeitsdichte  $\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} K_s \frac{\partial^s w}{\partial x^s}$ , deren Lösung für Zeitabstände

$\Delta t$ , die groß gegen ein gewisses  $\tau^{**}$  und bei  $x$ -Abständen  $\gg \sqrt{K_2 \cdot 1t}$  durch die der Fokker-Planckschen Gleichung angenähert werden können. Die weiteren Untersuchungen betreffen den räumlich inhomogenen Fall mit  $\dot{X} = \varphi(X) + \xi(t)$  und mehrdimensionale Verallgemeinerung.

D. Morgenstern.

**Grün, F. und K.-F. Moppert:** Zur Behandlung der Brownschen Bewegung mit Hilfe der Langevin-Gleichung. Helvet. phys. Acta 27, 417–426 (1954).

Es wird gezeigt, daß sich für eine Lagekoordinate und ihre zeitliche Ableitung die statistischen Größen (Mittelwert, Streuung usw.) als Zeitfunktionen dann besonders einfach gewinnen lassen, wenn 1. die Lagekoordinate einer Langevinschen Differentialgleichung genügt (zeitlich rasch veränderlicher und unregelmäßig schwankender Kraftanteil in der Bewegungsgleichung); 2. die formale Lösung der Langevingleichung als Faltungsintegral geschrieben werden kann. Neben der eleganten Behandlung eines Beispiels von Chandrasekhar kann jetzt der Fall gelöst werden, daß ein elastisch gelagertes System, das Schwankungserscheinungen zeigt, mit elastischer Nachwirkung behaftet ist. Hierbei ist die Langevingleichung eine Integro-differentialgleichung.

G. U. Schubert.

**Davis, R. C.:** The detectability of random signals in the presence of noise. Transactions of the IRE, Professional group on information theory 3, 52–62 (1945).

**Deutsch, Ralph:** Detection of modulated noise-like signals. Transaction of the IRE, Professional group on information theory 3, 106–122 (1954).

Modulation d'amplitude; détection linéaire. Calcul de la fonction de corrélation. L'A. donne quelques cas, où un signal faible peut être effectivement détecté.

B. Mandelbrot.

**Gold, B. and G. O. Young:** The response of linear systems to non-Gaussian noise. Transactions of the IRE, Professional group on information theory 3, 63–67 (1954).

**Mallinckrodt, A. J. and T. E. Sollenberger:** Optimum pulse-time determination. Transaction of the IRE, Professional group on information theory 3, 151–159 (1954).

Position exacte d'une impulsion, dans un bruit faible.

B. Mandelbrot.

• **Ingersoll, Leonard R., Otto J. Zobel and Alfred C. Ingersoll:** Heat conduction: With engineering, geological and other applications. Revised ed. Madison, Wis.: University of Wisconsin Press 1954. XIII, 325 p. \$ 5.—

Das Buch hat in dieser erweiterten Neuauflage (zur vorigen Ausgabe s. dies. Zbl. 30, 382) seine alten Vorzüge erhalten und verstärkt. Sie bestehen nicht im Aufzeigen neuer Berechnungsweisen, sondern in der klaren Darlegung der verschiedenen Methoden – von denen allerdings die Laplace-Transformation ausgeschlossen ist – und besonders in dem Reichtum an Anwendungsmöglichkeiten, der im Text und in den zahlreichen Aufgaben gezeigt wird. Die einzelnen Kapitel behandeln die Fouriersche Gleichung, Dauerzustände in einer und mehreren Dimensionen, periodischen linearen Wärmefluß, Fourierreihen, linearen Wärmefluß (Voll- und Halbraum, Quellen, Stab), Wärmefluß in mehreren Richtungen (Kugel, Quellen, Zylinder, andere



Körperformen), Eisbildung, verschiedene andere Methoden, Messung von Stoffwerten. Neu hinzugekommen sind ein Kapitel über Erdwärmetauscher (für Wärmepumpen) und eines über Trocknungsvorgänge. Es folgen Tafeln über Stoffwerte und Wärmeleitungs-Funktionen sowie ein Literaturverzeichnis mit 200 Nummern. Zur Einführung in das Gebiet wie auch zur Übung der Fähigkeit, die Ergebnisse der Theorie anzuwenden, ist dieses Buch sehr zu empfehlen. *U. T. Bödewadt.*

**Baratta, Maria Antonietta:** *Sopra un problema di ripartizione del calore.* Rivista Mat. Univ. Parma 5, 197—207 (1954).

Si risolve il problema della ripartizione del calore generato, ad es. per attrito, da una distribuzione continua di sorgenti di calore sulla superficie comune ad un cilindro rotondo indefinito di raggio  $r_1$  ( $S_1$ ) e ad un manicotto cilindrico coassiale di raggi  $r_1$  ed  $r_2$  ( $S_2$ ). Supposto assegnata la temperatura di  $S_1$  ed  $S_2$  all'istante  $t = 0$  quale funzione delle due coordinate cilindriche  $r$  e  $\vartheta$  e la temperatura della distribuzione di sorgenti quale funzione di  $\vartheta$  e di  $t$ , con classici procedimenti, si scrivono le espressioni per serie delle temperature in  $S_1$  e in  $S_2$  quali funzioni di  $r, \vartheta, t$ . *G. Sestini.*

**Baratta, Maria Antonietta:** *Sopra un problema non lineare di ripartizione del calore.* Rivista Mat. Univ. Parma 5, 363—371 (1954).

Siano  $S_1$  ed  $S_2$  due mezzi seminfiniti, omogenei, termicamente isotropi di caratteristiche fisiche diverse, inizialmente a temperatura nulla, occupanti due semispazi aventi a comune il piano origine, assunto come piano  $x = 0$ . Sul piano  $x = 0$  e per  $t > 0$  esiste una distribuzione di sorgenti la cui temperatura è funzione continua e limitata del tempo. Supposto che le temperature  $U_i$  di  $S_i$  ( $i = 1, 2$ ) siano funzioni soltanto di  $t$  e della distanza  $x$  dal piano  $x = 0$  e che nel contatto dei due mezzi si generi una resistenza termica, funzione non lineare del salto termico  $\Phi(t) = U_1(0, t) - U_2(0, t)$ , si risolve il problema della ripartizione del calore in  $S_i$  riconducendolo ad altro noto, non appena si conosca la soluzione della seguente equazione integrale, non lineare, singolare di Volterra di 2<sup>a</sup> specie nell'incognito salto termico

per  $x = 0$ :  $\Phi(t) = \mu(t) + c \int_0^t \frac{G(\Phi(\tau))}{\sqrt{t-\tau}} d\tau$ , essendo  $c$  costante,  $\mu(t)$  funzione nota e  $G(y)$  funzione continua, limitata, lipschitziana e tale che  $G(0) = 0$  e  $G(y) \geq 0$  per  $y \geq 0$ . *G. Sestini.*

### Elektrodynamik. Optik:

**Buneman, O.:** Self-consistent electrodynamics. Proc. Cambridge philos. Soc. 50, 77—97 (1954).

**Infeld, L.:** Über die Entwicklung der klassischen Elektrodynamik in der letzten Zeit. Material phys. Konferenz in Spala, 1.—14. Sept. 1952, 291—301 (1954) [Polnisch].

Die Gründe für das Versagen der Maxwell-Lorentzschen Elektronentheorie werden erläutert mit anschließender Einführung in die neueren Verbesserungsvorschläge. *G. Süßmann.*

**Plebański, J.:** Ergänzungen zum Vortrag von L. Infeld über die potentialfreie Elektrodynamik. Material phys. Konferenz in Spala, 1.—14. Sept. 1952, 302—304 (1954) [Polnisch].

Verf. erläutert die von ihm und Infeld entwickelte klassische Elektrodynamik (vgl. z. B. Plebański, dies. Zbl. 51, 190). *G. Süßmann.*

**Suffczyński, M.:** Die Hamiltonfunktion in der potentialfrei formulierten Elektrodynamik. Material phys. Konferenz in Spala, 1. —14. Sept. 1952, 305—307 (1954) [Polnisch].

**Suffczyński, M.:** Hamiltonsche Formulierung der nichtlinearen Elektrodynamik. Material phys. Konferenz in Spala, 1.—14. Sept. 1952, 308—310 (1954) [Polnisch]

**Plebański, J.:** Das elementare Gesetz und die nichtlineare Elektrodynamik. Material phys. Konferenz in Spala, 1.—14. Sept. 1952, 311—313 (194) [Polnisch].  
Bemerkungen zur Born-Infeldschen Theorie. (J. Süßmann).

**Skobelkin, V. I.:** Über die Doppelbrechung der Strahlen in der nichtlinearen Elektrodynamik. Žurn. éksper. teor. Fiz. 27, 677—689 (1954) [Russisch].

Ein Weg der Verallgemeinerung der linearen Maxwellschen Elektrodynamik wird dargelegt. Die Gleichungen der nichtlinearen Elektrodynamik ohne Ladungen ergeben sich aus dem Variationsprinzip  $\delta \int L(\xi, \eta) d\omega = 0$ , wo die Lagrangesche Funktion als eine willkürliche Funktion beider Invarianten der Elektrodynamik betrachtet wird. Es wird auf die Notwendigkeit der nichtlinearen Verallgemeinerungen der Elektrodynamik hingewiesen (Erscheinungen, die mit der Wechselwirkung starker Felder in der Nähe der Elementarteilchen zusammenhängen, unterliegen nicht dem Prinzip der Überlagerung). In der nichtlinearen Elektrodynamik ist das Vakuum polarisiert. — Die Eigenschaften des polarisierten Vakuums werden untersucht. Es wird gezeigt, daß das polarisierte Vakuum in bezug auf kleine elektromagnetische Störungen anisotrop ist. Die Anisotropie hängt von dem Betrag und der Richtung des elektrischen und des magnetischen Feldes in Form der Lagrange-schen Funktion  $L$  ab. — Sodann werden die ebenen linear polarisierten elektromagnetischen Wellen im Vakuum untersucht und ihre Existenzbedingungen festgestellt. Sind speziell  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{B}$  kollinear, so existieren ebene Wellen, die sich längs des Feldes und normal zu ihm fortpflanzen. Dabei erweist sich, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen längs  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{B}$  weder von den Feldern, noch von der Form der Lagrange-schen Funktion abhängt und gleich der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist. Für die sich normal zum Feld fortpflanzende elektromagnetische Welle ergeben sich zwei Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in Abhängigkeit von der Richtung der Polarisation, jedoch sind die Geschwindigkeiten in entgegengesetzten Richtungen längs der Normalen gleich. In einem anderen Spezialfall, wenn  $\mathcal{E} \perp \mathcal{B}$ , haben die sich in der zu  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{B}$  senkrechten Richtung fortpflanzenden Wellen verschiedene Geschwindigkeiten für entgegengesetzte Richtungen. — Im Fall kollinearer Felder entsprechen zwei Geschwindigkeiten der Wellen in einer Richtung verschiedene Polarisations Ebenen; daher kann diese Erscheinung Doppelbrechung der Strahlen genannt werden. Verf. zeigt, daß die Doppelbrechung in der zu kollinearen Feldern normalen Richtung nur für den Fall der Born-Infeldschen Lagrange-schen Funktion fehlt. Speziell muß die Doppelbrechung in der sich aus der Diracschen Theorie ergebenden nichtlinearen Elektrodynamik bei der Ausbreitung des Lichts in der angegebenen Richtung zu beobachten sein. In dieser Weise entsteht eine interessante Aufgabe für die Experimentalphysik. — Im allgemeinen Fall der nichtlinearen Elektrodynamik läßt sich dagegen das Licht in vier Komponenten zerlegen, die in vier verschiedenen Ebenen linear polarisiert sind.

V. Ju. (Übersetzt aus R. Ž. Fiz. 1956, 121).

**И'ин, V. A.:** Aufgaben der Elektrodynamik für nicht-ideal leitende Körper, die Ecklinien haben. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 97, 213—216 (1954) [Russisch].

Eine Näherungsmethode zur Lösung elektromagnetischer Aufgaben für beliebige gut leitende zylindrische Körper, die eine endliche Anzahl Winkellinien haben, wird entwickelt. Es wird gezeigt, daß, wenn der nicht ideal leitende zylindrische Körper Winkellinien besitzt, in der Lösung ein zusätzliches Glied auftritt, das die Berücksichtigung des Einflusses der Winkellinien ergibt und auf diesen eine logarithmische Singularität besitzt. Da alle anderen Glieder in der Lösung beschränkt sind, herrscht das gefundene Glied unter den anderen in der Umgebung der Winkellinien vor und ist bestimmend.

L. O. (Übersetzung aus dem R. Ž. Fiz. 1955).

**Raisbeck, G.:** A definition of passive linear networks in terms of time and energy. J. appl. Phys. 25, 1510—1514 (1954).

Ein Netzwerk mit  $n + 1$  Klemmen genüge den Bedingungen: a) Linearität; b) werden den Klemmen Ströme (die beliebige Funktionen der Zeit sind) zugeführt, so ist die an das Netzwerk abgegebene Gesamtenergie nicht negativ; c) bevor dem

Netzwerk Ströme zugeführt werden, treten an keinem seiner Klemmenpaare Spannungen auf. Die Bedingungen a), b), c) betrachtet Verf. als Definitionen der Passivität; er fordert dabei weder Rationalität der Impedanzfunktionen noch Reziprozität (d. h. Symmetrie der Impedanzmatrix). Aus a), b), c) folgt: d) sei  $Z_{ij}$  die Impedanzmatrix, dann ist die Hermitesche Form  $\sum_{i,j} u_i u_j^* \frac{1}{2} (Z_{ij} + Z_{ji}^*)$  positiv definit (die

Sterne bezeichnen konjugiert-komplexe Größen). Umgekehrt folgt aus a), c), d) die Bedingung b). Bei den Beweisen verzichtet Verf. ausdrücklich auf mathematische Strenge bei Konvergenz und Vertauschung von Integralen. Die Beziehung von d) zu Bedingungen anderer Autoren, die teils weniger (Stabilität statt Passivität; F. B. Llewellyn, Proc. Inst. Radio Engrs. **40**, No. 3, 271—283, insb. S. 281 (1952), teils mehr (Reziprozität) gefordert hatten, wird diskutiert.

A. Stöhr.

**Argence, Émile et Karl Rawer:** Sur l'absorption des ondes courtes dans l'ionosphère. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 773—775 (1954).

Die Verff. behandeln die Absorption von Kurzwellen in der Ionosphäre unter Benützung der theoretischen Ableitungen von R. C. Majumdar und Chapman. Die abgeleiteten Formeln dienen zum Studium der Absorption in der F-Region.

A. Defant.

● **Roubine, E.:** Lignes et antennes. Tome I. Introduction générale. Lignes en haute fréquence. Préface de Pierre Besson. Paris: Gauthier-Villars 1954. VIII, 172 p., 161 fig. 1600 F.

**Baudoux, Pierre:** Guides d'ondes à conductivité finie. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **40**, 990—994 (1954).

Verf. behandelt die freie Wellenausbreitung in einem von zwei unendlich ausgedehnten, planparallelen, metallischen Platten begrenzten Wellenleiter. Die Leitfähigkeit der Berandung wird dabei als endlich vorausgesetzt. Das Problem läßt sich bekanntlich strenge lösen, doch zieht der Verfasser ein Näherungsverfahren vor, welches in der Zurückführung des bestehenden Anpassungsproblems (Dreischichtenproblem) auf eine Randwertaufgabe besteht. Dabei wird der Einfluß der Feldverteilung in den Platten auf das eigentliche Wellenleiterfeld durch eine vom Verfasser in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **52**, 438) abgeleiteten homogenen Randbedingung, die für große Leitfähigkeit des Begrenzungsmediums eine gute Approximation der tatsächlichen Verhältnisse darstellt, berücksichtigt. Das so gewonnene Randwertproblem läßt sich einfach lösen und gestattet damit die Erfassung des Dämpfungseinflusses auf das Hohlleiterfeld. Es ist selbstverständlich, daß man den Dämpfungseinfluß in beliebiger Näherung auch aus der exakten Durchrechnung des Dreischichtenproblems gewinnen kann.

E. Ledinegg.

**Baudoux, Pierre:** Guides d'ondes de section circulaire à conductivité finie. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **40**, 1209—1213 (1954).

In der vorliegenden Arbeit wird die Wellenausbreitung in einem kreiszylindrischen Hohlrohre mit endlicher Leitfähigkeit der Berandung berechnet. Die Aufgabe, welche in voller Allgemeinheit schon seit langem streng gelöst ist (siehe etwa Stratton: Electromagnetic Theory S. 526) wird vom Verf. nach den gleichen Gesichtspunkten und mittels desselben Näherungsverfahrens wie in der vorst. besprochenen Arbeit behandelt. Analog zur strengen Lösung ergibt sich eine Eigenwertgleichung, welche die Verkopplung des *E*- und *H*-Typs in Evidenz setzt. Die aufgefundene Eigenwertgleichung wird für den Fall einer zylindersymmetrischen Feldverteilung, die durch die Entkopplung beider Feldtypen ausgezeichnet ist, aufgelöst und der Dämpfungseinfluß der Berandung für den *E*- bzw. *H*-Typ diskutiert.

E. Ledinegg.

**Socio, Marialuisa de:** Sulla propagazione nelle guide con dielettrico eterogeneo. Rivista Mat. Univ. Parma **5**, 183—196 (1954).

L'A. studia la propagazione delle onde elettromagnetiche in una guida riempita



con dielettrico lievemente eterogeneo, cioè tale che la sua costante dielettrica sia la somma di due termini: l'uno costante, l'altro  $\varepsilon'$  variabile, ma molto piccolo, e identico su ogni retta parallela all'asse della guida. Definito semplice un modo che abbia velocità diversa da tutti gli altri, multiplo un modo per cui la predetta condizione non è soddisfatta, l'A., applicando il metodo delle perturbazioni, determina anzitutto i modi prossimi ai modi semplici nella guida con dielettrico omogeneo (cioè con  $\varepsilon' = 0$ ); essi risultano lievemente ibridi, cioè con una delle componenti longitudinali del campo elettromagnetico molto piccola. Considera poi i modi prossimi a modi multipli e dimostra che, per effetto dell'eterogeneità, possono diventare semplici e, talvolta, anche ibridi. Discute, in special modo, i casi particolari dei modi prossimi ai modi dissimmetrici di una guida a sezione circolare e dei modi prossimi ai modi  $TE$  e  $TM$  che, in una guida circolare o rettangolare, si propagano con eguale velocità. *D. Graffi.*

**Battig, A.: Allgemeine Beschreibung der Ergebnisse bei Photonen in Materie.** Univ. nat. Tucumán, Revista, Ser. 10, 111—135 engl. Zusammenfassg. 111 (1954) [Spanisch].

If we attribute to the photon in a material medium the total energy  $h\nu$  and the momentum  $h\nu/V$ , where  $V$  denotes the velocity of phase of the electromagnetic wave in the medium, it is possible to define a mass of the photon, analyzing the equation  $(W - F/c)^2 - p^2 = m_0^2 c^2$  where  $F$  represents a potential energy. This equation permits to attribute to the photon a real mass and velocity  $v < c$  as long as  $F \neq 0$ . If  $F = 0$   $m_0$  is imaginary and the photon has the velocity  $v > c$ . The potential energy  $F$  is explained as an action of the material medium upon the photon when it passes from the vacuum to the material medium. Aus der engl. Zusammenfassg.

● **Röntgen, W. C.: Grundlegende Abhandlungen über die X-Strahlen.** (Klassische Arbeiten deutscher Physiker. Heft 1.) Leipzig: Verlag Johann Ambrosius Barth 1954. 44 S. 1 Porträt DM 2,70.

Beginn einer neuen Buchreihe, die Originalarbeiten deutscher Physiker zusammenfaßt.

**Barrar, R. B. and C. L. Dolph: On a three dimensional transmission problem of electromagnetic theory.** J. rat. Mech. Analysis 3, 725—743 (1954).

Die Arbeit behandelt das vom Ref. [Math. Ann. 123, 345—378 (1957) und „Grundprobleme der mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen“, S. 295 ff., Berlin 1957] bereits gelöste Problem der Beugung elektromagnetischer Schwingungen an endlichen homogenen Körpern unter Benutzung der Theorie der Banachschen Räume auf einem neuen Wege und diskutiert die verschiedenen Darstellungsformen für die Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen. *Claus Müller.*

**Godfrey, G. H.: Optical diffraction effects produced by amplitude and phase changes in the wave front.** Austral. J. Phys. 7, 389—399 (1954).

Light, represented by a scalar wave-function, impinges on a screen made up of two parts,  $\sigma_1$  and  $\sigma_2$ . The author uses optical arguments, together with Babinet's principle, to compare the diffraction-patterns arising from two cases: (i) that in which  $\sigma_1$  is transparent and  $\sigma_2$  opaque, and (ii) that in which  $\sigma_1$  and  $\sigma_2$  transmit fractions  $r_1^2$  and  $r_2^2$  of the incident light,  $\sigma_1$  producing in addition a phase-lag  $\varphi$  relative to  $\sigma_2$ . He gets a formula for the ratio of the illuminations in the two cases, giving applications to some eight types of screen of physical interest. An appendix compares diffraction patterns on a spherical surface resulting from two conjugately-placed apertures. *F. V. Atkinson.*

**Deppermann, Karl: Die Beugung von Planwellen an einer Kugel unter Berücksichtigung der Kriechwellen.** Diss. math.-naturw. Fak. Univ. Münster 5, 7—8 (1954).

**Černov, L. A.: Die Korrelation der Schwankungen der Amplitude und der Phase bei Ausbreitung einer Welle im statistisch inhomogenen Medium.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 98, 953—956 (1954) [Russisch].

Es wird die Frage nach der Korrelation der Schwankungen der Amplitude und der Phase im Empfangspunkte sowie über die Korrelation der Schwankungen der

Amplituden (und der Phasen) in verschiedenen Punkten bei der Fortpflanzung einer Welle im statistisch inhomogenen Medium untersucht. Die Rechnung bezieht sich auf das isotrope Medium mit kleinen zufälligen Abweichungen des Brechungsexponenten vom Mittelwert (beim Fehlen eines regulären Gangs des Brechungsexponenten), in welches die ebene Welle aus dem freien Halbraum gelangt. Die Dimensionen der Inhomogenitäten werden als groß im Vergleich zur Wellenlänge vorausgesetzt. — Es wird gezeigt, daß der Koeffizient der Korrelation zwischen den Schwankungen der Amplitude und der Phase im Empfangspunkte mit der Tiefe des Eindringens ins Medium abnimmt. Der Radius der Korrelation zwischen den Schwankungen der Amplituden (und der Phasen) in den verschiedenen Punkten ist von der Größenordnung der Inhomogenitäten des Mediums.

A. A. G. (Übersetzt aus R. Ž. Fiz. 1956, 1662).

**Yadavalli, S. V.:** On some effects of velocity distribution in electron streams. Quart. appl. Math. **12**, 105—116 (1954); **Correction.** Ibid. **15**, 111 (1957).

Wird das Liouvillesche Theorem zugrunde gelegt, so ergibt sich als Lösung des Problems der Geschwindigkeitsverteilung in einem Elektronenstrahl eine Integralgleichung. Nimmt man eine rechteckige Geschwindigkeitsverteilung an (was im Anhang begründet wird), so wird die Integralgleichung für das Problem eines Elektronenstrahls in erster Näherung durch eine Laplacetransformation gelöst. Anschließend wird gezeigt, daß die erwähnte Integralgleichung für den Fall eines Elektronenstrahls mit einheitlicher Geschwindigkeit die gleichen Ergebnisse wie die Llewellyn-Gleichungen bringt. Das Problem eines beschleunigten Elektronenstrahls mit einer geringen Geschwindigkeitsstreuung wird kurz diskutiert.

K. G. Müller.

**Dällenbach, Walter:** Starke Fokussierung bei Beschleunigern. Z. Naturforsch. **9a**, 1005—1012 (1954).

Die vorliegende Arbeit beschreibt in sehr durchsichtiger Weise das Prinzip der starken Fokussierung bei Kreisbeschleunigern und diskutiert dabei nicht nur die stabilen sondern auch die instabilen Betatron- und Synchrotronschwingungen, sowie den Einfluß von Aufstellungsfehlern der Magnetsektoren auf die Teilchenbahnen. Mathematisch interessant ist vor allem der Hamilton-ähnliche Formalismus für die Bewegung der Teilchen in einem  $pq$ -Raum, sowie die Erläuterung der adiabatischen Dämpfung mit Hilfe des Ehrenfestischen Adiabaten-Prinzips.

W. Humbach.

**Agostinelli, Cataldo:** Soluzioni stazionarie delle equazioni della magnetoidrodinamica interessanti la cosmogonia. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **17**, 216—221 (1954).

Es werden stationäre Lösungen der magnetohydrodynamischen Gleichungen untersucht. Dazu wird angenommen, daß die Geschwindigkeit  $v$  überall zum Magnetfeld  $\mathfrak{H}$  parallel sei und daß außerdem  $\text{rot rot } \mathfrak{H} = 0$  sei. Dann erhält man, wie schon bekannt, die Bernoullische Gleichung der Hydrodynamik. Für den Fall der starren Rotation werden die Gleichungen noch etwas eingehender untersucht.

R. Lüst.

**Nardini, Renato:** Sul comportamento asintotico della soluzione di un problema al contorno della magneto-idrodinamica. I, II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **16**, 225—231, 341—348 (1954).

Es wird die Differentialgleichung der Magnetohydrodynamik

$$\partial^2 H_i(t, z)/\partial t^2 = a^2 \partial^3 H_i(t, z)/\partial t \partial z^2 + V^2 \partial^2 H_i(t, z)/\partial z^2 \quad (i = x, y)$$

untersucht. Diese Differentialgleichung beschreibt die Ausbreitung sog. Alfvenscherschen Wellen in einem homogenen Magnetfeld  $H_z$  für den Fall, daß die Leitfähigkeit nicht unendlich ist. Hierin ist  $H_i$  die  $x$ - bzw.  $y$ -Komponente des gestörten Magnetfeldes,  $a^2 = 1/\mu \sigma$  und  $V^2 = \mu H z^2/\varrho$ , wobei  $\mu$  die magnetische Permeabilität,  $\sigma$  die Leitfähigkeit und  $\varrho$  die Dichte ist. Für bestimmte Rand- und Anfangsbedingungen werden die Lösungen angegeben und einige Theoreme aufgestellt sowie diskutiert.

R. Lüst.



**Dungey, J. W. and R. E. Loughhead:** Twisted magnetic fields in conducting fluids. *Austral. J. Phys.* **7**, 5—13 (1954).

Im Anschluß an Arbeiten von Alfvén und Lundquist (dies. Zbl. **54**, 94) wird die Tendenz zur Schleifenbildung bei verdrehten Magnetfeldern in einer leitenden Flüssigkeit untersucht. Weil Dichte und Kompressibilität ohne Einfluß sind, wird mit raumzeitlich konstanter Dichte gerechnet. Die Leitfähigkeit wird als unendlich betrachtet. Eine Untersuchung allgemeiner periodischer Störungen bestätigt das speziellere Ergebnis Lundquists. Instabilitäten, die zur Bildung von Schleifen führen, setzen  $p < (1/2) R$  voraus; wobei  $R$  der Radius des die Feldlinien einschließenden Zylinders ist, und  $2\pi p$  die Steigung ihrer Verdrehung. Andere Arten von Instabilitäten treten bereits bei schwächerer Verdrehung auf.

*S. v. Hoerner.*

**Carini, Giovanni:** Osservazioni riguardanti le onde magneto-idrodinamiche di Alfvén. *Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur.* **87** (III. Ser. **18**), 150—156 (1954).

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Alfvénschen magneto-hydrodynamischen Wellen wird ohne Vernachlässigung des Verschiebungsstromes berechnet. Es wird gezeigt, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit dieser Wellen gleich der ist, mit denen sich Diskontinuitäten fortpflanzen.

*R. Lüst.*

**Carini, Giovanni:** Condizioni di compatibilità dinamica nella teoria delle onde magneto-idrodinamiche. *Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur.* **87** (III. Ser. **18**), 433—438 (1954).

Es werden Bedingungen angegeben, denen Diskontinuitäten bei einem Durchgang durch Wellenfronten in einem Plasma genügen müssen.

*R. Lüst.*

**Carini, Giovanni:** Propagazione di onde piane magneto-idrodinamiche in un liquido conduttore mobile in un campo magnetico omogeneo. *Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur.* **87** (III. Ser. **18**), 439—444 (1954).

Es wird die Ausbreitung von magneto-hydrodynamischen ebenen Wellen in einem Plasma mit endlicher Leitfähigkeit untersucht.

*R. Lüst.*

**Kaplan, S. A.:** Die Spektraltheorie der gasmagnetischen isotropen Turbulenz. *Žurn. éksp. teor. Fiz.* **27**, 699—707 (1954) [Russisch].

In einer früheren Arbeit des Verf. wurde ein System von Spektralgleichungen der isotropen magneto-hydrodynamischen Turbulenz vorgeschlagen. Für diese Gleichungen wurden die Lösungen untersucht. Im stationären Zustand bekommt man eine gleichmäßige Verteilung der magnetischen und kinetischen Energie. Außerdem sind die Energiespektren gleich. Sie haben einen Potenzcharakter. Der den Wert  $5/3$  etwas übertreffende Exponent hängt schwach vom Maßstab der Bewegung, der Schallgeschwindigkeit, der Energiedissipation in Stoßwellen u. a. m. ab. Für  $c^2/4\pi\sigma > \nu$  ( $\sigma$  = elektrische Leitfähigkeit,  $\nu$  = Zähigkeit,  $c$  = Lichtgeschwindigkeit) existiert auch noch eine andere Lösung, bei der der Exponent des Spektrums der kinetischen Energie nahe  $5/3$  und der entsprechende der magnetischen Energie nahe  $1/3$  ist. Schließlich werden noch Methoden zur Untersuchung der instationären Turbulenz mit Hilfe der Spektraltheorie angegeben.

*R. Lüst.*

## Relativitätstheorie:

**Rubin, Herman and Patrick Suppes:** Transformations of systems of relativistic particle mechanics. *Pacific J. Math.* **4**, 583—601 (1954).

Verff. formulieren, in Analogie zu früheren Untersuchungen über die klassische Punktmechanik [vgl. dies. Zbl. **50**, 182 (1954)] ein Axiomensystem für  $n$ -dimensionale Systeme der relativistischen Punktmechanik (SRPM). Grundbegriffe sind  $P, \mathfrak{P}, m, s, f, c$ , wobei  $P$  die Menge der Massenpunkte ist,  $\mathfrak{P}(p)$  für  $p \in P$  ein Zeitintervall,  $s(p, t)$  für  $p \in P$  und  $t \in \mathfrak{P}(p)$  ein  $n$ -dimensionaler Ortsvektor,  $f(p, t, i)$  für  $p \in P$ ,  $t \in \mathfrak{P}(p)$  und  $i = 1, 2, 3, \dots$  ein  $n$ -dimensionaler Kraftvektor,  $c$  der Wert der



Lichtgeschwindigkeit. Es sei  $\Phi_1$  eine Abbildung der positiven (reellen) Zahlen in sich,  $\Phi_2$  eine umkehrbar eindeutige Abbildung des  $(n+1)$ -dimensionalen reellen Vektorraums  $E_{n+1}$  auf sich und  $\Phi_3$  eine Abbildung von  $E_{2n}$  in  $E_n$ ,  $\Phi = \langle \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \rangle$ . Für  $\Gamma = \langle P, \mathfrak{F}, m, s, f, c \rangle$  sei  $\Phi(\Gamma) = \langle P, \mathfrak{F}', m', s', f' \rangle$ , wobei  $[H_p(t)$  stehe für  $\Phi_2(s(p, t), t)]$ ,  $\mathfrak{F}'$  der Argumentbereich der  $(n+1)$ -ten Komponente von  $H_p(t)$  ist,  $m'(p) = \Phi_1(m(p))$ ;  $s'(p, t')$  und  $f'(p, t', i)$  sind nur definiert, falls  $H_p^{-1}(t')$  eindeutig existiert, und zwar ist  $s'(p, t')$  der Vektor der  $n$  ersten Komponenten von  $\Phi_2(s(p, H_p^{-1}(t')), H_p^{-1}(t'))$  und  $f'(p, t', i) = \Phi_3(f(p, H_p^{-1}(t'), i), v(p, H_p^{-1}(t')))$  (mit  $v = \partial s / \partial t$ ). Verff. charakterisieren die Tripel  $\langle \Phi, c, c' \rangle$ , für welche stets mit  $\Gamma = \langle P, \mathfrak{F}, m, s, f, c \rangle$  auch  $\langle \Phi(\Gamma), c' \rangle$  ein SRPM ist und für welche — grob gesprochen — niemals der Weg eines Massenpunktes in einen Lichtstrahl übergeht. Diese Tripel geben Anlaß zur Bildung eines Brandtschen Gruppoides, wobei die Gruppenmultiplikation der Zusammensetzung zwischen solchen Tripeln  $\langle \Phi, c, c' \rangle$ ,  $\langle \Psi, c', c'' \rangle$ ,  $\langle \theta, c, c'' \rangle$  entspricht, bei denen für alle  $\Gamma = \langle P, \mathfrak{F}, m, s, f, c \rangle$  die Beziehung  $\langle \Psi(\langle \Phi(\Gamma), c' \rangle), c'' \rangle = \langle \theta(\Gamma), c'' \rangle$  gilt.

H. Hermes.

**Kalitzin, Nikola St.: Relativistische Mechanik des materiellen Punktes mit veränderlicher Masse.** C. r. Acad. Bulgare Sci. 7, Nr. 2, 9—11 u. deutsche Zusammenfassg. 12 (1954) [Russisch].

Speziell-relativistische Bewegungsgleichungen eines Punktes mit veränderlicher Masse.

D. Laugwitz.

**Papapetrou, Achilles: Eine neue Theorie des Gravitationsfeldes. I. II.** Math. Nachr. 12, 129—141, 143—154 (1954).

Der Verf. untersucht eine Gravitationstheorie, die eine Spezialisierung der Einsteinschen Gravitationstheorie ist, in der der von Einstein vorausgesetzte allgemeine Riemann-Raum durch einen spezielleren Riemann-Raum ersetzt wird. In diesem spezielleren Riemann-Raum soll durch eine geeignete Wahl des Koordinatensystems die Metrik im ganzen Raum auf die Form (1)  $ds^2 = -e^\sigma(dx^2 + dy^2 + dz^2) + e^\chi dt^2$  gebracht werden können. Bezugssysteme, in denen die Metrik die Form (1) hat, sind dann physikalisch ausgezeichnete Bezugssysteme. Die Feldgleichungen der neuen Gravitationstheorie werden aus derselben Hamilton-Funktion hergeleitet wie in der Einsteinschen Theorie. Da jedoch jetzt die zehn  $g_{\mu\nu}$  Funktionen der zwei Gravitationspotentiale  $\varphi$  und  $\chi$  sind, ergibt die Variation jetzt nur zwei unabhängige Feldgleichungen, nämlich (2)  $g^{\sigma\tau} R_{\sigma\tau} = -\kappa g^{\sigma\tau} T_{\sigma\tau}$  ( $\sigma, \tau = 0, 1, 2, 3$ ) und (3)  $R_0^0 = \kappa (T_0^0 - \frac{1}{2} g^{\sigma\tau} T_{\sigma\tau})$ , von denen die zweite nicht kovariant ist. Der Energie-Impuls-Satz ist natürlich (wie in allen von der Einsteinschen verschiedenen Gravitationstheorien) nicht mehr aus den Feldgleichungen herleitbar, sondern wird als zusätzliche Bedingung eingeführt. Es wird gezeigt, daß die äußere statische kugelsymmetrische Lösung der Feldgleichungen (2) und (3) mit der Schwarzschildschen Lösung der Einsteinschen Gleichungen identisch ist. In erster Näherung für schwache Felder führen (2) und (3) auf Gleichungen vom elliptischen Typ. Somit existieren in erster Näherung keine ungedämpften Wellen, und die Theorie beschreibt eine Fernwirkung. (Dies ist nach Ansicht des Ref. von Interesse für die Frage der Quantelung des Gravitationsfeldes, da bei einer reinen Fernwirkungstheorie der Gravitation die Quantelung des Gravitationsfeldes weder notwendig noch möglich ist.) — Ein ebener Raum liegt natürlich stets dann vor, wenn  $q, \chi = \text{const}$  sind. Werden noch die Grenzbedingungen (4)  $q, \chi \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$  postuliert, so ist  $q, \chi = \text{const}$  die einzige reguläre ebene Metrik. Ohne diese Forderung existieren aber in der Gravitationstheorie mit zwei Gravitationspotentialen wie in der Einsteinschen Theorie scheinbare Gravitationsfelder, so daß wegen der Annahme, daß die Metrik (1) einem Inertialsystem entspricht, die Einführung der Grenzbedingung (4) für die Konsistenz der Theorie notwendig ist. — Weiter wird gezeigt, daß für die Konsistenz der untersuchten Gravitationstheorie noch notwendig ist, daß die Form (1) der Metrik nur

gegenüber Transformationen invariant ist, gegenüber denen die Gleichung (3) invariant ist. Dies sind alle Transformationen, für die  $\bar{x}^0_{,i} = 0$  ist, woraus zunächst folgt, daß für nicht verschwindende Gravitationsfelder keine Lorentzinvarianz besteht, das Einschalten eines Gravitationsfeldes also eine Einschränkung der in der speziellen Relativitätstheorie zulässigen Transformationen bedeutet. Es wird aber gezeigt, daß für schwache Gravitationsfelder die Einschränkung der Lorentzinvarianz keine merkblichen Konsequenzen hat. (Die Einschränkung der Lorentzinvarianz könnte aber für die Theorie der Elementarteilchen von Bedeutung sein, da für  $r \rightarrow 0$  die Gravitationsfelder nicht mehr schwach sind.) Schwierigkeiten bereitet jedoch die in Teil II eingehend erörterte Tatsache, daß die Form (1) des Linienelements nicht nur gegenüber Transformationen mit  $\bar{x}^0_{,i} = 0$  invariant ist, sondern es auch Transformationen mit  $\bar{x}^0_{,i} \neq 0$  gibt, für die dies der Fall ist. Diese Transformationen müssen also durch zusätzliche Forderungen ausgeschlossen werden, die zu den Feldgleichungen hinzukommen. Der Verf. bemerkt jedoch, daß eine weitere Spezialisierung der Metrik (1) durch den durch das Äquivalenzprinzip nahegelegten Ansatz  $\varphi = -\chi$  nicht nur die Einführung der Grenzbedingung (4) zur Ausschaltung scheinbarer Gravitationsfelder überflüssig macht, sondern auch die Transformationen, gegenüber denen das Linienelement invariant ist, stark einschränkt. Eine solche Gravitationstheorie mit nur einem Gravitationspotential ist vom Verf. in einer weiteren Arbeit [Z. Phys. **139**, 518—532 (1954)] untersucht worden.

H. Treder.

Fock, W.: Das Problem der Bewegung von Körpern in der Einsteinschen Relativitätstheorie. Material phys. Konferenz in Spala, 1.—14. Sept. 1952, 315—334 (1954) [Polnisch].

Lilić, Borislav: Contribution à une conception plus précise des forces d'inertie. Bulls. Soc. Math. Phys. Serbie **6**, 209—232 u. französ. Zusammenfassg. 233 (1954) [Serbisch].

L'A. commence par noter les deux chemins par lesquels on introduit habituellement la conception des forces d'inertie en Mécanique Rationnelle et analyse ensuite les points de vue différents sur la nature de ces forces, surtout en ce qui concerne leur réalité. Le fin du travail présente un essai d'expliquer l'inertie de la matière par les idées de la théorie générale de relativité.

C. Woronetz.

Duan' I-Si: Eine Verallgemeinerung der regulären Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen und des Maxwell'schen Elektromagnetismus für eine punktförmige Ladung. Zurn. éksper. teor. Fiz. **27**, 756—758 (1954) [Russisch].

Ingarden, R.: Die fünf-dimensionale Feldtheorie (mit besonderer Berücksichtigung der Rumer'schen Theorie). Material phys. Konferenz in Spala, 1.—14. Sept. 1952, 355—360 (1954) [Polnisch].

Kurze Besprechung der verschiedenen fünfdimensionalen Verallgemeinerungen der Einsteinschen Gravitationstheorie, insbesondere derjenigen von Fock und Rumer, in der  $x_5$  mit der (durch  $mc$  dividierten) Wirkungsfunktion der Hamilton-Jacobischen Theorie identifiziert wird.

G. Süßmann.

Taylor, N. W.: An interpretation of the field tensor in the unified field theory. Austral. J. Phys. **7**, 1—4 (1954).

Es sei  $g_{ik} = a_{ik} + q_{ik}$ , wo  $a_{ik}$  den symmetrischen und  $q_{ik}$  den schiefsymmetrischen Anteil von  $g_{ik}$  bedeutet; dann läßt sich zeigen, daß  $q_{ik}$  der Bedingung  $\int a^{ir} a^{ks} q_{rs} = \frac{1}{2} \epsilon^{iklm} q_{lm}$  genügt. Diese Voraussetzung gibt die Möglichkeit an, die Feldgleichungen des Vakuums unmittelbar von der Theorie ohne Benutzung eines Stromdichtetensors abzuleiten. Doch läßt sich beweisen, daß es nicht möglich ist, eine kugelsymmetrische Lösung im Vakuum für das elektrische und magnetische Feld abzuleiten.

J. I. Horváth.

Zanella, Angelo: Successive linearizzazioni in una recente teoria relativistica unitaria. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. **87** (III. Ser. 18), 575—592 (1954).

L'A. étudie, par une méthode d'approximations successives, les équations fondamentales d'une théorie unitaire proposée par B. Finzi [Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 14, 581—588 (1953)], variante de la théorie unitaire d'Einstein dont les équations ont été étudiées de la même façon par P. Udeschini (ce Zbl. 40, 129 et 44, 229, 426). Comme ce dernier, il observe qu'en première approximation, les effets gravitationnels et électromagnétiques se séparent et qu'on en retrouve les équations relativistes ordinaires (équations d'Einstein et de Maxwell dans le vide), tandis qu'en deuxième approximation, une interdépendance apparaît entre les deux types de phénomènes. L'A. discute encore une solution particulière des équations de première approximation; il montre que la résolution des équations de seconde approximation se ramène à la résolution d'équations de la forme  $\square \varphi = f$ ; enfin, il écrit les équations générales de la  $n$ -ème approximation.

*J. Tits.*

**Järnefelt, G.: Ein endliches Weltbild. Vortrag gehalten am 9. X. 1953. S.-Ber. Finnisch. Akad. Wiss. 1953, 159—175 (1954).**

The author suggests using a finite geometry with coordinates from a Galois field  $GF(p)$  (integers mod  $p$ ), in order to describe physical space and the discreteness in the phenomena of modern physics. Such a geometry is locally euclidean in the following sense: If one considers a subspace whose coordinates are taken only from a sufficiently small interval of integers, one can order the points in that subspace in the ordinary way by defining  $a > b$  if and only if  $a - b$  is a residue mod  $p$ . The points outside that subspace would have no physical meaning. If one could also develop corresponding physical theories, such a finite model would have the logical advantage, among others, that the intuitionist could use the law of the excluded middle (valid for finite sets).

*A. Cronheim.*

### **Quantentheorie:**

**Bodiou, G.: Utilisation du formalisme quantique à la topologie du treillis (non modulaire) des propositions „a posteriori“ ou à la modification du concept de „corpuscule localisé“. Collection de Logique mathématique, Sér. A V.: Appl. sci. Logique math. 1952, 129—132 (1954).**

$a$  und  $b$  seien Aussagen über ein Teilchen, welche nicht vertauschbare Größen  $\alpha$  und  $\beta$  betreffen.  $a \cdot b$  sei die (nichtkommutative) „unmittelbare Aufeinanderfolge“ von  $a$  und  $b$ . Bei festem  $b$  und variablem  $a$  erhält man einen nicht modularen „Verband der a-posteriori-Aussagen“ über die Größe  $\alpha$ . In diesem Verband läßt sich mit Hilfe der Projektionsoperatoren des Hilbertschen Raumes eine Topologie einführen.

*H. Hermes.*

**Infeld, L. und L. Sosnowski: Über die Entwicklung des Materiebegriffs in der Physik. Material phys. Konferenz in Spala, 1.—14. Sept. 1952, 13—34 (1954) [Polnisch].**

Es wird auseinandergesetzt, daß in der neueren Physik in steigendem Maße der Begriff des Feldes sich als der fundamentale herausstellt, demgegenüber der des materiellen Teilchens eine nur abgeleitete Bedeutung erhält. Dazu wird betont, daß nach Lenin der philosophische Materiebegriff identisch mit dem der objektiven (sich im Bewußtsein spiegelnden) Realität ist. Längere Diskussion.

*G. Süßmann.*

**Ingarden, R.: Über die Fényessche Interpretation der Quantenmechanik. Material phys. Konferenz in Spala, 1.—14. Sept. 1952, 81—99 (1954) [Polnisch].**

Der Vortrag enthält einen Bericht über die Theorie der stochastischen Prozesse und die daran anknüpfende Deutung der Wellenmechanik durch Fényes. In der anschließenden Diskussion hat Fock die Fényessche Arbeit als mißglückt bezeichnet; leider ist diese Kritik (auf Grund eines technischen Versagens) nur erwähnt aber nicht wörtlich abgedruckt.

*G. Süßmann.*



**Kopeć, Z.:** Die Kritik der Kopenhagener Schule durch Blochinzew. Material phys. Konferenz in Spała, 1.—14. Sept. 1952, 35—47 (1954) [Polnisch].

Verf. referiert die von Blochinzew vorgetragene Kritik der Bohr-Heisenberg-schen Interpretation des quantenmechanischen Formalismus. *G. Süßmann.*

**Fock, W.:** Kritik der Ansichten Bohrs über die Quantenmechanik. Material phys. Konferenz in Spała, 1.—14. Sept. 1952, 49—71 (1954) [Polnisch].

Verf. kritisiert einen nach dem Kriege veröffentlichten Aufsatz von N. Bohr [Dialektika 7,8 (1948)]. Er stimmt mit Bohr darin überein, daß der Meßapparat und das Meßergebnis mit Hilfe der klassischen Physik beschrieben werden müssen, kritisiert jedoch, daß Bohr den Meßprozeß selbst nicht quantenmechanisch analysiert. Nach Fock ist die Wellenfunktion eine (im Vergleich zur klassischen Physik) neuartige Abbildung des realen Zustandes des Objektes. Das Neue besteht darin, daß  $\Psi$  das Verhalten des Objekts beschreibt, und zwar nicht „an und für sich“, sondern nur in Verbindung mit konkreten äußeren Einwirkungen. Fock bezeichnet das Bohrsche Komplementaritätsprinzip als unannehmbar und sagt, daß in der Quantenmechanik eine neue Form des Kausalitätsprinzips gefunden sei. Ref. hat den Eindruck, daß Focks physikalische Interpretation des wellenmechanischen Formalismus von der Bohrs kaum verschieden ist. Längere Diskussion. *G. Süßmann.*

**Weysenhoff, J.:** Das Problem der Elementarlänge in der Physik. Material phys. Konferenz in Spała, 1.—14. Sept. 1952, 351—354 (1954) [Polnisch].

Verf. bespricht kurz die verschiedenen Ansätze, den Begriff einer fundamentalen Länge von der Größenordnung  $10^{-13}$  cm in die Theorie der Elementarteilchen einzuführen, insbesondere seine „Geometrie kugelförmiger Wellenfronten“, die eine gewisse formale Ähnlichkeit mit der Lieschen Kugelgeometrie zu haben scheint. *G. Süßmann.*

**Plebański, J.:** Die Bohmsche Arbeit über die Interpretation der Quantentheorie mit Hilfe verborgener Parameter. Material phys. Konferenz in Spała, 1.—14. Sept. 1952, 73—80 (1954) [Polnisch].

Kurzer Bericht über die Bohmsche kausale Interpretation der Wellenmechanik mit anschließender Diskussion. *G. Süßmann.*

**Bludman, S. and P. B. Daitch:** Validity of the Born-Oppenheimer approximation. Phys. Review, II. Ser. 95, 823—830 (1954).

Verff. untersuchen an folgendem Modell die Gültigkeit der Born-Oppenheimer-Näherung: Ein leichtes Teilchen ist an ein schweres Teilchen gebunden, das selbst wieder an ein unendlich schweres Teilchen gebunden ist. *H. Haken.*

**Pekar, S. I.:** Das Fehlen von diskreten Energieniveaus und gebundenen Zuständen eines Teilchens mit dem Spin  $\frac{1}{2}$  in einem gegebenen pseudoskalaren Potentialfeld. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 97, 1011—1012 (1954) [Russisch].

Die Diracsche Gleichung

$$[-i\hbar c \alpha \nabla + M c^2 \alpha_4 + V(x, y, z) \alpha_5] \Psi = E \Psi$$

wird untersucht, wo  $V(x, y, z)$  eine willkürliche, im Unendlichen gegen Null strebende Funktion der Raumkoordinaten ist und  $\alpha_5 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ . Es wird bewiesen, daß  $|E| \geq M c^2$ . Bekanntlich ist in diesem Bereich das Energiespektrum kontinuierlich, und im Unendlichen abklingende Eigenfunktionen gibt es nicht. Demnach existieren auch keine gekoppelten Zustände des Teilchens mit dem Spin  $\frac{1}{2}$  im gegebenen pseudoskalaren Potentialfeld.

V. I. K. (Übersetzt aus R. Ž. Fiz., 1955).

**Gotó, Ken-iti:** Relativistic wave equations under the inhomogeneous Lorentz group. Progress theor. Phys. 12, 409—420 (1954).

Die den Verf. interessierenden Darstellungen der inhomogenen Lorentzgruppe gewinnt er aus den Darstellungen der sechsdimensionalen Drehgruppe, die die Form  $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 + y_5^2 - y_6^2$  invariant läßt. Fordert man nämlich zusätzlich, daß auch  $y_5 + y_6$  invariant bleiben soll, so ergibt sich tatsächlich die eigentliche inhomogene Lorentzgruppe. Im Gegensatz zu den üblicherweise betrachteten Darstellungen sind die so gewonnenen zwar reduzibel, nicht jedoch vollreduzibel.

Schließlich werden einige zugehörige Wellengleichungen explizit angegeben. Verf. hält die Arbeit für das Verständnis des Paisschen  $\omega$ -Formalismus (dies. Zbl. **53**, 173) für nützlich.

*F. Penzlin.*

**Demkov, Ju. N.:** Das Prinzip des mikroskopischen Gleichgewichts in der Quantenmechanik und einige Identitäten für die Streuungsamplituden in der Stoßtheorie. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **97**, 1003—1006 (1954) [Russisch].

The author shows that the following detailed balance relations are implied by the symmetry of the functional of the Hulthén-Kohn variational principle (both for elastic and inelastic collisions):

$$f_{AB} = f_{A^*B^*}; \quad \frac{1}{2i} (f_{AB} - \bar{f}_{BA}) = \sum_X \bar{f}_{BX} f_{AX},$$

where the asterisk denotes states described by conjugate complex wave functions, the sum over  $X$  in the second relation refers to all states with the same energy,  $f_{AB}$  is the transition amplitude from state  $A$  to state  $B$  and the bar denotes complex conjugation.

*M. E. Mayer.*

**Kampen, N. G. van:** The symmetry relation of the  $S$ -matrix in the complex plane. Physica **20**, 115—123 (1954).

Es wird die Streuung eines Schrödinger-Teilchens an einem kugelsymmetrischen Potential betrachtet. In einer früheren Arbeit des Verf. ist aus einer Kausalitätsbedingung hergeleitet worden, daß die  $S$ -Matrix  $S(p)$  als Funktion des Teilchenimpulses  $p$  in der rechten Halbebene der komplexen  $p$ -Ebene meromorph ist. Jetzt wird aus der zusätzlichen Bedingung, daß die Gesamtenergie eine untere Schranke besitzt, die Möglichkeit einer analytischen Fortsetzung in die linke  $p$ -Halbebene gefolgert; auf der reellen Achse gilt  $S(-p) = S^*(p)$ .

*H. Lehmann.*

**Belinfante, F. J. and C. Møller:** On the relation between the time-dependent and stationary treatments of collision processes. Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd. **28**, Nr. 6, 64 S. (1954).

Die verschiedenen Lösungsmethoden des quantentheoretischen Stoßproblems mit Hilfe der  $S$ -Matrix werden eingehend und kritisch besprochen. Es werden die Definitionen der  $S$ -Matrix von Heisenberg, Dyson, Källén, Yang und Feldman verglichen. Weiterhin wird untersucht, welche Resultate ohne, bzw. mit Benutzung der Reihenentwicklung der  $S$ -Matrix abgeleitet werden können, und welche Resultate nur dann gültig sind, wenn keine gebundenen Zustände vorhanden sind. Die sonst sehr instruktive Arbeit läßt sich wegen ihrer speziellen und furchtbar konzentrierten Symbolik (z. B.  $(? q ||)^\dagger = - ? (q^\dagger ||)$ ) sehr schwer lesen.

*J. I. Horváth.*

**Laskar, Williams et Marcos Moshinsky:** Définitions et propriétés analytiques des matrices  $R$  et  $S$  associées aux forces tensorielles. I. Cas de la matrice  $R$ . C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 2496—2498 (1954).

**Laskar, Williams et Marcos Moshinsky:** Définitions et propriétés analytiques des matrices  $R$  et  $S$  associées aux forces tensorielles. II. Cas de la matrice  $S$ . C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 29—31 (1954).

**Nakai, Shinzo:** Bound states and  $S$ -matrix in quantum field theory. Progress theor. Phys. **11**, 179—189 (1954).

Der Zusammenhang zwischen gebundenen Zuständen und den stationären Zuständen Dysons wird untersucht. Es entsteht eine homogene Integralgleichung, die die gebundenen Zustände beschreibt, in engem Zusammenhang mit der Møller-schen  $S$ -Matrixtheorie.

*W. Macke.*

**Källén, G.:** The coupling constant in field theory. Nuovo Cimento, IX. Ser. **12**, 217—225 (1954).

Es werden verschiedene Möglichkeiten der Definition von Kopplungskonstanten in quantisierten Feldtheorien diskutiert. Während sich für die Quantenelektro-

dynamik wegen der Eichinvarianz die Definition als im wesentlichen eindeutig erweist, ist dies in der Theorie der Mesonen nicht der Fall. Für den letzteren Fall setzt sich der Verf. kritisch mit einem von Deser, Goldberger und Thirring (dies. Zbl. 57, 215) versuchten Vergleich verschiedener Kopplungskonstanten auseinander.

*H. Lehmann.*

**Rayski, J.:** Neue Ergebnisse der Quantenfeldtheorie. Material phys. Konferenz in Spala, 1.—14. Sept. 1952, 335—349 (1954) [Polnisch].

**Novožilov, Ju. V.:** Die kausalen Operatoren in der Quantentheorie des Feldes. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 99, 533—536 (1954) [Russisch].

Verf. schlägt eine zur üblichen äquivalente Formulierung der Theorie quantisierter Felder vor. Dazu werden „kausale“ Feld-Operatoren eingeführt, deren gewöhnliche Produkte zu den chronologischen Produkten der üblichen Feldoperatoren in Analogie stehen.

*H. Lehmann.*

**Novožilov, Ju. V.:** Über die Quantentheorie des Feldes mit kausalen Operatoren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 99, 723—726 (1954) [Russisch].

Die Formulierung quantisierter Feldtheorien mittels kausaler Operatoren (vgl. vorstehendes Referat) wird hier genauer ausgeführt. Besonders wird die Wechselwirkungsdarstellung betrachtet. Weiterhin weist der Verf. auf eine Möglichkeit hin, in diesem Rahmen nichtlokale Wechselwirkungen einzuführen.

*H. Lehmann.*

**Caianiello, E. R.:** On quantum field theory. II. Non-perturbative equations and methods. Nuovo Cimento, Ser. IX 11, 492—529 (1954).

(Teil I dies. Zbl. 53, 171.) Unter Benützung der Methode einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 53, 171.) gibt dieser eine Formulierung von Feldtheorien durch ein System von (unrenormierten) Integralgleichungen für „Kerne“; dabei wird von der Differentiation nach der Kopplungskonstanten Gebrauch gemacht. Die Beziehungen dürften in engem Zusammenhang zu den von anderen Autoren aufgestellten Gleichungen für Greensche Funktionen bzw. Feynmankerne stehen; ein ins einzelne gehender Vergleich wird durch die eigenwillige Bezeichnungsweise des Verf. erschwert.

*H. Lehmann.*

**Suura, Hiroshi:** On a treatment of many-particle systems in quantum field theory. Progress theor. Phys. 12, 49—71 (1954).

Ausgehend von den Zuständen im Fockraum definiert der Verf. ein vollständiges System von (nicht-orthogonalen) Zuständen, die man als Zustände mit einer bestimmten Zahl von physikalischen Teilchen interpretieren kann. Eigenschaften dieser Zustände und mögliche Anwendungen werden diskutiert.

*H. Lehmann.*

**Taylor, J. C.:** Tamm-Dancoff method. Phys. Review, II. Ser. 95, 1313—1317 (1954).

Verf. diskutiert verschiedene Varianten der alten bzw. neuen Tamm-Dancoff-Methode; insbesondere die Frage der Renormierbarkeit solcher Gleichungen.

*H. Lehmann.*

**Ôkubo, Susumu:** Diagonalization of Hamiltonian and Tamm-Dancoff equation. Progress theor. Phys. 12, 603—622 (1954).

Es wird gezeigt, daß die Renormalisierung des Tamm-Dancoff-Verfahrens einer unitären Transformation des zugehörigen Hamiltonoperators entspricht. Die Methode des Aufsuchens unitärer Transformationen wird weiterhin zu einem Vergleich der Tamm-Dancoff-Methode mit der Bethe-Salpeter-Gleichung wie auch mit der adiabatischen Methode benutzt.

*W. Macke.*

**Itabashi, Kiyomi:** On the renormalization in the Tamm-Dancoff approximation for one-nucleon problem. I. A covariant generalization of the Tamm-Dancoff method. II. Subtraction of divergences in the generalized Tamm-Dancoff method. Progress. theor. Phys. 12, 494—502, 585—602 (1954).

I. Zur Subtraktion der Divergenzen in der Tamm-Dancoff-Methode wird eine



kovariante Formulierung angegeben, angewandt auf das erweiterte Einteilchenproblem im Feynmanschen Sinne. — II. Die Subtraktion der Divergenzen wird durchgeführt. Das Verfahren entspricht einer von Fubini angegebenen Methode, erweitert auf beliebig hohe Ordnungen der Kopplungskonstanten. *W. Macke.*

**Klein, Abraham:** *New Tamm-Dancoff formalism.* Phys. Review, II. Ser. **95**, 1676—1682 (1954).

Eine von Dyson angegebene Neuformulierung der Tamm-Dancoff-Methode wird hinsichtlich der Divergenzschwierigkeiten, die bei der Renormalisierung sowie bei der Randbedingung auftreten, untersucht. Als Beispiel wird dabei das Einteilchenproblem im erweiterten Feynmanschen Sinne herangezogen. Durch direkte Rechnung wird gezeigt, daß der Integralkern bis zu wenigstens vierter Ordnung frei von Singularitäten ist. Wie zu erwarten, stimmt der Integralkern nicht mit denjenigen der kovarianten Einteilchengleichung überein. *W. Macke.*

**Fulton, Thomas and Robert Karplus:** *Bound state corrections in two-body systems.* Phys. Review, II. Ser. **93**, 1109—1116 (1954).

Im allgemeinen wird die Bethe-Salpeter-Gleichung so formuliert, daß die Teilchen in den virtuellen Zwischenzuständen des Integralkerns sich in freien Zuständen befinden. Ist der Sofortanteil der Wechselwirkung groß gegenüber dem Einfluß der Retardierung, so läßt sich die Konvergenz der Gleichung erheblich dadurch verbessern, daß man eine Umformung der Bethe-Salpeter-Gleichung aufsucht, bei der in den virtuellen Zuständen des Integralkerns die Eigenzustände der Sofortwechselwirkung auftreten. Diese Umformung wird in der vorliegenden Arbeit gegeben und auf die Berechnung der Hyperfeinstruktur des Positroniums angewandt. *W. Macke.*

**Klein, Abraham:** *Single-time formalisms from covariant equations.* Phys. Review, II. Ser. **94**, 1052—1056 (1954).

Die kovariante Zweiteilchengleichung von Bethe-Salpeter wird in eine einzeitige Form transformiert. Eine frühere Behandlung dieses Problems von Macke wird erheblich vereinfacht. Erweiterungen und Verallgemeinerungen der Theorie der Methode werden diskutiert. *W. Macke.*

**Symanzik, K.:** *Zur renormierten einzeitigen Bethe-Salpeter-Gleichung.* Nuovo Cimento, Ser. IX **11**, 88—91 (1954).

Die mehrzeitige Bethe-Salpeter-Gleichung läßt sich bekanntlich in eine einzeitige Gleichung überführen, wie zunächst von Lévy und Klein gezeigt und dann für alle Störungsordnungen von Macke allgemein bewiesen wurde. Der letztere Beweis wurde im Impulsraum durchgeführt und erwies sich als sehr mühevoll. Demgegenüber wird hier eine einfache und übersichtliche Ableitung der einzeitigen Gleichung gegeben, die sich bei Betrachtung der Greenschen Funktionen und Graphen im Ortsraum ergibt. Verschiedene mögliche Darstellungen der einzeitigen Gleichung mit unterschiedlichem Konvergenzverhalten werden diskutiert. *W. Macke.*

**Claesson, Arne:** *On the renormalization of the Salpeter-Bethe equation.* Ark. Fys. **7**, 565—585 (1954).

Die Renormalisierung der Bethe-Salpeter-Gleichung wird bis zur vierten Ordnung der Kopplungskonstanten untersucht durch Einführung zusätzlicher Normalisierungsterme in der Lagrangefunktion, einem von Källén gegebenen Verfahren entsprechend. Die Ergebnisse sind divergenzfrei. *W. Macke.*

**Nakai, Shinzo:** *On the Green-functions of many-electron problem.* Progress theor. Phys. **11**, 155—178 (1954).

Das Vielelektronenproblem wird vom Standpunkt der Dysonschen S-Matrixtheorie behandelt. Die Renormalisierung von Masse und Ladung läßt sich wie beim Eielektronenproblem durchführen. Hier wie dort muß die Entwickelbarkeit nach Potenzen der Kopplungskonstanten vorausgesetzt werden. *W. Macke.*

**Rayski, Jerzy:** Über nichtlokale Feldtheorien. Fortschr. Phys. 2, 164–184 (1954).

Bericht über die einschlägigen Arbeiten. Dargestellt werden: 1. Die Formfaktor-Theorie. Die Wechselwirkungsenergie zwischen Strom  $j^\mu$  und Potential  $A^\mu$  wird mit einem „Formfaktor“  $F(\vec{x}' - \vec{x}'')$  als

$$H'(t) = \int d^3 x' \int d^3 x'' F(\vec{x}' - \vec{x}'') j_\mu(\vec{x}', t) A^\mu(\vec{x}'', t)$$

angesetzt. Die Abhängigkeit der Lagrange-Funktion von zwei Zeitvariablen verhindert die Anwendung der üblichen kanonischen Quantisierung; man ersetzt sie daher durch einen S-Matrix-Formalismus. Die Einzelheiten werden übersichtlich diskutiert, indem das Feldmodell durch ein entsprechendes Modell der Partikelmechanik ersetzt wird. Ausführlicher wird eine quasikanonische Quantisierung des Verf. besprochen (dies. Zbl. 55, 216), in der die Vertauschungsrelationen nur für die Endpunkte eines endlichen Zeitintervalls gelten, wo definitionsgemäß eine Wechselwirkung mit Meßanordnungen stattfindet. Eine grundsätzliche Schwierigkeit bildet die Unbestimmtheit des Formfaktors. 2. Die bilokale Theorie. Ihr Ausgangspunkt ist die Arbeit von Yukawa (dies. Zbl. 36, 267; 41, 572), ebenfalls ergänzt vom Verf. (dies. Zbl. 44, 440; 49, 277; 57, 222) im Sinne der Herstellung eines diskreten Massenspektrums. Die Gesichtspunkte sind rein spekulativ; das Massenspektrum hängt eng mit den Drehimpulswerten eines Rotators im Raume der Yukawaschen Relativkoordinaten zusammen. Am Schluß wird ein Zusammenhang zwischen der bilokalen und der Formfaktor-Theorie skizziert.

W. Wessel.

**Jordan, H. L. und W. E. Frahn:** Nichtlokale Feldtheorie auf der Grundlage der Salpeter-Bethe-Gleichung. II. Wechselwirkung mit lokalisiertem Teilchen. Z. Naturforsch. 9a, 572–578 (1954).

Verf. diskutieren die sich aus der Bethe-Salpeter-Gleichung für den Fall, daß eines der Teilchen sehr schwer ist, ergebenden Potentiale.

H. Lehmann.

**Sirokov, Ju. M.:** Zur Frage der Wechselwirkung von Teilchen neuen Typs von Spin 1/2 mit dem äußeren Felde. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 99, 737–740 (1954) [Russisch].

Für ein Teilchen mit dem Spin 1/2, das durch eine zweikomponentige Wellenfunktion beschrieben wird (dies. Zbl. 56, 442), wird die endliche Lorentzsche Transformation aufgestellt. Es wird auch die Frage über die bilinearen Invarianten und über die Einführung der Wechselwirkung mit dem äußeren Feld untersucht.

Es wird gezeigt, daß, wenn das Bezugssystem nach dem Gesetz  $\tilde{x} = \tilde{x}' - n(n\tilde{x}') + [n(n\tilde{x}') + v\tilde{t}']k^{-1}$ ,  $\tilde{t} = (\tilde{t}' + v\tilde{x}')k^{-1}$ ,  $n = v/v$ ,  $k = (1 - v^2)^{1/2}$ ,  $c = 1$  transformiert wird, die Wellenfunktion der Transformation  $\Psi = S(v)\Psi'$ ,  $S(v) = [(E + \sqrt{E^2 - p^2})(k + 1) - p v \cdot i\sigma[pv]] / [2(E + \sqrt{E^2 - p^2})(k + 1)(E + k\sqrt{E^2 - p^2} - p v)]^{1/2}$  unterliegt.

Zum Unterschied von den Transformationen für die gewöhnlichen Spinor- und Tensor-Wellenfunktion hängt  $S(v)$  von  $p$  ab; daher ist die Lorentzsche Transformation für die betrachtete Wellenfunktion nicht lokal, sondern integral, und das Produkt  $\Psi^*(p)\Psi(p')$  ist für verschiedene  $p$  und  $p'$  keine Invariante. Die bilineare Invariante der Theorie lautet  $\Psi^*(p)U_{pp'}\Psi(p')$ , wo  $U_{pp'}$  die unitäre Transformationsmatrix der Wellenfunktion bei der Drehung des Bezugssystems in der Ebene der Vektoren  $p$  und  $p'$  um den Winkel zwischen diesen Vektoren ist. Es wird darauf hingewiesen, daß man mit Hilfe der Matrix  $U_{pp'}$  deren Form angeführt ist, Vektoren, Pseudovektoren, Pseudoskalare und andere kovariante Größen bilden kann. Man kann auch die Lagrangesche Funktion  $L_{\text{int}}$  der Wechselwirkung der Teilchen neuen Typus mit anderen Feldern aufstellen. So z. B. für den Fall der skalaren Mesonen

$$L_{\text{int}} = g \int d^4 x d^4 x' d^4 x'' \Psi^+(x') U(x' - x, x'' - x) \Psi(x'') \varphi(x),$$

wo  $U(x' - x, x'' - x)$  die Fourier-Komponente des Operators  $U_{pp'}$  ist. — Die

Wechselwirkung ist wesentlich nichtlokal, was mit dem integralen Charakter der Lorentz-Transformation zusammenhängt. Nichtlokal ist auch die Gleichung des freien Teilchens ( $m - \kappa$ )  $\Psi(m, u)$ , da der Operator  $m$  in der  $x$ -Darstellung integral ist. Im vorliegenden Schema gibt es wegen des Fehlens der Antiteilchen keine Polarisation des Vakuums, das mathematische und das physikalische Vakuum stimmen überein. Wird die Gleichung des freien Teilchens in der Form  $(i\partial/\partial\tau - \kappa) \Psi(\tau, u) = 0$ ,  $\Psi(\tau) = (2\pi)^{-1/2} \int \Psi(m) \exp(-im\tau) dm$  wiedergegeben, wo  $\tau$  die Eigenzeit des Teilchens bezeichnet, so ist die Selbstenergie des Mesons gleich Null, und die Mesonen stehen miteinander bei Fehlen der Nukleonen nicht in Wechselwirkung.

K. T. (Übersetzt aus R. Ž. Fiz. 1955, 15693).

**Rosenstock, Herbert B.: Quantization of a nonlinear field theory.** Phys. Review, II. Ser. **93**, 331—333 (1954).

Verf. diskutiert ein Gitterraum-Verfahren zur Quantisierung einer klassischen Feldtheorie, in der Gebiete großer Intensität als klassische Teilchen interpretiert werden.  
H. Lehmann.

**Gonzalez Dominguez, Alberto: Über einige divergente Integrale der Quantenelektrodynamik.** 2° Sympos. Probl. mat. Latino América. Villavicencio-Mendoza 21—25 Julio 1954, 53—60 (1954) [Spanisch].

Using the theory of distributions of L. Schwartz the author gives a meaning to the divergent integrals of quantum electrodynamics. A similar work has been done by W. Güttinger (this Zbl. **50**, 223).  
M. M. Peixoto.

**Anderson, James L.: Green's functions in quantum electrodynamics.** Phys. Review, II. Ser. **94**, 703—711 (1954).

Verf. leitet aus dem Dysonschen  $S$ -Matrix-Formalismus Integralgleichungen für die Ausbreitungsfunktionen  $S'_F$  und  $A'_F$  ab. Sie entsprechen den von Schwinger angegebenen Gleichungen für Greensche Funktionen.  
H. Lehmann.

**Valatin, J. G.: On the propagation functions of quantum electrodynamics.** Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **225**, 535—548 (1954).

Verf. führt in die von Schwinger gegebenen Gleichungen für die Greenschen Funktionen der Quantenelektrodynamik einen Grenzprozeß ein, so daß die modifizierten Gleichungen jedenfalls im Rahmen der Störungsrechnung — frei von Divergenzen sind.  
H. Lehmann.

**Polkinghorne, J. C.: Renormalization of the transformation operators of quantum electrodynamics.** Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **227**, 94—102 (1954).

Verf. untersucht in der Quantenelektrodynamik die Frage, ob der Transformationsoperator für ein endliches Zeitintervall  $U(t_2, t_1)$  nach Renormierung endliche Matricelemente besitzt. Nach Stueckelberg (dies. Zbl. **42**, 213) kann dies höchstens dann der Fall sein, wenn die Begrenzung des Zeitintervalls unscharf ist. Unter dieser Voraussetzung wird vom Verf. gezeigt, daß in jeder Näherung der Störungsrechnung endliche Resultate erhalten werden.  
H. Lehmann.

**Sunakawa, Sigenobu, Tsutomu Imamura and Ryôyû Utiyama: Renormalization of two-electron Green-function.** Progress theor. Phys. **12**, 642—652 (1954).

Verff. wenden ein von ihnen in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **49**, 275) entwickeltes Renormierungsverfahren auf den Fall der Greenschen Funktion zweier Elektronen an.  
H. Lehmann.

**Bhattacharyya, R. K.: On Bremsstrahlung in the nonrelativistic region.** Indian J. theor. Phys. **2**, 111—120 (1954).

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für Bremsstrahlung wird aus der nicht-relativistischen Hamiltonfunktion hergeleitet.  
K. Baumann.

**Schwinger, Julian: The quantum correction in the radiation by energetic accelerated electrons.** Proc. nat. Acad. Sci. USA **40**, 132—136 (1954).

Verf. hat früher die Strahlung eines beschleunigten Elektrons nach der klassischen Theorie berechnet (dies. Zbl. **40**, 125). In der vorliegenden Arbeit gibt er einen



Weg an, wie man die sich aus der Quantentheorie ergebende Korrektur erster Ordnung in  $\hbar$  explizit berechnen kann. Es ergibt sich, daß der nach der klassischen Theorie berechnete Wert für die Gesamtstrahlungsleistung mit dem Korrekturfaktor  $1 - \sqrt[3]{\frac{55}{16} \frac{\hbar}{m c R} \left(\frac{E}{m c^2}\right)^2}$  multipliziert werden muß.

W. Rinow.

Horton, G. K. and E. Phibbs: Effect of nuclear charge on internally produced pairs. Phys. Review, II. Ser. 96, 1066—1075 (1954).

Die Abhängigkeit der Paarerzeugung von der Kernladung wird untersucht. Dabei wird insbesondere festgestellt, daß die Bornsche Näherung sich innerhalb einer Fehlergrenze von  $20\%$  als brauchbar erweist.

W. Macke.

Galanin, A. D.: Über den Entwicklungsparameter in der pseudoskalaren Mesonentheorie mit pseudoskalarer Kopplung. Žurn. éksp. teor. Fiz. 26, 417—422 (1954) [Russisch].

Es wird der faktische Entwicklungsparameter in der skalaren Variante der Theorie  $PS(PS)$  untersucht. Im nichtrelativistischen Grenzfall ist  $g^2$  und nicht  $g^2 (\mu/m)^2$  der Entwicklungsparameter, obgleich einige Glieder in den Strahlungskorrekturen den kleinen Faktor  $(\mu/m)^2$  enthalten ( $\mu$  ist die Masse des Mesons,  $m$  die Masse des Nukleons). Im Grenzfall sehr großer Energien spielt die Größe  $g^2 \ln(E/m)$  die Rolle des Entwicklungsparameters. Es wird lediglich ein Teil der Graphen berücksichtigt (die Diagramme der „Leiternäherung“) und es gelingt, die unendliche Reihe der Störungstheorie aufzusummieren und die asymptotische Form der Greenschen Funktion für das Nukleon

$$R(\hat{p}) \sim (\hat{p} - m)^{-1} |p^2/m^2|^{g^2/8\pi}$$

zu erhalten. — In analoger Weise ergibt sich die asymptotische Darstellung  $\Gamma_5(p^2) \sim |p^2/m^2|^{g^2/4\pi} \gamma_5$ , die sich durch das Vorzeichen des Exponenten vom entsprechenden Ausdruck in der symmetrischen Variante der Theorie unterscheidet. — Wie der Autor selbst vermerkt, sind die von ihm erhaltenen asymptotischen Ausdrücke keinesfalls als eine Approximation der genauen Asymptotik dieser Funktionen zu betrachten, die sich als wesentlich anders herausstellen könnte.

L. R. N. (Übersetzt aus R. Ž. Fiz., 1955).

Galanin, A. D.: Einige Bemerkungen über Divergenzen in der Theorie des pseudoskalaren Mesons mit pseudovektorieller Kopplung. Žurn. éksp. teor. Fiz. 26, 423—429 (1954) [Russisch].

Bekanntlich lassen sich die Divergenzen in der Theorie  $PS(PV)$  nicht durch die Renormierung einer endlichen Zahl von Konstanten beseitigen. Durch eine Auswahlsummation der Reihe für den Ausbreitungsfaktor  $D'$  (oder  $S'$ ) läßt sich die Konvergenz der Integrale verbessern und die Theorie renormierbar gestalten (Ning Hu, dies. Zbl. 40, 431). Im referierten Artikel wird gezeigt, daß diese Methode nicht zur Schaffung einer konsequenten Theorie führt, da der faktische Entwicklungsparameter für jede beliebige Kopplungskonstante  $f$  größenordnungsmäßig gleich Eins ist. Nach Meinung des Autors braucht das noch nicht zu bedeuten, daß die Variante  $PS(PV)$  sich prinzipiell nicht renormieren läßt, sondern weist eher auf die prinzipielle Unanwendbarkeit der Störungstheorie im Fall der pseudovektoriellen Kopplung hin.

L. N. R. (Übersetzt aus R. Ž. Fiz., 1955).

Tal'janskij, I. I.: Über die Positiv-Definitheit der Energie in der Theorie mit höheren Ableitungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 97, 433—436 (1954) [Russisch].

Verf. diskutiert eine Möglichkeit, die bei Feldgleichungen mit höheren Ableitungen (der Form  $(\square - \mu_1^2)(\square - \mu_2^2)q = 0$ ) auftretenden negativen Energien durch geeignete Anfangsbedingungen zu eliminieren.

H. Lehmann.

Werle, J.: Der gegenwärtige Stand der Theorie der Kernkräfte. Material phys. Konferenz in Spada, 1.—14. Sept. 1952, 107—123 (1954) [Polnisch].

Der Vortrag gibt eine Übersicht über die Ergebnisse der Mesonentheorie der Kernkräfte.

G. Süßmann.

Hasegawa, Kazu, Sadahiko Matsuyama and Tomoya Akiba: Theoretical analysis of the anomalous magnetic moment of nucleon. Sci. Reports Tôhoku Univ., I. Ser. 38, 225—237 (1954).

Bekanntlich liefert sowohl die Tamm-Dancoff-Methode als auch die störungstheoretische Berechnung des magnetischen Momentes des Nukleons in der symmetrischen pseudoskalaren Mesonentheorie falsche Werte. Um das Versagen der zweiten

relativistisch invarianten störungstheoretischen Näherung zu untersuchen, werden die Beiträge der Lévy-Graphen zum magnetischen Moment einzeln berechnet. Es zeigt sich, daß die vom Nukleonenstrom herrührenden zu großen Beiträge virtuellen Mesonen mit großen Impulsen zugeordnet werden müssen und daß die Ergebnisse durch ein Abschneideverfahren bedeutend verbessert werden können. Am Schluß wird noch das Tamm-Dancoff-Verfahren kurz diskutiert. *F. Cap.*

**Riddell jr., R. J. and B. D. Fried: Meson-nucleon scattering. I.** Phys. Review, II. Ser. **94**, 1736—1748 (1954).

Die Verff. berechnen den Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines geladenen skalaren  $\pi$ -Mesons an einem stationären Nukleon. Sie bedienen sich dazu eines Verfahrens, das der Tamm-Dancoff-Methode ähnelt, da Zustände mit mehr als einem einfallenden Meson vernachlässigt werden. Die Ein-Nukleon-Matrixelemente des Operators für isotopen Spin (ein reelles Nukleon und kein reelles Meson) werden nach der Tomonaga-Näherung für starke, schwache und mittlere Kopplung (für letztere numerisch) berechnet und in die Matrix-Bewegungsgleichungen eingesetzt. Das gestattet die Berechnung der Wirkungsquerschnitte für die drei Kopplungsarten. Das Ergebnis für starke und schwache Koppelung stimmt mit den in diesen Fällen schon bekannten Ergebnissen überein. Für mittlere Koppelung ergeben sich „Resonanzen“, die den virtuellen Isobarenniveaus entsprechen dürften. Auch diese Rechnung wurde numerisch durchgeführt. Es liegt somit ein Formalismus für allgemeinen, nicht vorgegebenen Koppelungsparameter  $g$  vor. Ein Vergleich mit dem Experiment kann sich erst bei Zugrundelegung des pseudoskalaren Mesonfeldes ergeben. Die nicht-relativistische Durchführung schließt zwangsläufig ein Abschneideverfahren ein.

*O. Hittmair.*

**Visscher, William M.: Self-energy effects on meson-nucleon scattering according to the Tamm-Dancoff method.** Phys. Review, II. Ser. **96**, 788—793 (1954).

Im Rahmen der „Neuen Tamm-Dancoff-Methode“ untersucht der Verf. den Einfluß der renormierten Selbstenergiebeiträge in niedrigster Näherung. Es stellt sich heraus, daß diese Beiträge zwar endlich sind, jedoch zu einem Pol in der Wellenfunktion Anlaß geben, so daß diese unphysikalische Eigenschaften erhält. Man wird aus diesem Resultat schließen müssen, daß eine konsistente Renormierung im Rahmen des benutzten Näherungsverfahrens nicht möglich ist.

*H. Lehmann.*

**Chiba, Shin: Renormalization in the covariant treatment of pion-nucleon scattering.** Progress theor. Phys. **12**, 481—493 (1954).

Die Pion-Nukleon-Streuung wird im Bethe-Salpeter-Formalismus behandelt. Die Renormalisierung zur Subtraktion der Divergenzen, insbesondere der überlappenden Divergenzen wird untersucht. Es stellt sich heraus, daß die von Salam gegebene Vorschrift zum Abzug der überlappenden Divergenzen in geschlossener Form durchgeführt werden kann. Als Ergebnis wird die ganze Greensche Funktion divergenzfrei angegeben.

*W. Macke.*

**Gell-Mann, Murray and Kenneth M. Watson: The interactions between  $\pi$ -mesons and nucleons.** Ann. Review Nuclear Sci. **4**, 219—270 (1954).

Mesonische Phänomene bei niederen Energien werden an Hand einer phänomenologischen Theorie diskutiert. Die Grundannahmen des Modells sind endliche Reichweite und Ladungsunabhängigkeit der Wechselwirkung sowie die „Resonanzhypothese“. Die Streuung wird durch eine Breit-Wigner-Formel dargestellt, ebenso die Photoerzeugung in  $P$ -Zuständen; für die Beiträge von  $S$ -Zuständen wird die pseudoskalare Mesonentheorie herangezogen. Die Amplituden für  $\gamma$ -Absorption werden nach Multipolen entwickelt; auf dieser Basis wird die Winkelverteilung der Photomesonen quantitativ behandelt. Ausdrücke für die Erzeugung von Mesonen in  $S$ - und  $P$ -Zuständen bei Stößen zwischen Nukleonen nahe der Reaktionsschwelle werden hergeleitet. Abschließend werden die Ergebnisse von Chews Theorie der  $\pi$ -Meson-Reaktionen berichtet, sowie der Zusammenhang dieser Theorie mit der relativistischen pseudoskalaren Theorie.

*K. Baumann.*

**Ivanenko, D. D. und D. F. Kurdgelaidze:** Die Grundgleichungen der Mesodynamik. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **96**, 39–42 (1954) [Russisch].

Im ersten Teil der Arbeit wird in vierter Ordnung die nichtlineare Lagrange-funktion des neutralen Mesonenfeldes aufgestellt. Die im zweiten Teil gegebene Lösung führt zu einer Erweiterung der gewöhnlichen Yukawaschen Theorie der Nukleonenwechselwirkung: Verff. erhalten eine Abstoßung bei kleinen Entfernungen.

W. Klose.

**Kurdgelaidze, D. F.:** Die nichtlineare Streuung in der Elektrodynamik und der Mesodynamik. Vestnik Moskovsk. Univ. **9**, Nr. 8 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 5), 81–90 (1954) [Russisch].

Es wird die durch die Entstehung und Vernichtung von virtuellen Paaren skalarer oder pseudoskalarer Mesonen bedingte Streuung von Licht an Licht untersucht. Die Hamiltonsche Funktion der Wechselwirkung des elektromagnetischen Feldes mit den geladenen Mesonen wird in der Form angenommen:

$$H = e A_0 + (A S)/c + e^2 \varphi^* \varphi A_n^2, \\ \varrho = -i \varepsilon (\pi \varphi - \pi^* \varphi^*), \quad \pi = \partial L / \partial \varphi^*, \quad \pi^* = c L / \partial \varphi, \\ S_n = -i \varepsilon c (\partial \varphi^* / \partial x_n \cdot \varphi - \partial \varphi / \partial x_n \cdot \varphi^*), \quad \varepsilon = e/\hbar,$$

wo  $A_n$  und  $\varphi$  die Wellenfunktionen des elektromagnetischen bzw. des Mesonenfeldes sind. — Sodann wird die zweite Quantelung durchgeführt. Es wird gezeigt, daß die Streuung des Lichtes an Licht durch die Mesonen — im Gegensatz zur Streuung durch die Elektronen — nicht nur als ein Effekt 4., sondern auch 2. und 3. Ordnung verlaufen kann. Durch Vergleich des Resultats der Berechnung dieser Effekte (für kleine Frequenzen) mit dem Resultat der unmittelbaren Berechnung des Matrixelements erster Ordnung des nichtlinearen Zusatzes zur Lagrangschen Funktion des elektromagnetischen Feldes  $L' = -\alpha (D^2 - B^2)^2 - \beta (BD)^2$  wird der Wert der Koeffizienten  $\alpha$  und  $\beta$  erhalten:

$$\alpha = -0,466, \quad \beta = -1,533 \text{ (in Einheiten } (360\pi^2)^{-1} \cdot e^4 \hbar / \mu_0^2 c^7),$$

wo  $\mu_0$  die Masse des Mesons ist. — In analoger Weise werden die Streuung von Mesonen an Mesonen durch die Nukleonen untersucht und die nichtlinearen Zusätze zur Lagrangschen Funktion des freien skalaren und pseudoskalaren Mesonenfeldes berechnet. Zum Schluß werden die Lösungen der nichtlinearen Gleichungen des Mesonenfeldes untersucht.

V. P. (Übersetzt aus R. Ž. Fiz., 1955).

**Ritus, V. I.:** Die Bildung von  $\pi$ -Mesonen durch Photonen und Nukleonen-isobaren. Žurn. eksper. teor. Fiz. **27**, 660–676 (1954) [Russisch].

**Kroll, Norman M. and Malvin A. Ruderman:** A theorem on photomeson production near threshold and the suppression of pairs in pseudoscalar meson theory. Phys. Review, II. Ser. **93**, 233–238 (1954).

Verf. beweisen für die Photomesonerzeugung folgendes Theorem: Im nicht-relativistischen Grenzfall verschwinden für den Fall der Mesonmasse Null alle Strahlungskorrekturen zur Erzeugungsamplitude für geladene Mesonen. Dabei ist die Renormierung der Kopplungs-konstanten auf die übliche (Dysonsche) Weise vorzunehmen. Die sich aus der endlichen Mesonmasse ergebenden Korrekturen schätzen die Verff. aus dem Verhältnis der Wirkungsquerschnitte für Erzeugung positiver und negativer Mesonen ab. Die Bedeutung dieses Theorems ist vor allem darin zu sehen, daß es eine relativ gute Bestimmung der Meson-Nukleon-Kopplungs-konstanten ermöglicht.

H. Lehmann.

**Zel'dovič, Ja. B.:** Über den Zerfall von geladenen  $\pi$ -Mesonen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **97**, 421–424 (1954) [Russisch].

Die Darstellung des Mesons von Fermi und Yang (dies. Zbl. **36**, 273) als eines aus dem Paar Nukleon-Antinukleon bestehenden zusammengesetzten Teilchens (Kernes) wird auf die folgenden Zerfälle der  $\pi$ -Mesonen angewandt:

$$(1) \pi^+ \rightarrow \mu^+ + \bar{\nu}, \quad (2) \pi^+ \rightarrow e^+ + \nu, \quad (3) \pi^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu.$$

Auf diese Prozesse werden die aus der Raum- und Ladungssymmetrie erhaltenen Folgerungen angewandt. — Durch Klassifikation der Zerfälle (1), (2) und (3) nach der in der Theorie der  $\beta$ -Prozesse üblichen Terminologie erhält Verf. für sie die Auswahlregeln. Die Zerfälle (1) und (2) sind nur in den  $A$ - und  $P$ -Varianten der Wechsel-



wirkung erlaubt. Unter Verwendung der Analogie mit dem  $\beta$ -Zerfall der Kerne findet der Autor die Wahrscheinlichkeit des Zerfalls (3)  $\tau_{\pi^+\pi^0}^{-1} = 1,7 \text{ sec}^{-1}$  und des Zerfalls (1)  $\tau_{\pi\mu}^{-1} = 3,4 \cdot 10^7 \text{ sec}^{-1}$ . Es wird darauf hingewiesen, daß, obgleich  $\tau_{\pi^+\pi^0} \ll \tau_{\pi\mu}$ , man aus der Beobachtung der Photonen, die sich beim Zerfall des  $\pi^0$ -Mesons und der Vernichtung des Positrons bilden, die Existenz des Prozesses (3) feststellen kann. — Weiter werden die Prozesse (1), (2) und (3) im Rahmen der Methoden der Störungstheorie und des verallgemeinerten Satzes von Furry analysiert. Aus dem Vergleich von  $\tau_{\pi\mu}$  mit  $\tau_{\pi^0\pi^+}$  zieht der Autor den Schluß, daß die Vorstellung von der universellen Fermi-Wechselwirkung nicht als Gleichheit aller Koeffizienten aller Invarianten für die  $PN\mu\nu$ - und  $PNe\nu$ -Wechselwirkung aufgefaßt werden darf. Nach der Methode von Feynman-Dyson wurden die Wahrscheinlichkeiten der Prozesse (2) und (3) ermittelt:

$$\tau_{\pi\mu}^{-1} = 0,04 \quad m_{\pi}^5 \hbar^{-7} c^{-4} g_{P\pi}^1 (\hbar c/g^2),$$

$$\tau_{\pi\mu}^{-1} = 0,007 \quad m_{\pi}^5 \hbar^{-7} c^{-4} g_{P\pi}^2 (\hbar c/g^2).$$

Der Vergleich mit dem Experiment führt zur folgenden Abschätzung:  $g_{P\pi} < 0,08 g_{\beta}$ . Dieses Resultat widerspricht den Abschätzungen anderer Autoren (M. Ruderman, dies. Zbl. 50, 230; D. C. Peaslee, dies. Zbl. 51, 440), die  $g_{P\pi} \simeq g_{\beta}$  erhalten haben. — Es wird gezeigt, daß, im Gegensatz zur Meinung Steinbergers (dies. Zbl. 36, 275), der Zerfall  $\pi \rightarrow \mu + \nu$  sich durch die Polarisation des Vakuums und die  $PN\mu\nu$ -Wechselwirkung beschreiben läßt. Der Autor erhält ebenfalls die Auswahlregeln für den Prozeß (3) im Falle der skalaren und der vektoriellen Variante der  $\beta$ -Wechselwirkung.

D. K. (Übersetzt aus R. Ž. Fiz., 1955).

**Podgoreckij, M. I. und I. L. Rozenal': Einige Gesetzmäßigkeiten des Zerfalls von Mesonen in drei Teilchen.** Žurn. éksp. teor. Fiz. 27, 129–134 (1954) [Russisch].

Unter einigen speziellen Voraussetzungen werden die in der Arbeit von L. Michel (dies. Zbl. 36, 276) durchgeführten Berechnungen des Energiespektrums der sekundären Teilchen, die beim Zerfall des Mesons in drei Teilchen gebildet werden, im Koordinatensystem, das mit dem primären Teilchen verbunden ist, verallgemeinert. Für den relativistischen und den extrem nichtrelativistischen Fall werden die Energie- und die Winkelverteilung der sekundären Teilchen im Labor-System berechnet. Die Charakteristiken der Verteilung der Inkoplanaritätswinkel der Spuren der  $\pi$ -Mesonen, die beim Zerfall der gekoppelten  $\tau$ -Teilchen entstehen, werden abgeschätzt.

Autoreferat (Übersetzt aus R. Ž. Fiz. 1955, 8575).

**Wilts, Lawrence: Excitation of nuclear rotational states in  $\mu$ -mesonic atoms.** Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd. 29, Nr. 3, 22 S. (1954).

Verf. untersucht die Wechselwirkung, die in  $\mu$ -Mesonenatomen zwischen dem Meson und den Rotationszuständen des Kernes — im Fall stark deformierter Kerne — vorhanden ist. Auf der Grundlage des Bohr-Mottelson-Kernmodells wird der Einfluß dieses Effektes auf das Spektrum des  $\mu$ -Mesons diskutiert. H. Lehmann.

**Cap. F.: Spinorrechnung und ihre Anwendung in der Theorie der Elementarteilchen.** Fortschr. Phys. 2, 207–231 (1954).

A review article on spinor algebra and spinor analysis in the spirit of the early work by van der Waerden and Laporte and Uhlenbeck. Various invariant wave equations, including the Fierz-Pauli equations and some recently deduced by the author and others (F. Cap, this Zbl. 51, 208; H. Donnert, this Zbl. 51, 208; 52, 222, 445; 55, 213) are treated as applications.

M. E. Mayer.

**Glaser, Walter: Licht und Materie in einheitlicher Deutung.** Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-Ber., Abt. II a 163, 215–265 (1954).

Verf. versucht eine einheitliche Theorie von Licht und Materie. Sie beruht auf der Annahme, daß das Lichtquant in eine Kugel von endlichem Radius mit vollkommen reflektierenden Wänden eingeschlossen werden kann. Ein solches Gebilde

soll dann ein Elektron (bzw. anderes Teilchen) darstellen. Dabei kommt natürlich heraus, daß das „Elektron“ sich relativistisch bewegt (denn die Maxwellschen Gleichungen sind ja von vornherein relativistisch invariant und der Verf. benutzt die relativistische Beziehung  $p = E/c$  zwischen Energie  $E$  und Impuls  $P$  des Lichtquanten). Der Verf. zeigt, daß man den Maxwellschen Gleichungen Lösungen entnehmen kann, für welche der Energiefluß durch eine kleine Kugel verschwindet. Diese „Eigenschwingungen“ geben bestimmte Teilchenradien und Drehimpulse für die Elementarteilchen. Dann kann man auch speziell die Dirac-Gleichung herausholen (natürlich: das ist eine invariante Wellengleichung für Teilchen vom Eigendrehimpuls  $\frac{1}{2} \hbar$ ). So originell diese Theorie ist, die Frage nach der Struktur des Elektrons ist nicht beantwortet: Warum z. B. wird die Energie eines Lichtquanten in eine Kugel eingeschlossen? Die vom Verf. vorgeschlagene Verallgemeinerung der Maxwellschen Gleichungen gibt nach Meinung des Ref. hierauf keine Antwort.

H. Kummel.

Jouvet, Bernard: L'électromagnétisme életroneutrinién. J. Math. pur. appl., IX. Sér. 33, 201—262 (1954).

Es wird der Versuch gemacht, das Photon aus einem Neutrino paar wie auch aus einem Elektronen paar aufzubauen.

W. Macke.

### Kernphysik:

• Beckerley, J. G., M. D. Kamen and L. I. Schiff (edited by): Annual Review of Nuclear Science. Vol. 4. Stanford: Annual Reviews, Inc. 1954. IX, 483 p. \$ 7,50.

Die Arbeiten werden, soweit für dies. Zbl. von Interesse, einzeln angezeigt.

• Martin, Ch. N.: Tables numériques de physique nucléaire. Paris: Gauthier-Villars. 1954. VIII, 258 p. 6 Abb.

Nach der Weizsäckerformel werden die Atommassen berechnet und in Tabellen zusammengestellt. [Die Zahlenwerte weichen in den drei letzten Stellen von den in amerikanischen Tabellen (N. Metropolis und G. Reitwieser, Argonne National Laboratory, Chicago 1950) veröffentlichten Werten ab.] Teil I enthält auf solche Weise errechnete Bindungsenergien und Zerfallsenergien; Teil II enthält Tafeln für Kernradien, geometrische Wirkungsquerschnitte ( $\sigma = \pi R^2$ ,  $R = r_0 \cdot A^{1/3}$ ) und andere häufig gebrauchte Kerndaten.

B. Stech.

Kolodziejski, R.: Stöße und Kernkräfte. Material phys. Konferenz in Spala, 1.—14. Sept. 1952, 131—136 (1954) [Polnisch].

Werle, J.: Der Beitrag nichtstatischer Glieder zu den Kernpotentialen. Material phys. Konferenz in Spala, 1.—14. Sept. 1952, 124—130 (1954) [Polnisch].

Salvetti, Carlo: Orientamenti attuali sui modelli nucleari. Rend. Sem. mat. fis. Milano 24, 123—152 (1954).

Skyrme, T. H. R.: A new model for nuclear matter. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A. 226, 521—530 (1954).

Zur Erklärung der zweierlei gemessenen Kernradien wird ein phänomenologisches Modell der Kernmaterie vorgeschlagen. Danach erfüllen die Nukleonen eine Kugel vom Radius  $1.2 \cdot 10^{-13}$  cm, die von einer Mesonenkugel vom Radius  $1.5 \cdot 10^{-13}$  cm umgeben ist. Die Mesonen bilden eine inkompressible Flüssigkeit, in der sich die Nukleonen frei bewegen können abgesehen von geringeren Wechselwirkungen als Folge von Spin-Ladungs-Fluktuationen der Mesonenflüssigkeit.

G. Süßmann.

Jancovici, B. G.: Coulomb energy and nuclear radius. Phys. Review, II. Ser. 95, 389—392 (1954).

Verf. untersucht die Diskrepanz zwischen den Radien für die Protonenverteilung aus den  $\mu$ -mesonischen Atomen ( $1.2 \cdot 10^{-13} \cdot A^{1/3}$  cm) und aus den Spiegelkernen ( $1.45 \cdot 10^{-13}$  cm  $A^{1/3}$ ). Dazu wird nach dem Schalenmodell der Erwartungswert

von  $r^2$  und die Coulombsche Energiedifferenz  $\Delta E_c$  für die Spiegelpaare  $F^{17}/O^{17}$  ( $d$ -Zustand) und  $O^{15}/N^{15}$  ( $p$ -Zustand) berechnet, und zwar unter Berücksichtigung der Austauschterme. Zugrunde gelegt wird das Topfpotential sowie das Oszillatorpotential. Die Diskrepanz konnte teilweise aufgeklärt werden. *G. Süßmann.*

**Inglis, D. R.: Particle derivation of nuclear rotation properties associated with a surface wave.** Phys. Review, II. Ser. **96**, 1059—1065 (1954).

Verf. gibt eine neue Ableitung der von Bohr und Mottelson entdeckten Rotationszustände stark deformierter Atomkerne. Die Bohrsche Annahme einer wirbelfreien Strömung der Kernmaterie wird ersetzt durch das Schalenmodell mit einem klassisch rotierenden anisotropen Oszillationspotential. Auf diese Weise können vielleicht die beobachteten großen Trägheitsmomente der Rotationsspektren erklärt werden. *G. Süßmann.*

**Pniewski, J.: Neue Modellhypothesen über den Atomkern.** Material phys. Konferenz in Spała, 1.—14. Sept. 1952, 175—192 (1954) [Polnisch].

Der Vortrag enthält einen Bericht über das neuere Schalenmodell des Kerns. *G. Süßmann.*

**Sengupta, S.: Nuclear moments and shell structure.** Indian J. theor. Phys. **2**, 121—158 (1954).

Nach einem Überblick über die Systematik der Kernmomente werden auf der Basis des Schalenmodells der Kerne mit Hilfe der möglichen Kopplungsschemen die Abweichungen der Kernmomente vom Ein-Nukleonenmodell diskutiert. *B. Stech.*

**Rapoport, L. P. und V. A. Filimonov: Die statistische Berechnung der Dichteverteilung der Nukleonen und der Schalenaufbau des Kerns.** Žurn. éksp. teor. Fiz. **27**, 243—250 (1954) [Russisch].

Die Verf. berechnen auf der Grundlage des Thomas-Fermi-Modells nach dem Ritzschen Näherungsverfahren durch Variation zweier Parameter (Kernradius und Abfallsbreite) die Verteilung der Materiedichte im Kern. Es wird ein spinabhängiges Yukawa-Potential mit Ortsaustausch zugrunde gelegt (ladungssymmetrisch aber nicht ladungsunabhängig); das Coulombpotential wird vernachlässigt. Es wird ferner untersucht, wie sich die Materiedichte auf die Drehimpuls-Quantenzahlen  $l$  verteilt. Die Übereinstimmung mit dem Schalenmodell ist befriedigend. *G. Süßmann.*

**Sokolov, A. A. und B. K. Kerimov: Zur statistischen Theorie des Atomkerns.** II. Žurn. éksp. teor. Fiz. **26**, 430—438 (1954) [Russisch].

[Teil I, Kerimov, Žurn. éksp. teor. Fiz. **24**, 299 (1953).] Mit Hilfe der statistischen Methode wird die Kopplungsenergie schwerer Kerne berechnet. Es wird vorausgesetzt, daß die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen durch Austausch neutraler Mesonen zweier Arten geschieht. Dabei soll das eine von ihnen pseudoskalar, das andere vektoriell sein. Die Massen der Mesonen gelten als verschieden, wobei das pseudoskalare Meson mit dem  $\pi^0$ -Meson identifiziert wird. Für die Elimination von Dipolgliedern wurde eine Mischung der skalaren und der vektoriellen Wechselwirkung genommen. Bei der Berechnung der Kopplungsenergie galt die Voraussetzung, daß sich die Wellenfunktion jedes der Teilchen trotz der Beimischung von nichtzentralen Kräften als ein Produkt von Funktionen darstellen läßt, von denen eine von den räumlichen, die andere von den Spinkoordinaten abhängt. Die vollständige Wellenfunktion des Kerns wurde als Produkt von Einteilchenfunktionen dargestellt. Bei der Durchführung konkreter Berechnungen wurden die räumlichen Teile der Einteilchenwellenfunktionen durch ebene Wellen ersetzt. Außerdem setzen Verf. der Vereinfachung wegen die Dichte der Verteilung innerhalb des Kerns als konstant und außerhalb gleich Null. Als Ergebnis der Berechnung der Energie des Systems fand man nach dem Übergang von den Wellenfunktionen zu den Dichten einen Ausdruck für die vollständige Energie in Form einer Summe der Glieder der Austausch-Kern-



energie, der Nichtaustauschenergie (die der Abstoßung der Nukleonen entspricht) sowie der kinetischen Energie. Die Coulombsche (Austausch- und Nichtaustausch)-energie und die Oberflächeneffekte wurden nicht berücksichtigt. — Die Grenzen der zulässigen Werte der Kopplungskonstanten wurden aus den folgenden Bedingungen abgeschätzt: 1. die erhaltene Kopplungsenergie muß der Zahl der Nukleonen proportional sein; 2. aus der Gleichung  $dE/dR = 0$  müssen sich die korrekten Radien  $R$  ergeben; 3. der Kern muß stabil sein (das heißt  $d^2E/dR^2 = 0$ ). Die Verff. kommen zu dem Schluß, daß zur Befriedigung dieser Forderungen die Existenz eines vektoriiellen Mesons, das leichter als das  $\pi$ -Meson ist, zugelassen werden muß. Nimmt man z. B. an, daß  $R = 1,48 \cdot 10^{-13} \text{ A}^{1/3} \text{ cm}$ , und setzt für die Masse des  $\pi^0$ -Mesons  $265 m_e$ , für die des vektoriiellen Mesons  $130 m_e$ , so müssen die ihnen entsprechenden Ladungen (genauer gesagt, die Konstanten der Feinstruktur) 0,02 und 0,17 sein. Um dieselben Werte der Konstanten der Feinstruktur für  $R = 1,0 \cdot 10^{-13} \text{ A}^{1/3} \text{ cm}$  zu erhalten, ist für die Masse des vektoriiellen Mesons  $190 m_e$  anzunehmen.

S. R. (Übersetzung aus R. Ž. Fiz. 1955).

**Suffczyński, M.:** Die Blochsche Theorie der paramagnetischen Kernresonanz. Material phys. Konferenz in Spala, 1. – 14. Sept. 1952, 169 – 173 (1954) [Polnisch].

**Goto, Shigeo:** The cut-off method in meson theory. Progress theor. Phys. **12**, 699 – 712 (1954).

In den Ausdrücken für das anomale magnetische Moment der Nukleonen und für die Lebensdauer des neutralen Pions nach der  $PS(PS)$ -Theorie in niedrigster störungstheoretischer Näherung werden die Impulsraumintegrale bei der Nukleonenmasse (mal  $c$ ) abgeschnitten. Hierdurch werden am stärksten die virtuellen Paarprozesse reduziert. Unter Verwendung des durch die Analyse der Kernkräfte nahegelegten Wertes der Kopplungskonstante wird so die Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment stark verkleinert. Hingegen ist der Beitrag der Impulse, die größer als die Elektronenmasse sind, zum anomalen magnetischen Moment des Elektrons in der Quantenelektrodynamik klein.

K. Baumann.

**Morita, Masato and Taro Tamura:** On the binding energy and properties of lower energy levels of  $\text{Li}^6$ . Progress theor. Phys. **12**, 653 – 688 (1954).

Am Kern  $\text{Li}^6$  wurden mit Hilfe des Schalenmodells Bindungsenergie, angeregte Zustände, das magnetische Moment und das Quadrupolmoment bestimmt. Zur Berechnung wurden 2-Körper-Zentralkräfte und Tensorkräfte verwendet, wobei die Daten für die verschiedenen Parameter den Untersuchungen von Feshbach und Schwinger entnommen wurden. Es sei bemerkt, daß im Gegensatz zu den meisten anderen Arbeiten über das Schalenmodell die hier verwendeten Kraftansätze nur Wigner- und Bartlett-Terme enthalten. Während die so berechnete Bindungsenergie mit dem Experiment gut übereinstimmt, zeigen sich bei den angeregten Zuständen Abweichungen vom Experiment. Weiterhin sind (im Gegensatz zu früheren Rechnungen von Schulten und einer neueren Arbeit von Ferrell) die berechneten magnetischen Momente des Grundzustandes zu groß, während die Quadrupolmomente viel zu klein im Verhältnis zum Experiment und den erwähnten Rechnungen sind. Möglicherweise kann diese Diskrepanz durch das Fehlen von Majorana- und Heisenbergkräften in der hier besprochenen Arbeit erklärt werden.

P. Mittelstaedt.

**Achiezer, A. I. und I. Ja. Pomerančuk:** Die Ausstrahlung eines Photons beim Einfang eines schnellen Protons durch deren Kern. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **94**, 821 – 823 (1954) [Russisch].

Es wird die Bremsstrahlung berechnet, die beim Einfang eines schnellen Protons durch einen Atomkern entsteht. Für den partiellen Wirkungsquerschnitt wird eine Formel angegeben, die einen von der Struktur des Protons abhängigen Formfaktor enthält. Es ist interessant festzustellen, daß die experimentelle Untersuchung dieser Bremsstrahlung wichtige Aussagen über den Formfaktor liefern kann. W. Macke.

Levinger, J. S.: Theories of photonuclear reactions. *Ann. Review Nuclear Sci.* 4, 13—32 (1954).

Der Bericht beginnt mit einer knappen Darstellung der allgemeinen Theorie der Wechselwirkung eines Protonen-Neutronensystems mit einem elektrischen Dipolfeld. Es folgen die Ergebnisse über die Photozerlegung des Deuterons; sodann der Kernphotoeffekt in  $\text{Be}^9$ , die Auswahlregeln für den Isotopenspin bei elektrischen Dipolübergängen sowie die Auswertung inverser Reaktionen, bei denen Photonen emittiert werden. Der Hauptteil des Berichtes diskutiert zunächst verschiedene für die Absorption von Lichtquanten mäßiger Energien durch mittlere und schwere Kerne vorgeschlagene Modelle: Kerne aus unabhängigen Teilchen oder aus größeren Untereinheiten, sowie kollektive Modelle; ferner bespricht er die Ergebnisse, die man aus der Wellenfunktion des Grundzustandes allein mittels der Summenregel ableitet. Die Situation bei der Erklärung der Sekundärteilchen photonuklearer Reaktionen wird gestreift; ebenso die beim Kernphotoeffekt für hohe Energien. *K. Baumann.*

Chochlov, Ju. K.: Zur Frage der Dipolübergänge beim Kern-Photoeffekt. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 97, 239—242 (1954) [Russisch].

Das harmonische Mittel des Wirkungsquerschnitts für elektrische Dipolabsorption, das nach Bethe und Levinger nur vom Grundzustand des Kerns abhängt, wird mit Hilfe von antisymmetrischen Eigenfunktionen des Potentialtopfes ausgerechnet. Der als Parameter eingehende Kernradius erhält die richtige Größe, wenn unter der Näherungsannahme, daß der Kernphotoeffekt nur aus elektrischer Dipolabsorption besteht, errechneter und gemessener Wirkungsquerschnitt gleichgesetzt werden. *B. Stech.*

Araújo, J. M.: The effect of nuclear compressibility on the nuclear photoeffect. *Nuovo Cimento, IX. Ser.* 12, 780—798 (1954).

Unter der Annahme, daß die Energiedichte im Kern allein von der lokalen Nukleonendichte abhängt, wird ein hydrodynamisches Zweiflüssigkeitsmodell ähnlich dem Modell von Jensen und Steinwedel angegeben aber unter Berücksichtigung der Kompressibilität der Kernmaterie. Hierdurch wird eine bessere Übereinstimmung mit den experimentellen Photoresonanzenergien erreicht. *B. Stech.*

Morita, Masato, Atsushi Sugie and Shiro Yoshida: Note on the angular distribution of photoreaction. *Progress theor. Phys.* 12, 713—722 (1954).

Die Winkelverteilung bei Photoprozessen kann aus der Reaktionsmatrix erhalten werden. Es werden allgemeine Formeln angegeben, bei denen die Summationen über alle magnetischen Quantenzahlen ausgeführt und Produkte von Kugelfunktionen in Summen über Kugelfunktionen verwandelt wurden. *B. Stech.*

Coester, F.: Influence of extranuclear fields on angular correlations. *Phys. Review, II. Ser.* 93, 1304—1308 (1954).

Zur Behandlung des Einflusses äußerer, zeitabhängiger Felder auf Winkelkorrelationen bei der Aussendung von zwei oder drei sukzessiven  $\gamma$ -Quanten werden Formeln für den Zeitablauf der das System beschreibenden Dichtematrix angegeben. *B. Stech.*

Jahn, H. A.: Direct evaluation of fractional parentage coefficients using Young operators. General theory and  $\langle 422 \rangle$  coefficients. *Phys. Review, II. Ser.* 96, 989—995 (1954).

Allgemeine Ausdrücke für die „fractional parentage“ Koeffizienten  $\langle n | n - 2, 2 \rangle$  werden mit Hilfe normalisierter Young-Symmetrie-Operatoren abgeleitet. Dabei ist der spezielle Fall betrachtet, in dem alle Drehimpulsoperatoren voneinander verschieden sind. Für die  $\langle 4 | 2, 2 \rangle$  Koeffizienten sind explizite Ausdrücke angegeben und auch die Fälle mitbetrachtet, in denen gleiche Drehimpulszustände vorkommen. *B. Stech.*

**Schiff, L. I.:** Nuclear multipole transitions in inelastic-electron scattering. Phys. Review, II. Ser. 96, 765—772 (1954).

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für Kernmultipolübergänge bei der unelastischen Elektronenstreuung an Kernen wird angegeben. Das elektromagnetische Feld des Elektrons wird hierzu nach Vektorkugelfunktionen zerlegt. Die unelastisch gestreuten Elektronen geben Aufschluß über Stärke und Form der Übergangsdichten der Kerne.

*B. Stech.*

**Mjamlin, V. A.:** Der Zerfall des Deuterons bei Elektronenbombardement. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 99, 377—380 (1954) [Russisch].

**Takebe, Hisao:** Beta-ray spectra. I. II. Progress theor. Phys. 12, 561—573, 574—577 (1954).

I. Die Übergangswahrscheinlichkeit beim  $\beta$ -Zerfall für eine beliebige Kombination der 5 relativistisch invarianten Wechselwirkungen wird für beliebigen Verbotensgrad angegeben. Die mit Hilfe von Racah- und Wigner-Koeffizienten abgeleiteten Formeln enthalten die strengen Coulombbeigenfunktionen der Elektronen. — II. Die im Teil I abgeleiteten Formeln enthalten noch unbekannte, vom Kern herrührende Parameter, die nun mit Hilfe des  $j-j$ -Kopplungsschemas auf Eintheilchenmatrixelemente reduziert werden.

*B. Stech.*

**Takebe, Hisao:** Beta-ray spectra. III. Progress theor. Phys. 12, 747—757 (1954).

Die  $\beta$ -Matrixelemente werden unter der Annahme strenger  $j-j$ -Kopplung der Nukleonen auf die Radialintegrale zurückgeführt und die nichtrelativistische Näherung diskutiert.

*B. Stech.*

**Hagedorn, Rolf:** Zur Theorie der Kernverdampfung. Z. Naturforsch. 9a, 259—261 (1954).

Die Rolle der Auswahlregeln bei Kernprozessen wird an Hand der Weißkopfschen Formel für Emissionswahrscheinlichkeiten untersucht.

*W. Macke.*

**Senftle, F. E. and W. R. Champion:** Tables for simplifying calculations of activities produced by thermal neutrons. Nuovo Cimento, Suppl. IX. Ser. 12, 549—571 (1954).

Die Aktivierung von Substanzen im Reaktor läßt sich aus dem Einfangsquerschnitt des Ausgangselementes und dem Neutronenfluß sowie der Zerfallskonstanten des aktivierten Kernes leicht berechnen. Hier sind zur Erleichterung der numerischen Rechnung sowie zur schnellen Übersicht in Tabellen neben Einfangsquerschnitt und Zerfallskonstante auch die Sättigungsaktivitäten von 1 Gramm Substanz bei einem bestimmten Fluß, deren Abfall nach einer Stunde und Kurven der eingehenden Exponentialfunktionen angegeben.

*H. Gaus.*

**Kirchenmayer, A.:** The diffusion length and the age in the heterogeneous nuclear reactor. Bull. Soc. math. phys. Serbie 6, 112—117 und engl. Zusammenfassg. 117 (1954) [Serbisch].

Nach der Zweigruppentheorie der diffusionstheoretischen Näherung eines heterogenen Uranreaktors werden die Diffusionslänge und das Fermialter berechnet. Es werden hierbei nicht die Diffusionsgleichungen gelöst, sondern im Anschluß an die halbempirische Methode von Guggenheim und Pryce [Nucleonics, 11, No. 2, 50 (1953)] durch Mittelwertbildung über die Einzelzelle Näherungswerte gewonnen. Es wird der folgende Aufbau angenommen: Uran, Aluminiumhülle, Kühlmittel (Luft oder eine Flüssigkeit), Bremsmittel.

*F. Cap.*

**Rumsey, V. H.:** Kinetics of piles with reflectors. J. appl. Phys. 25, 1395—1399 (1954).

Es wird eine Integralgleichung für das zeitliche Verhalten von Reaktoren auf der Basis der Zweigruppentheorie aufgestellt. Hierbei kann das verschiedene Verhalten der schnellen und thermischen Neutronen in den verschiedenen Gebieten



des Reaktors berücksichtigt werden und z. B. das Verhalten eines Reaktors mit einer starken Neutronenvermehrung in relativ kleinem Kern und einem großen Reflektor bestimmt werden. Bei bekanntem effektiven Neutronenvermehrungsfaktor ergibt sich die Lösung allein aus der mittleren Lebensdauer der Neutronen. Zur Berechnung dieser werden einfache Formeln abgeleitet, wobei lediglich die stationäre räumliche Neutronenverteilung als bekannt vorausgesetzt wird.

*H. Gaus.*

**Ramakrishnan, Alladi and S. K. Srinivasan:** Two simple stochastic models of cascade multiplication. *Progress theor. Phys.* **11**, 595—603 (1954).

Numerical results are obtained in regard to two simple stochastic models of cascade multiplication. It is shown that these models reveal many interesting features characteristic of more complicated multiplicative processes, like the well known stochastic process of cosmic ray cascades.

*Zusammenfass. d. Autors.*

**Janossy (Janoši), L.:** Untersuchungen zur Kaskadentheorie. I. *Žurn. éksp. teor. Fiz.* **26**, 386—404 (1954) [Russisch].

The cascade theory is formulated as an application of the general theory of stochastic processes. The formalism is applicable not only to the ordinary one-dimensional cascade shower, but also to other complicated phenomena including the angular distribution, although most of discussions are made in reference to the former case. The present formalism is so general that it can treat the multiple production of secondary particles at a collision. Owing to various mathematical devices, the  $G$ -equation previously introduced by the same author is derived in an extended form. Most parts of this paper are devoted to such mathematical methods and few parts are concerned with practical problems.

*S. Hayakawa.*

**Green, H. S. and O. Bergmann:** Core structure in soft component showers. *Phys. Review*, II. Ser. **95**, 516—521 (1954).

Methods are devised for the solution of the integro-differential equations for the evolution and spread of the soft component of the cosmic radiation, avoiding approximations made in earlier work. The behavior of the radial and angular distribution functions is analyzed near their origins and coefficients are found in each case for the  $\delta$ -type singularity arising from particles, which together with their ancestors have suffered no Coulomb scattering. In the case of the radial-distribution function for electrons only, there are additional  $r^{-1}$  and  $\log r$  singularities. The contribution of these singularities is compared with that of the over-all distribution by rough numerical computations. Expressions are given for the over-all distribution functions that are suitable for machine computations.

*Autoreferat.*

**Zacepin, G. T. und I. L. Rozenal':** Zur allgemeinen Theorie des Kern-Kaskaden-Prozesses. *Doklady Akad. Nauk SSR*, n. Ser. **99**, 369—373 (1954) [Russisch].

Die Methode der sukzessiven Generationen, die früher zur Berechnung der eindimensionalen Kernkaskaden-Lawinen unter der Voraussetzung angewandt wurde, daß das Spektrum der sekundären Teilchen durch eine  $\delta$ -Funktion approximiert wird (I. L. Rozenal', dies. Zbl. **43**, 224), wird auf den Fall beliebiger Spektren und voller Querschnitte verallgemeinert. Die Lösung wird durch eine Reihe dargestellt, deren jedes Glied durch das vorhergehende bestimmt ist. Im wichtigen Spezialfall der konstanten Querschnitte (der im Kernkaskaden-Prozeß praktisch verwirklicht ist) hat das  $n$ -te Reihenglied einen einfachen physikalischen Sinn, und zwar stellt es die volle Zahl der Teilchen der  $n$ -ten Generation dar. Im Artikel werden ebenfalls Ausdrücke angeführt, die den Höhengang der kern-nichtaktiven Teilchen (z. B. der  $\mu$ -Mesonen) und der Elektronen beschreiben.

*L. S. (R. Ž. Fiz., 1955, 16043).*

**Roederer, Juan G.:** Die Nukleonen-Kaskade. *Publ. Comisión nac. Energía atom.*, Ser. fis. **1**, 39—73 (1954) [Spanisch].

In dieser Arbeit wird die Theorie der Nukleonenkaskade entwickelt, mit besonderem Augenmerk auf den geographischen Breiteneffekt. Die mathematische Entwicklung beginnt mit den Diffusionsgleichungen unter Verwendung des Budini-Mollerschen Anfangsspektrums. Für die Entwicklung der Nukleonenkaskade werden

explizite Formeln angegeben, die im letzten Teil der Arbeit numerisch ausgewertet sind. Übereinstimmung mit den experimentellen Beobachtungen wird gefunden. Mehrere Kurven zeigen die Nukleonenaabsorption in verschiedenen Energieintervallen. Weiter ist die Änderung der Absorptionslänge mit der Höhe der Energie dargestellt, die Änderung wie auch die Gesamtintensität der Protonen und Neutronen als Funktion der geographischen Breite.

W. Macke.

**Rozental', I. L.:** Über die räumlichen Charakteristiken der kern-aktiven Komponente breiter Schauer von kosmischen Strahlen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 99, 963—966 (1954) [Russisch].

## Bau der Materie:

**DeBenedetti, S. and H. C. Corben:** Positronium. Ann. Review Nuclear Sci. 4, 191—218 (1954).

Zunächst werden aus den Invarianzeigenschaften der Anfangs- und Endzustände die Auswahlregeln für die Zerstrahlung eines Elektron-Positron-Paares abgeleitet. Es folgen die Eigenschaften der Zwei- und Dreiquantenvernichtungsstrahlung. Die Bildung und das Verhalten von Positronium in Gasen wird diskutiert, ebenso das Verhalten von Positronen in Metallen und Isolatoren. Die Beschreibung der Feinstruktur des Positroniumatoms schließt an, sodann die des Zeemaneffekts und schließlich die Löschung der Dreiquantenvernichtungsstrahlung in Magnetfeldern und in Hochfrequenzfeldern.

K. Baumann.

**Ma, S. T.:** On the Coulomb and Hulthén potentials. Austral. J. Phys. 7, 365—372 (1954).

Die aus der Differentialgleichung  $\Delta q + (k^2 - U(r))q = 0$  durch Separation nach Kugelkoordinaten folgende Radialgleichung wird für die Partialwellen mit  $l = 0$  näher betrachtet. Für den Fall des Hulthén-Potentials  $U(r) = -\lambda\mu e^{-\mu r}/(1-e^{-\mu r})$  ( $\mu > 0$ ) kann man eine strenge Lösung erhalten, die für  $\mu \rightarrow 0$  in die für das Coulomb-Potential übergeht. Die gleiche Lösung läßt sich aus einer Fredholmischen Integralgleichung ableiten, deren Kern der Differentialgleichung  $\lambda [d^2/dr^2 + k^2] K(r, r') = U(r) \delta(r - r')$  genügt. Verwendung der Fredholmischen Theorie führt zu einer zwanglosen Beschreibung gebundener Zustände ( $k^2 < 0$ ).

W. Klose.

**Mertens, R.:** Beiträge zur Theorie der Vielfachstreuung von Teilchen. Simon Stevin 30, Suppl., 110 p. (1954) [Holländisch].

Dieser Arbeit über Vielfachstreuung von Teilchen ist die Boltzmannsche Transportgleichung zugrunde gelegt. Die Verteilungsfunktion wird nach Legendrepolyomen entwickelt. Behandelte Spezialprobleme: 1. Vielfachstreuung von Elektronen in Metallschichten [Verf. stellt fest, daß im Fall endlich dicker Schichten (Mehrfachstreuung) eine exakte Lösung nicht möglich ist]. — 2. Vielfachstreuung von Teilchen mit isotropem Einzelstreuungsgesetz. — 3. Vielfachstreuung von Teilchen mit anisotropem Einzelstreuungsgesetz. — Der Zusammenhang mit anderen Arbeiten wird diskutiert. Leider ist diese schöne Arbeit in einer für physikalische Veröffentlichungen ungewöhnlichen Sprache geschrieben.

W. Klose.

**Migdal, A. B.:** Der Einfluß der Vielfachstreuung auf die Bremsstrahlung bei großen Energien. Doklady Akad. Nauk. SSSR, n. Ser. 96, 49—52 (1954) [Russisch].

Wie L. D. Landau und I. Ja. Pomerančuk gezeigt haben [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 92, 535—536 (1953)], wird die Bethe-Heitlersche Theorie der Bremsstrahlung und der Bildung von Paaren für hinreichend große Energien der Teilchen wegen der Vielfachstreuung der Elektronen und Positronen im Medium unanwendbar. Eine Abschätzung des Querschnitts der Bremsstrahlung und der Paarbildung wurde größenordnungsmäßig für sehr große Energien ( $E > 10^{12} - 10^{13}$  eV) durchgeführt. — In der Arbeit wird eine quantitative Lösung der Aufgabe gegeben, wobei die Elektronenenergie nur durch die Bedingung  $E > m c^2$  begrenzt ist. Es wird ein Fall untersucht, in dem die Energie der emittierten  $\gamma$ -Quanten viel kleiner als die Energie der Elektronen ist und daher die klassische Mechanik und die klassische Strahlungstheorie gültig sind. — Trotz der mathematischen Schwierigkeiten ist es dem Autor gelungen, den Ausdruck

$E_{n,\omega} d\Omega d\omega$  für die ins Innere des räumlichen Wirkels  $d\Omega$  im Frequenzenintervall  $d\omega$  abgestrahlte Energie über alle möglichen Bahnen des Teilchens zu mitteln. — Daraus ergibt sich der folgende Ausdruck für den Energieverlust pro Zeiteinheit im Frequenzenintervall  $d\omega$ :  $dE_{\omega}/dt = \{dE_{\omega}/dt\}_0 \Phi(s)$ , wo  $\{dE_{\omega}/dt\}_0 = 4 e^2 q/3\pi c (1 - v/c)$  der gewöhnliche Ausdruck für die emittierte Energie ohne Berücksichtigung der Vielfachstreuung  $s = \frac{1}{4} (1 - v/c) \sqrt{\omega/q}$  ist

$$q = \frac{1}{4} n v \int \sigma(\vartheta, \varphi) \vartheta^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi,$$

$$\Phi(s) = 3s \int_0^\infty e^{-sx} \frac{\cos sx + \frac{\sin sx}{x}}{\operatorname{ch}^2(x/2)} dx + 24s^2 \int_0^\infty e^{-sx} \frac{\sin sx}{\operatorname{sh} x} dx - 6\pi s^2.$$

Für  $s \rightarrow \infty$  gilt  $\Phi(s) = 1 - 48/7s^4 + \dots$ , d. h. für kleine Energien ergibt sich der gewöhnliche Ausdruck; für  $s \rightarrow 0$  gilt  $\Phi(s) \rightarrow 6s$  und

$$dE_{\omega}/dt = (2 e^2/\pi c) \sqrt{q \omega}.$$

Der Autor weist darauf hin, daß aus der Funktion  $\Phi(s)$  für  $s \rightarrow \infty$  die Energie gefunden werden kann, für die der Fehler der gewöhnlichen Formel 50% erreicht. So ergibt sich für Blei bei  $\hbar \omega = \frac{1}{2} E_{Kr}$ , daß  $E_{Kr} = 3 \cdot 10^{12}$  eV. Ju. V. (Übersetzung aus R. Ž. Fiz., 1954).

**Kurnosova (Kurnossowa), L. V. (L. W.): Streuung von Photonen verschiedener Energie an Elektronen.** Fortschr. Phys. 2, 232–273 (1954). Ungekürzte Übersetzung aus Uspechi fiz. Nauk 52, 603 ff. (1954).

The author reviews the theoretical and experimental results concerning Compton scattering, mainly on electrons (theoretical formulae for other particles are also given) published before 1953. M. E. Mayer.

**Janik, J.: Chemische Bindung, Molekül-Polarisation und Neutronenpolarisation.** Material phys. Konferenz in Spala, 1. – 14. Sept. 1952, 200–206 (1954) [Polnisch].

**Amako, Yoshito: Electronic structure of water molecule.** Sci. Reports Tôhoku Univ., I. Ser. 38, 77–84 (1954).

Bei einem angenommenen Bindungsabstand von 0,955 Å und einem Bindungswinkel von  $104^\circ 40'$  wurde das  $H_2O$ -Molekül mit Hilfe der „self-consistent-field“-Methode behandelt, wobei die Molekül-Einelektronenfunktionen durch Linearkombinationen von Atomfunktionen (Slaterfunktionen) dargestellt wurden. Unter Vernachlässigung der 1s-Elektronen des O-Atoms betrugen die Abschirmzahlen 2,275 (O) und 1,00 (H). Die ersten beiden Ionisierungsenergien ergaben sich zu – 8,08 eV und 15,75 eV, während die experimentellen Werte – 12,6 eV und 14,5 eV betragen. Dagegen resultierte ein Dipolmoment von 1,75 D gegenüber dem Gemessenen von 1,84 D. Die auftretenden 3-Zentrenintegrale wurden angenähert.

H. Preuss.

**Roesler, F. C. and J. R. A. Pearson: Determination of relaxation spectra from damping measurements.** Proc. phys. Soc., Sect. B. 67, 338–347 (1954).

Um die Relaxationsspektren von Materialien, insbesondere von Hochpolymeren, aus Dämpfungsmessungen zu bestimmen, kann die „Dämpfungsfunktion“ (der Imaginärteil des komplexen  $E$ -Moduls) benutzt werden. Da die Kreisfunktionen Eigenfunktionen der Integralgleichung der Dämpfung sind, ist eine numerische Lösung dieser Gleichung durch Reihenentwicklung möglich. Man erhält die Koeffizienten der Fourierschen Entwicklung für das gesuchte Spektrum durch Multiplikation der Koeffizienten der Fourierschen Reihe für die Dämpfungsfunktion mit den zugeordneten Eigenwerten. Es wird gezeigt, unter welchen Bedingungen diese Methode, deren Genauigkeit allein durch experimentelle Meßfehler beschränkt ist, eine gültige Lösung ermöglicht. Als Beispiel wird die Bestimmung des Spektrums von Polyisobutylen angegeben.

F. Reutter.

**Makinson, R. E. B. and D. M. Slade: Dipole resonant modes of an ionized gas column.** Austral. J. Phys. 7, 268–278 (1954).

Die Dipolresonanzfrequenzen einer radial begrenzten Plasmasäule mit radial variabler Elektronendichte werden mittels einer quasistatischen „Stufenmethode“ berechnet. Für den Fall verschwindender Erregungsfeldstärke ergibt sich statt der



einen Tonks-Langmuir-Frequenz homogener unbegrenzter Medien hier ein ganzes Spektrum von Dipolresonanzen. Die Lage der Resonanzstellen wird bestimmt durch die Form der Dichteverteilung der Elektronen und ist weitgehend unabhängig von den Dimensionen der Plasmasäule. Unter Vernachlässigung von Strömungsgeschwindigkeit und Stoßdämpfung werden explizite Werte der Resonanzfrequenzen für die parabolische Elektronendichteverteilung in einem zylindrischen Gasentladungsrohr und für die Gaußverteilung eines Meteorschweifes berechnet. Die erhaltenen Spektren stimmen qualitativ mit den experimentellen Reflexionsspektren überein. Die bisher formal berechneten Werte für Dämpfung und Energieverlust bei verschwindendem Realteil der DK liegen i. a. zu hoch. Ursachen hierfür werden diskutiert.

*H. Rother.*

**Gercenštejn, M. E.:** Die dielektrische Permeabilität des Plasmas, das sich im stationären Magnetfeld befindet. *Žurn. eksper. teor. Fiz.* **27**, 180–188 (1954) [Russisch].

Es wird der Tensor der komplexen dielektrischen Permeabilität eines sich im äußeren stationären Magnetfeld befindlichen Plasmas berechnet. Dabei ist die dielektrische Permeabilität  $\epsilon$  definiert als das Verhältnis der komplexen Amplituden des Gesamtstromes  $(1 + 4\pi) i \mathcal{E} / \epsilon t = j$  zum Verschiebungsstrom  $i \mathcal{E} / \epsilon t$ , wobei  $\mathcal{E}$  das elektrische Feld und  $j$  die Stromdichte sei. Bei der Berechnung von  $\epsilon$  wird die Wärmebewegung der Elektronen berücksichtigt.

*R. Lüst.*

**Fraser, P. A.:** The ionization maintained in a gas before a thin plane uniform circular source of ionizing particles. *Amer. J. Phys.* **22**, 220–223 (1954).

**Lifšic, E. M.:** Theorie der molekularen Anziehungskräfte zwischen kondensierten Körpern. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **97**, 643–646 (1954) [Russisch].

The presence of attractive London-van der Waals forces between neutral atoms leads in a natural way to attractive forces between macroscopic bodies, e. g. two plane parallel plates, whose surfaces are at a small distance apart. The calculation of these forces by summation of the well-known interaction of the constituting atoms, though legitimate for the unrealistic case of gases, is unsatisfactory for solid bodies. The author has shown that, since the distance between the bodies is assumed to be large compared to interatomic distances, the force can be derived on a purely macroscopic basis starting from a calculation of the fluctuating electromagnetic field between the bodies according to a method developed by Rytov. In this paper the case of two half-spaces separated by a distance  $l$  is considered for zero temperature; the results only are given. After elimination of a diverging term, independent of  $l$  and connected with the selfforce, a relatively simple expression for the force is obtained. It is a double integral depending on the values of the dielectric constant  $\epsilon$  along the positive imaginary axis in the  $\omega$ -plane. As is known these values can be found by integration from the values of the imaginary part of  $\epsilon$  for real values of  $\omega$ . Several limiting cases of the general result are considered. In the case that  $\epsilon$  is close to 1, London's result for the interaction between atoms is obtained for  $l$  small compared to the characteristic wavelengths, for large  $l$  the correction due to retardation first found by Casimir and Polder results. In the case of two metal plates the expression for the force reduces to that of Casimir (this Zbl. **31**, 190) as a first approximation. It is shown that for Ag the correction to this approximation is small for  $l \gg 5500 \text{ \AA}$ . As to order of magnitude the theoretical result is confirmed in experiments with quartz plates by Abrikosova and Derjagin (*Doklady Akad. Nauk SSSR* **90**, 1055–1058 (1953)). [Cf. also for a recent confirmation by Prosser and Kitchener, *Nature* **178**, 1339–1340 (1956)].

*B. R. A. Nijboer.*

**Witten, Louis:** A generalization of Yang and Lee's theory of condensation. *Phys. Review*, II. Ser. **93**, 1113–1135 (1954).

Yang and Lee's theory (this Zbl. **48**, 433) of phase transitions is extended to include a wider class of potential energy functions. In particular, it is shown that the theory does not require a potential with a hard core; the repulsive part of the potential need only be greater than  $1/v^n$ ;  $n \geq 11,4$ .

*Author's summary.*

**Ikeda, Kazuyoshi:** On the theory of condensing systems. *Progress theor. Phys.* **11**, 336—339 (1954).

Die Kondensationstheorie von J. Mayer (vgl. M. Göppert-Mayer und J. Mayer, *Introduction to Statistical Mechanics*, New York 1940) wird dadurch modifiziert, daß die Beiträge der verschiedengroßen Molekülschwärme (clusters) zur Zustandssumme in mathematisch verschiedener Weise behandelt werden.

*G. U. Schubert.*

**Zil'berman, G. E.:** Über einige Eigenschaften des schwach-nichtidealen Elektronengases. *Žurn. éksper. teor. Fiz.* **27**, 549—556 (1954) [Russisch].

It has been investigated how far it is permitted to regard the interaction of electrons as perturbation. For  $T = 0$  the free energy of a weak-nonideal electron gas and its magnetic susceptibility have been evaluated. It has been shown that the oscillation period of the susceptibility does not depend so much upon the chemical potential, as seen in the case of the ideal electron gas. As long as the interaction is considered as a small perturbation, no anomaly such as the small effective mass has been found.

*T. Nishiyama.*

**Horie, Chûji and Yukio Ōsaka:** Note on Ziman's quantum hydrodynamics. *Sci. Reports Tôhoku Univ., I. Ser.* **38**, 179—184 (1954).

Zimans Quantenhydrodynamik (dies. Zbl. **51**, 227) hat den Nachteil, daß die Wechselwirkung zwischen Phononen und Rotonen nicht als klein angesehen werden kann (F. A. Kaempfer, dies. Zbl. **55**, 440). Verff. gehen durch eine Transformation zu neuen „Phononen“ und „Rotonen“ über und erreichen, daß der neue Wechselwirkungsterm klein ist. Das neue Rotonenspektrum hat dieselbe Form wie das alte, aber andere Konstanten. Ähnliche Überlegungen wurden unabhängig von Alcock und Kuper durchgeführt (dies. Zbl. **67**, 235).

*G. Höhler.*

**Landau, L. D. und I. M. Chalatnikov:** Über die anomale Absorption des Schalles in der Nähe von Punkten des Phasenüberganges zweiter Art. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* **96**, 469—472 (1954) [Russisch].

Aus allgemeinen thermodynamischen Überlegungen wird für willkürliche Phasenübergänge zweiter Art erschlossen, daß die Relaxationszeit bei Annäherung an den  $\lambda$ -Punkt (von niedrigen Temperaturen her) rasch zunimmt, was zu einer anomalen Absorption des Schalles in der Nähe (aber unterhalb) des  $\lambda$ -Punktes führen muß. Für die Relaxationszeit findet man:  $\tau = \text{Const} (T_\lambda - T)$ . Eine allgemeine Formel von Leontovič und Mandelstam gestattet, den Zusammenhang zwischen dem Koeffizienten der Schallabsorption und  $\tau$  herzuleiten. Der in das Resultat eingehende Sprung der Schallgeschwindigkeit im  $\lambda$ -Punkt läßt sich durch die Größe des Sprunges der Wärmekapazität ausdrücken. Die Ergebnisse werden auf den Fall des  $\lambda$ -Punktes im Helium II angewendet. Hier hat Chase [*Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **220**, 116 (1953)] eine anomale Zunahme der Absorption des gewöhnlichen Schalles beobachtet. Die aus diesen Experimenten gefolgerten Werte der Relaxationszeit  $\tau$  befolgen genau die von obiger Formel gegebene Temperaturabhängigkeit.

*B. R. A. Nijboer.*

**Morita, Akira:** On the hydrodynamics of He II in the phonon region. *Sci. Reports Tôhoku Univ., I. Ser.* **38**, 19—30 (1954).

Die Gleichungen des Zweiflüssigkeitsmodells für He II im Phononengebiet werden aus den hydrodynamischen Gleichungen durch Abspaltung der Schallwellenteile und nachträgliche Quantisierung gewonnen. (Vgl. dazu London, *Superfluids II*, S. 111f., dies. Zbl. **58**, 234.) Die freie Weglänge der Phononen im Temperaturgebiet  $T \approx 1^\circ \text{K}$  wird berechnet.

*W. Brenig.*

**Feynman, R. P.:** Atomic theory of liquid helium near absolute zero. *Phys. Review, II. Ser.* **91**, 1301—1308 (1953).

**Feynman, R. P.:** Atomic theory of the two fluid model of liquid helium. *Phys. Review, II. Ser.* **94**, 262—277 (1954).

Die beiden Arbeiten befassen sich mit dem dynamischen Verhalten des He II. Jede makroskopische Bewegung entspricht quantenmechanisch einer Überlagerung des Grundzustandes mit geeigneten angeregten Zuständen. Landau hatte darauf hingewiesen, daß man die Superfluidität verstehen kann, wenn man annimmt, daß es tiefangeregte Zustände gibt, die im wesentlichen longitudinalen Schallwellen entsprechen (Phononen) und für welche  $\vec{r} = 0$  ist, während die den transversalen Schwingungen entsprechenden Rotonenzustände eine endliche Anregungsenergie besitzen. Es wird nun versucht, eine quantenmechanische Begründung zu geben. Wenn  $\varphi$  die Wellenfunktion des Grundzustandes ist, dann wird ein Typ von angeregten Zuständen untersucht, für dessen Wellenfunktion der Ansatz

$$(1) \quad \psi = \sum f(r_i) \cdot \varphi$$

gemacht wird. Für das Bosegas ohne Wechselwirkung ist (1) exakt. Bei beliebiger Wechselwirkung macht (1) die Energie zum Minimum, wenn  $f(x)$  der Gleichung

$$(2) \quad E \int p(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = -(\hbar^2/2m) \Delta f(\mathbf{r})$$

genügt. Dabei ist  $p(\mathbf{r})$  die Korrelationsfunktion für die Teilchenabstände, die sich z. B. aus der Intensität der Röntgenstreuung bestimmen läßt. Die Lösungen von (2) sind  $f(\mathbf{r}) = e^{ik\mathbf{r}}$ . Für die Energie erhält man dann  $E(k) = \hbar^2 k^2/2m S(k)$ , wobei  $S(k)$  die Fouriertransformierte von  $p(\mathbf{r})$  ist. Vernünftige Annahmen über  $p(\mathbf{r})$  liefern ein  $E(k)$ , das für kleine Werte von  $k$  linear ansteigt, und dann noch einmal durch ein Minimum hindurchgeht. Die Zustände in der Nähe des Minimums werden mit den Landauschen Rotonen identifiziert.

H. Koppe.

Haar, D. ter: Lambda transition of liquid helium. Phys. Review, II. Ser. **95**, 895—897 (1954).

Es wird gezeigt, daß man den Feynmanschen Ansatz für die Zustandssumme des Heliums erhält, wenn man die Näherung

$$e^{-\beta(T+V)} = e^{-\beta V} \cdot e^{-\beta T}$$

macht; wobei  $T$  der Operator der kinetischen Energie und  $V$  der Operator der potentiellen Energie ist.

H. Koppe.

Gurevič, A. V.: Über die Zerstörung der Supraleitung von Häutchen im Magnetfeld. Žurn. éksp. teor. Fiz. **27**, 195—207 (1954) [Russisch].

Die Oberflächenenergie in Supraleitern wird an Hand der Landau-Ginzburgschen Theorie [Žurn. éksp. teor. Fiz. **20**, 1064 (1950)] mit größerer Genauigkeit als bisher berechnet. Der Vergleich der daraus folgenden Abhängigkeit des kritischen Feldes von der Schichtdicke in dünnen supraleitenden Schichten mit experimentellen Resultaten Zavarickijs zeigt befriedigende Übereinstimmung. Eine von Zavarickij festgestellte Diskrepanz kann auf die mangelnde Genauigkeit früherer Auswertungen zurückgeführt und behoben werden.

M. R. Schafroth.

## Fester Körper:

Sosnowski, L.: Aktuelle Probleme der Festkörperphysik. Material phys. Konferenz in Spała, 1.—14. Sept. 1952, 211—219 (1954) [Polnisch].

Pitsch, Wolfgang und Kurt Lücke: Zur Theorie der elastischen Nachwirkung in kohlenstoffarmen  $\alpha$ -Eisen bei Torsion. Z. Phys. **139**, 413—424 (1954).

Die theoretischen Überlegungen von Polder [Philips Res. Rep. **1**, 5 (1945)] zur Snoek-Relaxation von Kohlenstoffatomen in  $\alpha$ -Fe werden auf die Schubverformung von Einkristallen und die Torsion von vielkristallinen Drähten angewandt. Beim letztgenannten Problem beschränkt sich die Diskussion auf die Grenzfälle, in denen alle Körner entweder in gleicher Weise verspannt oder in gleicher Weise gedehnt werden. Besonders diskutiert wird der Einfluß einer  $\langle 110 \rangle$ -Textur der Drähte. Torsionsversuche an kohlenstoffbeladenen Eisendrähnen ergeben näherungsweise



Übereinstimmung mit den Rechnungen; experimentell wird gefunden, daß 0,01 Gew.-% Kohlenstoff eine Dämpfung  $Q^{-1} = 0,0075$  ergibt. *A. Seeger.*

**Postnikov (Postnikow), V. S. (W. S.): Relaxationsercheinungen in deformierten Metallen und Legierungen.** Fortschr. Phys. **2**, 309—328 (1954). Ungekürzte Übersetzung aus Uspechi fiz. Nauk **53**, Nr. 1, 87—108 (1954).

Im ersten Teil der Arbeit wird ein Überblick über die formale Theorie der unelastischen Erscheinungen gegeben. Im einzelnen werden behandelt: 1. Die Erweiterung des Hookeschen Gesetzes durch Geschwindigkeitsglieder und die Einführung des komplexen Elastizitätsmoduls. 2. die Boltzmannsche Theorie der Nachwirkung und das Relaxationsspektrum und 3. die sog. thermodynamische Theorie der Relaxation, die einen Relaxationsparameter (Reaktionslaufzahl) einführt. — Im zweiten Teil der Arbeit wird eine Reihe von Relaxationsprozessen kurz besprochen, die bei Metallen und Legierungen von Bedeutung sind, und zwar die Wärmeleitung, die Diffusion, die Vorzugsverteilung von Atomen in einem Spannungsfeld und die Relaxation in geordneten Legierungen (Gorski). Abschließend wird in enger Anlehnung an Zener und Mitarbeiter das Problem der Relaxation durch Korngrenzen und Versetzungen gestreift. *A. Seeger.*

**Whipple, R. T. P.: Concentration contours in grain boundary diffusion.** Philos. Mag., VII. Ser. **45**, 1225—1236 (1954).

Es wird vielfach beobachtet, daß die Diffusion von Fremdatomen in den Korngrenzen rascher als im Korninnern erfolgt. Die vorliegende Arbeit gibt die mathematische Behandlung eines vereinfachten Modells (die Konzentrationsabhängigkeit der Diffusionskonstanten wird vernachlässigt): Ein Halbraum mit kleiner Diffusionskonstante wird durch eine senkrecht zur Oberfläche liegende dünne Schicht mit großer Diffusionskonstante zweigeteilt. Für das Eindiffundieren von der Oberfläche des Halbraums her wird der Konzentrationsverlauf als Funktion von Ort und Zeit analytisch und in einer Anzahl von Schaubildern angegeben. *A. Seeger.*

**Fukuda, Yoshiichi and Yukio Osaka: Order-Disorder transition and lattice vibration of binary alloys.** Sci. Reports Tôhoku Univ., I. Ser. **38**, 185—189 (1954).

Die Ordnungs- und Unordnungsumwandlung in  $\beta$ -Messing wird mit Hilfe der ersten Betheschen Näherung untersucht, wobei der Einfluß der Gitterschwingungen mit einem Einstein-Modell berücksichtigt wird. Der Einfluß der Gitterschwingungen hängt vor allem von den zweiten Ableitungen der interatomaren Potentiale am Gleichgewichtsabstand ab und kann unter Umständen beträchtlich sein. Insbesondere wird die Spitze im Temperaturverlauf der spezifischen Wärme am Umwandlungspunkt ausgeprägter, was in Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen ist. *A. Seeger.*

**Línek, Allan: The determination of the temperature factor.** Czechosl. J. Phys. **4**, 26—33 (1954).

Verf. versucht, eine Methode zu entwickeln, mit deren Hilfe aus der in Beugungsexperimenten am Kristall ermittelten Dichte-Funktion der Kristallelektronen Schlüsse auf die thermische Bewegung der Atome des Kristalls gezogen werden können. Besonders beachtet werden solche Fälle, in denen diese Bewegung stark anisotrop ist. Als Beispiel wird Seignettesalz diskutiert. *G. Heber.*

**Laval, J.: Théorie de la diffusion des rayons X par les cristaux. I. II.** J. Phys. Radium **15**, 545—558, 657—666 (1954).

1. Die bekannten Theorien der Wärmeschwingungen in Kristallen werden kritisch diskutiert. Im Gegensatz zu ihnen wird die Hamiltonfunktion des linearen Oszillators direkt quantisiert, ohne sie vorher in zwei Summanden zu zerlegen. So erhält man analog der Kontinuums-theorie von Brillouin fortschreitende (anstatt stehender) Wellen der thermischen Vibration. Sodann wird das Streuvermögen  $\bar{\omega}_n$  der „Ordnung“  $n$  als Verhältnis der pro Raumwinkleinheit und Elektron gestreuten

Intensität  $J_n$  zur Primärintensität definiert dadurch, daß bei diesem Beugungsakt insgesamt  $n$  Phononenquanten im Kristall umgesetzt werden. Da diese Phononen keinesfalls an individuelle Elektronen gebunden sind, ist jeder Intensitätsanteil  $J_n$  in sich kohärent, zeigt eine Dopplerverschiebung und erzeugt für  $n \neq 0$  außerhalb der reziproken Gitterpunkte  $b_h$  Reflexe. Doch bestehen keine Phasenbeziehungen zwischen den einzelnen  $J_n$ . Mittelt man über alle harmonischen Oberschwingungen der 3  $N$  möglichen Grundfrequenzen ( $N$  = Zahl der Atome im Kristall, die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes ist vorausgesetzt und die übliche Forderung erhoben, daß die einzelnen Atome starr in sich vibrieren), so treten noch weitere Korrektursummanden gegenüber der konventionalen Interferenztheorie auf. Weil sie proportional sind zu  $b_h^4$ , sind sie aber höchstens in den äußersten Reflexen bedeutungsvoll und auch dort nur bei Temperaturen dicht unter dem Schmelzpunkt. — II. In Fortsetzung von Teil I wird die Konvergenz der in Form von Potenzreihen errechneten  $\bar{\omega}_n$  und  $J_n$  bewiesen. Verteilt man die Energien  $m \hbar \nu_i$  der 3  $g$  thermischen Grundfrequenzen  $\nu_i$  ( $g$  ist die Zahl der Atome in einer Gitterzelle) nach der quantentheoretischen Häufigkeitsfunktion des linearen Oszillators, so erhält man als mittleres Streuvermögen  $\bar{\omega}_n$  der Ordnung  $n$

$$\bar{\omega}_n = \frac{1}{N_0} \frac{1}{n!} \left[ 3 \frac{b^2}{\mu} \left( \frac{\bar{W}_i}{v_i^2} \right) \right]^n |\Phi_n|^2 \quad \text{mit} \quad \bar{W}_i = \hbar \nu_i \left[ \frac{1}{\exp(\hbar \nu_i / k T)} - 1 + \frac{1}{2} \right]$$

$$\Phi_n = \sum_j f_j H_{0j} \beta_{i_1}^j \cdot \beta_{i_2}^j \cdots \beta_{i_n}^j \exp(2 \pi i (b \cdot x_j)).$$

Die Summe ist über alle Atome  $j$  in der Gitterzelle zu nehmen.  $f_j$  ist ihre jeweilige Atomamplitude (falls sie ruhen).  $x_j$  die Lage ihres Schwingungsmittelpunktes.  $N_0$  ist die Zahl der Elektronen in einer Gitterzelle.  $H_{0j}$  die Temperaturfaktoren von Debye-Waller. Der reziproke Vektor  $b$  spannt den Fourierraum auf.  $\mu$  ist die Masse einer Gitterzelle. Die  $\beta^j$  sind im wesentlichen Richtungskosinusse zwischen  $b$  und Schwingungsamplitude. Bei nicht zu hohen Temperaturen tritt merklich außerhalb des reziproken Gitterpunktes  $b_h$  nur  $\bar{\omega}_1$  auf und in diesem wieder nur die 6 Fundamentalschwingungen niedrigster Frequenz des akustischen Zweiges. Auf die Bedeutung der Röntgenstrukturuntersuchung der Extra-Laue-spots zur Gewinnung der Elastizitätskonstanten über den Weg der Bornschen dynamischen Matrix wird hingewiesen.

R. Hosemann.

**Gevers, Rudolf:** L'intensité des rayons X diffractés par des cristaux à empilement compact avec des „erreurs d'empilement“. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 1827—1829 (1954).

Jagodzinski hatte in Acta crystallogr. **2**, 208 (1949) die diffuse Komponente der Intensitätsfunktion eines Kristalles mit dichtester Kugelpackung und eindimensionaler Fehlordnung errechnet. Der dort auftretende nichtkristalline Gitterfaktor lautete

$$Z^{1/2} r = V - V^* - 1 \quad \text{mit} \quad V = \sum_{r=1}^k \frac{1}{2} C_r (1 - x_r e^{iA})^{-1}.$$

Dabei sind die  $x_r$  Wurzeln der folgenden charakteristischen Gleichung (1)  $F(x) = \sum_{p=0}^k a_p x^{k-p} = 0$  und die  $C_r$  Lösungen von (2)  $\sum_{r=1}^k C_r x_r^m = P_m - \frac{1}{2}$ , während die  $a_p, P_m$  bekannt sind. Gevers gelingt eine Umformung derart, daß der Gitterfaktor nun explizite von den  $a_p, P_m$  abhängt, die Lösung von (1) und (2) damit also vollzogen ist. Er findet mittels der Hornerischen Regel:

$$V = \left( \sum_{p=0}^k \beta_p e^{iAp} \right) \left/ \sum_{p=0}^k a_p e^{iAp} \right. \quad \text{mit} \quad \beta_p = \sum_{m=0}^p a_m \left( \frac{1}{2} P_{p-m} - \frac{1}{2} \right).$$

R. Hosemann.

**Ramachandran, G. N.:** X-ray anti-reflections in crystals. II. Calculation of the integrated reflection and integrated anti-reflection for an internal reflection. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **39**, 65—80 (1954).

(Teil I, s. dies. Zbl. **47**, 234.) M. v. Laue hat 1949 mit Hilfe der dynamischen Gittertheorie die Grundgleichungen eines in einen idealen Einkristall einfallenden Wellenfeldes errechnet. Diese Gleichungen benutzt Verf. für den Spezialfall, daß auch das an der benutzten Netzebene reflektierte Wellenfeld durch den Kristall durchdringen muß (sog. Lauefall) und berechnet erstmalig in Strenge die integrale Intensität  $R_y$  bzw.  $T_y$  des auf der Rückseite des Kristalls wieder austretenden reflektierten bzw. parallel zum Primärstrahl mit anomaler Absorption verlaufenden Wellenfeldes für den Fall, daß der normale Absorptionskoeffizient besonders klein bzw. besonders groß ist gegenüber der im Reflex wirksamen Strukturamplitude. Im ersten Fall läßt sich  $R_y$  und  $T_y$  durch Besselfunktionen ausdrücken und entartet im zweiten Fall in Gleichungen, die aus der sog. kinematischen Gittertheorie wohlbekannt sind. In der Korpuskelsprache ausgedrückt hat man es im ersten Fall mit einer elastischen Vielfach-, im letzten Fall mit einer elastischen Einfach-Streuung zu tun.

*R. Hosemann.*

**Buerger, M. J.:** The diffraction symmetry of twins. Anais Acad. Brasil. Ci. **26**, 111—121 (1954).

Mallards empirische Theorie der Neigung zu Zwillingbildung in Realkristallen wird erweitert. Diese Neigung ist um so größer, je mehr Atomlagen der Zwilling mit dem Original gemeinsam hat. Im Röntgendiagramm entstehen einige vorher „verbotene“ Reflexe. Die vorgetäuschte Raumgruppensymmetrie des irrtümlicherweise als Einkristalldiagramm angesprochenen Röntgenbildes zeigt neben den Symmetrieelementen der Kristallindividuen zusätzlich diejenigen der Operation nach dem Zwillingsgesetz. Die Punktgruppe des Zwillings kann höher, gleich oder niedriger sein als diejenige eines Einkristalls. Im allgemeinen wird eine Schraubenachse durch eine Drehachse und eine Gleitspiegelebene durch eine Spiegelebene ersetzt. Zwillinge mit sog. „abgeleiteten“ Strukturen bieten die größten Schwierigkeiten. Diese abgeleiteten Strukturen lassen sich aus einer Grundstruktur z. B. durch Unterdrückung einer oder mehrerer Symmetrieeoperationen gewinnen. Sie treten z. B. als Tief-temperaturformen eines bei höherer Temperatur eine Grundstruktur zeigenden Einkristalles auf, aber auch bei Doppelsalzen. Eine Reihe von Beispielen veranschaulicht die allgemeinen Gesichtspunkte. Vor allem bei der Auswertung von Diagrammen mit nur wenigen systematischen Auslöschungen wird angeraten, eine mögliche Zwillingsbildung im Auge zu behalten.

*R. Hosemann u. D. Joerchel.*

**Grenville-Wells, H. J.:** A graphical method of evaluating trigonometric functions used in crystal structure analysis. I. H. J. appl. Phys. **25**, 485—490 (1954).

Eine graphische Methode zur Bestimmung von Struktur Faktoren der Form:

$$F(h \cdot k \cdot 0) = \sum_{r=1}^n f_r(h \cdot k \cdot 0) \frac{\sin}{\cos} 2\pi(h x_r + k y_r)$$

oder von Ausdrücken für die Elektronendichte der Form:

$$\varrho(x y) = \sum_h \sum_k F(h \cdot k \cdot 0) \frac{\sin}{\cos} 2\pi(h x + k y)$$

wird angegeben und an Beispielen erläutert. Durch den Ursprung einer in die (001) Ebene projizierten Elementarzelle werden Normalen zu den interessierenden Netzebenen ( $h k 0$ ) gelegt. Die „( $h k 0$ )-Linien“ werden mit einer geeigneten sin- bzw. cos-Skala versehen. Befindet sich nun die Projektion eines Atoms am Ort ( $x y$ ), so schneidet der Kreis, der durch (0 0) und ( $x y$ ) geht, dessen Mittelpunkt in ( $\frac{1}{2} x, \frac{1}{2} y$ ) liegt, die ( $h k 0$ )-Linien bei  $\sin(h x + k y) 2\pi$  bzw. bei  $\cos 2\pi(h x + k y)$ . Wird so für jedes Atom ein Kreis gezogen, und werden die Phasen sin, cos mit den theoretischen Werten  $f(h k 0)$  multipliziert, die jeweils auf einer ( $h k 0$ )-Linie liegenden



Werte addiert, so folgen unmittelbar die gesuchten  $F(hk0)$  mit einem Schlage. Das Verfahren kann leicht umgekehrt zur Bestimmung der Elektronendichte angewendet werden. Wird grundsätzlich vermittels einer affinen Transformation eine quadratische Elementarzelle zugrunde gelegt, so kann das Verfahren mit Hilfe von „Standart-Auswertblättern“ außerordentlich rationell gestaltet werden.

*R. Bonart u. R. Hosemann.*

**Jahrreiss, Heribert:** Über Flächengitterwirkungen bei Elektronenbeugungsuntersuchungen an verschiedenen Metallschichten. *Ann. der Physik*, VI. F. **14**, 319—340 (1954).

Auf Steinsalz-Einkristallplättchen wird im Vakuum Nickel aufgedampft und nach Weglösung des NaCl von den so entstandenen Folien werden in Reflexion oder Durchstrahlung bei 40 kV Elektronenbeugungsaufnahmen gemacht. Man beobachtet neben den Reflexen eines Wirts-Einkristalls und Debyelinien des Kristallpulvers die Reflexe der vier 111 Primärzwillinge sowie bisweilen auch diejenigen der 16 Zwillinge dieser Primärzwillinge, obwohl die Reflexe bei ausgerichteten Netzebenen nicht in reflexfähiger Lage stehen. Hieraus kann geschlossen werden, daß sich die Netzebenen in der Ni-Folie wellen und durchbiegen und dies um so mehr, je dünner die Folie und je größer das Loch des Präparathalters ist (sog. „Gitterverwacklung“). Man beobachtet auch Reflexe eines hexagonalen Gitters, deren Stäbchenform zeigt, daß es sich um lamellare sog. „Puffergitter“ zwischen benachbarten Zwillingen handelt. Wenn sich das Gitter im Fernfeld um bestimmte Achsen dreht, z. B. um eine zur mittleren Folienoberfläche parallele Würfelkante, so bewirken diese Stäbchen linienförmige Verbindungen zwischen benachbarten Reflexen. Diese sind entweder gerade oder girlandenförmig und werden unter einfachen Voraussetzungen in guter Übereinstimmung mit dem Experiment berechnet. Nicht berücksichtigt ist die Interferenzwirkung zwischen benachbarten Zwillingen, durch die stäbchenförmige Interferenzmaxima gleichfalls entstehen können, die nur von den Gitterstörungen, nicht aber von der Dicke der Lamellen abhängen.

*R. Hosemann.*

**Sjölander, Alf:** On the scattering of slow neutrons by crystal near the Bragg angles. *Ark. Fys.* **7**, 375—390 (1954).

Es wird die Streuung von Neutronen an kubischen Kristallen unter Berücksichtigung der thermischen Bewegung des Gitters untersucht. Dabei werden Rechnungen anderer Autoren über die Beugung von Röntgenstrahlen auf die Neutronenstrahlung übertragen. Die Eigenschwingungen des Gitters werden durch die Elastizitätskonstanten des Kristalls ausgedrückt. Für den Wirkungsquerschnitt in Richtung maximaler Verstärkung (Laue-Bedingung) ergibt sich dieselbe Formel wie für Röntgenstrahlung, sofern die Neutronengeschwindigkeit groß gegen die Schallgeschwindigkeiten im Kristall ist. Bei kleineren Geschwindigkeiten geht die Neutronen-Geschwindigkeit explizit ein. Es werden noch allgemeine Zusammenhänge zwischen Streurichtung und Elastizitätseigenschaften bei anisotropen Kristallen angegeben.

*H. Gaus.*

**Belov, N. V.:** Raumgruppen mit kubischer Symmetrie. *Trudy Inst. Kristallogr.* **9**, 21—34 (1954) [Russisch].

In Anlehnung an eine ursprünglich von E. S. Fedoroff entwickelte Methode der Ableitung der Raumgruppen werden die Gruppen kubischer Symmetrie in anschaulicher Weise mit Hilfe von Packungen von Würfeln mit den fünf verschiedenen Symmetrien  $O_h - m\bar{3}m$ ,  $O - 4\bar{3}2$ ,  $T_d - m\bar{3}$ ,  $T_h - 4\bar{3}m$  und  $T - 2\bar{3}$  abgeleitet. (Nach deutscher Übersetzung referiert.)

*W. Nowacki.*

**Subnikov, A. V.:** Was ist Homologie der Kristalle? *Trudy Inst. Kristallogr.* **9**, 35—42 (1954) [Russisch].

Unter Homologie versteht man in der Kristallographie die Eigenschaft der Figuren, durch lineare homogene Substitution in sich überzugehen. In Matrizenform geschrieben  $x = Ay$ . Die Symmetrien der Kristalle sind orthogonale Trans-

formationen und somit spezielle Homologien. Am Beispiel eines monoklinen Kristalls wird die Homologie erläutert. Durch vergleichende Betrachtung der Regelmäßigkeiten der physikalischen Eigenschaften zeigt der Verf., daß „der Begriff der Homologie sich in der Kristallographie nur unter der Bedingung verwenden läßt, daß die Kristalle nur als rein geometrische Figuren und nicht Figuren, die mit bestimmten physikalischen Eigenschaften ausgerüstet sind, betrachtet werden“.

*J. J. Burckhardt.*

**Okada, Shôzô:** Electronic states in a one dimensional crystal lattice having a defect. Sci. reports Tôhoku Univ., I. Ser. **38**, 171—178 (1954).

In Fortsetzung einer früheren Arbeit [T. Hayasi und S. Okada: Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. Ser. **37**, 331—338 (1953)] werden die Eigenfunktionen eines Elektrons in einem eindimensionalen, in einer Elementarzelle gestörten periodischen Potentials näher behandelt.

*O. Madelung.*

**Sagawa, Takasi:** Electronic states in one-dimensional crystal lattice having a defect. Sci. Reports Tôhoku Univ., I. Ser. **38**, 238—246 (1954).

Theoretische Untersuchung der Bandstruktur eines in einer Gitterzelle gestörten eindimensionalen Kronig-Penney-Modells.

*O. Madelung.*

**Beck, Guido:** Remark on the momentum of a phonon. Anais Acad. Brasil. Ci. **26**, 65—68 (1954).

Am Modell einer eindimensionalen Kette von elastisch gekoppelten Massenpunkten wird der Impulsaustausch zwischen einem Elektron und einem Kristallgitter quantenmechanisch untersucht. Unter der Annahme einer schwachen Wechselwirkung zwischen Elektron und Gitteratomen ergibt sich, daß eine Impulsänderung  $\hbar k$  des Elektrons stets mit der Vernichtung oder Erzeugung genau eines Gitterschwingungsquants (in Form einer fortschreitenden Welle) der Wellenlänge  $2\pi/k$  verbunden ist. Die entsprechende Impulsänderung des Gitters äußert sich in dessen Schwerpunktsbewegung; dem Phonon an sich braucht man dabei keinen Impuls zuzuschreiben.

*A. Schoch.*

**Yamashita, Jiro and Mitukuni Watanabe:** On the conductivity of non-polar crystals in the strong electric field. I. Progress theor. Phys. **12**, 443—453 (1954).

Um die Zunahme der elektrischen Leitfähigkeit reinen Germaniums in hohen elektrischen Feldern quantitativ zu verstehen, lösen die Verff. die Blochsche Integralgleichung bis zur zweiten Näherung. Dabei wird die Wechselwirkung der Leitungselektronen mit den akustischen und optischen Gitterschwingungen in Rechnung gesetzt, und auch die Streuung an Verunreinigungen diskutiert.

*Walter Franz.*

● **Schottky, W.** (herausgegeben und kommentiert von): Halbleiterprobleme. In Referaten des Halbleiterrausschusses des Verbandes Deutscher Physikalischer Gesellschaften. Innsbruck 1953, Bd. I. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn 1954. VIII, 387 S. 127 Abb. Halbleinen DM 28,80.

This is the first of a series of annual volumes designed to review current work in the field of semiconductors. The volume under review contains articles on the technical problems associated with semiconductor rectifiers and transistors as well as articles of mainly theoretical interest. The following articles, of interest to theoretical physicists should be mentioned: Many-electron problems (Volz), statistical problems (Schottky), electron-phonon interaction (Pfirsch), radiation-less transitions at defects (Haug). The first two articles go into considerable detail, the last two articles are intended more as an introduction to the literature.

*P. T. Landsberg.*

● **Strutt, M. J. O.:** Transistoren: Wirkungsweise, Eigenschaften und Anwendungen. (Monographien der Elektrischen Nachrichtentechnik. Bd. 18.) Zürich: S. Hirzel Verlag 1954. VIII, 166 S. Schw. fr. 21,—.

Das Buch gibt einen Überblick über die Wirkungsweise, Eigenschaften und Anwendungen von Transistoren und dürfte sich in erster Linie an Elektrotechniker und Ingenieure richten. In einem Einführungsabschnitt wird die Wirkungsweise des Transistors mit Hilfe der Vierpol-



theorie erläutert und durch Ersatzschaltbilder veranschaulicht. Der zweite Abschnitt bringt unter dem Titel „Werkstoffelektronik“ die wichtigsten physikalischen Grundlagen in einer übersichtlichen und leicht verständlichen Form. Die „Kontaktelektronik“ wird an Hand des zuvor erläuterten quantenmechanischen Bändermodells behandelt. Zwei weitere Abschnitte sind den physikalisch-technischen Eigenschaften der Spitzen- und Flächentransistoren gewidmet, wobei außer der Wirkungsweise insbesondere die Stromvervielfachung, Laufzeiten, Kapazitäten, Induktivitäten und das Rauschen behandelt werden. Die restlichen Abschnitte des Buches beziehen sich auf die verschiedenen Anwendungsmöglichkeiten des Transistors. Nach einer allgemeinen Behandlung der „Dualität und Analogie von Schaltungen“ wird insbesondere der Einsatz von Transistoren in Anfangsverstärkerstufen, Endverstärkerstufen und Schwingstufen besprochen. Die 148 Literaturzitate werden jedem Leser willkommen sein. Nach Form und Anlage dürfte das Buch zur Zeit in der deutschen Literatur kein Gegenstück besitzen und für jeden Praktiker zu einem wichtigen Lehr- und Hilfsmittel werden. *W. Oldekop.*

**Samojlovič (Samoilowitsch), A. G. und L. L. Korenblit:** Gegenwärtiger Stand der Theorie der thermoelektrischen und thermomagnetischen Erscheinungen in Halbleitern. *Fortschr. Phys.* **1**, 486—554 (1954).

Ungekürzte Übersetzung aus *Uspechi fiz. Nauk* **49**, 243 ff., 337 ff. (1953). Das Referat gibt einen umfassenden Überblick über alle mit einem Temperaturgradienten verbundenen Erscheinungen in Halbleitern. Der Bericht ist in zwei Teile gegliedert. Im ersten Teil wird die allgemeine Form der thermoelektrischen und thermomagnetischen Koeffizienten thermodynamisch abgeleitet. Im zweiten Teil folgt dann die Herleitung der numerischen Werte der Koeffizienten mittels spezieller Modellvorstellungen. *O. Madelung.*

**Tewordt, Ludwig:** Theorie der Stoßionisation und strahlungslosen Rekombination in isolierenden Kristallen. *Diss. math.-naturw. Fakultät Münster* **4**, 10—11 (1954).

Vgl. dies. *Zbl.* **56**, 239.

● **Pekar, S. I.:** Untersuchungen über die Elektronentheorie der Kristalle. Berlin: Akademie-Verlag 1954. VIII, 184 S. DM 13,—.

Diese Monographie gibt eine systematische Darstellung der Arbeiten des Verfassers und seiner Mitarbeiter über die sogenannte Polaronentheorie und die Theorie lokalisierter Elektronenzustände in Halbleitern und Dielektrika. Während man lange Zeit versucht hatte, die elektrischen und optischen Eigenschaften der Kristalle im Rahmen des Bändermodells zu deuten, bei dem sich die Elektronen in einem starren Gitter bewegen sollen, wird hier als wesentlich neuer Gesichtspunkt der Einfluß der Gitterschwingungen auf die Bewegungszustände des Elektrons in die Theorie eingeführt. Nach dieser Vorstellung baut ein Überschußelektron um sich herum eine Gitterdeformation auf, die, wie der Verf. zuerst annimmt, ein „selbst-lokalisierendes“ Elektron hervorruft, bzw. die Bewegung des Elektrons durch das Gitter begleitet. Der Anwendungsbereich der Theorie des Verf. wird durch die Verwendung der „adiabatischen Näherung“ auf eine starke Kopplung Elektron-Gitterschwingungen festgelegt, wie sie in günstigen Fällen in Ionenkristallen vorliegen könnte. Die einzelne Anlage des Buches ist wie folgt: Das 1. Kapitel behandelt einige Eigenschaften der Elektronenwellenfunktion im starren Gitter; so die Translationseigenschaft, die Abseparation der Bewegung des Überschußelektrons mit Hilfe der adiabatischen Näherung aus dem Vielelektronenproblem und schließlich eine neue Herleitung der Methode der effektiven Masse. Im 2. Kapitel wird die Polaronentheorie mit klassischer Behandlung der Ionenbewegung aufgebaut. Die Bewegungsgleichung für die Ionenschwingungen und das Wechselwirkungsglied mit dem Elektron werden u. a. hergeleitet. Das System: Elektron + Polarisationschwingungen wird nach einem Variationsverfahren behandelt, das in seinen Grundzügen später auch bei der quantentheoretischen Behandlung der Polarisationschwingungen benutzt wird. Weiter werden die Photoanregung und Photodissoziation sowie die „schrittweise Bewegung“ des Polarons behandelt. Das 3. Kapitel ist der Polaronentheorie mit quantenmechanischer Behandlung der Ionenbewegung gewidmet. Hier



wird die Quantelung der Polarisationswellen durchgeführt und Energie und Wellenfunktion zuerst für ein „selbstlokalisiertes“ Elektron, dann für ein bewegliches Polaron bestimmt. Es folgt die Berechnung der Streuung der Polaronenwelle an den optischen und akustischen Gitterschwingungen und der Beweglichkeit. Das 4. Kapitel bringt die Theorie der  $F$ - und  $F'$ -Zentren mit klassischer Behandlung der Ionenbewegung. Nach einem kritischen Überblick über die bestehenden Hypothesen über die Natur der  $F$ -Zentren werden die Grundgleichungen für das Störstellenelektron, sodann dessen Energiewerte und Eigenfunktionen und schließlich Ausdrücke für die Lichtabsorption hergeleitet. Das 5. Kapitel behandelt im wesentlichen die gleichen Fragen, jedoch mit quantenmechanischer Berücksichtigung der Ionenbewegung. Kapitel 6 ist dem Vergleich zwischen Theorie und Experiment vorbehalten. Die vorliegende Theorie enthält als Parameter die statische Dielektrizitätskonstante, den Brechungsindex, die Frequenz der longitudinalen optischen Gitterschwingungen und die scheinbare Masse des Elektrons im starren Gitter. Während die ersten drei Parameter aus dem Experiment entnommen werden, wird die scheinbare Masse als freier Parameter angesehen, der aus dem Vergleich der berechneten und der experimentell gefundenen Lage des  $F$ -Banden-Maximums festgelegt wird. U. a. wird in diesem Kapitel auch die Breite, Form und Temperaturabhängigkeit der  $F$ -Banden diskutiert. Leider nur in einem Anhang und in recht kritischer Weise wird die Theorie von Fröhlich, Pelzer und Zienau (dies. Zbl. 40, 429), die für eine schwache Kopplung Elektron-Gitter geeignet ist, abgehandelt. Es erscheint dies ein wenig schade, um so mehr, als sich gerade an diese Arbeit eine ganze Anzahl wertvoller Untersuchungen angeschlossen hat, die auch bei mittelstarker Kopplung brauchbar sind, welche nach Ansicht wohl der überwiegenden Anzahl der Autoren gerade bei den polaren Kristallen (z. B. den Alkalihalogeniden) realisiert sein dürfte, während nach Pekar etwa bei diesen Stoffen eine starke Kopplung vorliegen sollte. Eine Entscheidung dieser Streitfrage ist etwa durch eine experimentelle Bestimmung der scheinbaren Elektronenmasse im starren Gitter zu erwarten. Abgesehen von dieser zuletzt genannten Einseitigkeit und einigen gelegentlichen, methodischen Bedenken kann dieses Buch jedem, der sich kritisch in die Probleme der modernen Kristall-Elektronentheorie einarbeiten will, empfohlen werden.

*H. Haken.*

**Buras, B.: Einige Probleme der Elektronentheorie des Festkörpers.** Material phys. Konferenz in Spala, 1.—14. Sept. 1952, 220—227 (1954) [Polnisch].

Es werden die Geltungsbereiche der adiabatischen sowie der Einteilchen-Näherung diskutiert und Versuche der Erweiterung (Exzitonen, Polaronen) erwähnt.

*G. Süßmann.*

**Seislawski, W. M.: Der gegenwärtige Stand der  $F$ -Zentrentheorie.** Material phys. Konferenz in Spala, 1.—14. Sept. 1952, 239—253 (1954) [Polnisch].

Der Vortrag gibt eine Einführung in die Physik der  $F$ -Zentren. *G. Süßmann.*

**Karplus, Robert and J. M. Luttinger: Hall effect in ferromagnetics.** Phys. Review, II. Ser. 95, 1154—1160 (1954).

Die starken Anomalien des Halleffektes in Ferromagnetika werden zurückgeführt auf die Spin-Bahn-Wechselwirkung der Leitungselektronen. Zwei wesentliche Punkte der Rechnung seien hervorgehoben: Der Operator der Spin-Bahn-Wechselwirkung wird für jedes Elektron sofort so gemittelt, daß statt des Paulischen Spin-Vektors  $\vec{\sigma}$  die relative spontane Magnetisierung auftritt. Hierbei resultiert nur dann etwas von Null Verschiedenes, wenn das betreffende Elektron einen ausgerichteten Spin besitzt. Ferner ist für den Effekt wesentlich die Berücksichtigung von Matrixelementen, die dem Übergang von Elektronen in höhere Energiebänder entsprechen und dem äußeren elektrischen Feld ihren Ursprung verdanken. Es ergibt sich in einer gewissen Näherung die Anomalie des Halleffekts bezüglich der Temperatur-Abhängigkeit und bezüglich der Größenordnung richtig.

*G. Heber.*

## Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

**Stumpff, K.: Neue Wege zur Bahnberechnung der Himmelskörper.** Fortschr. Phys. **1**, 557—596 (1954).

In Zusammenfassung und Ergänzung früherer Arbeiten stellt der Verf. die von ihm entwickelte Methode der Ephemeridenrechnung im Zusammenhang dar. Ausgangspunkt ist die Tatsache, daß die für die Rechenpraxis lästigen Fallunterscheidungen der klassischen Methode daher rühren, daß die dabei verwendete Hilfsvariable (exzentrische Anomalie) nur für elliptische Bahnen reell ist und beim Übergang zur Parabel unverwendbar wird. Im Anschluß an die Integration der Bewegungsgleichungen mit Hilfe der lokalen Invarianten wird eine neue stets reelle Variable eingeführt, die ein einheitliches Rechenverfahren für elliptische, parabolische und hyperbolische Bahnen erlaubt (programmgesteuerte Rechenanlagen!), durch welche zugleich aus Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten eines beliebigen Bahnpunktes die Koordinaten zu einem beliebigen anderen Zeitpunkt direkt — ohne den Umweg über die Kegelschnittelemente — folgen. Die geometrischen Zusammenhänge mit den Bahnformen werden diskutiert. Die Methode kann in ihren Grundzügen auch bei anderen Aufgaben der analytischen Mechanik benutzt werden, wie für den Fall der Zentralbewegung und (mit gewissen Einschränkungen) gestörter Bahnen gezeigt wird.

*Theodor Schmidt.*

● **Bullen, K. E.: Seismology.** (Methuen's Monographs on Physical Subjects.) London: Methuen and Co. Ltd.; New York: John Wiley and Sons Inc. 1954. VIII, 132 p. 8 s. 6d. net.

Das Büchlein gibt eine gedrängte Zusammenfassung der seismischen Theorien und Ergebnisse mit Angabe wichtiger Literaturstellen. Mathematische Ableitungen sind häufig durch Hinweis auf das ausführliche Lehrbuch des Verf. (An Introduction to the Theory of Seismology, Cambridge 1953) ersetzt oder abgekürzt. Nach einem Überblick über die Theorie der Seismographen und die Praxis der Seismogrammauswertung werden die für die Seismik wichtigen Teile der Elastizitätstheorie dargestellt. Verhältnismäßig ausführlich werden die Unterschiede zwischen dem stark idealisierten Modell und den wirklichen Verhältnissen im Erdinnern untersucht. Ein eigenes Kapitel ist der Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung in der Tiefe aus der an der Erdoberfläche beobachteten Laufzeitkurve gewidmet (Fermatsches Prinzip). Es folgen die wichtigsten Beobachtungsergebnisse über Sprengungen, Erdbeben und Tiefherdbeben mit den Anwendungen auf die Theorie des Erdinnern. Dabei werden natürlich auch die thermodynamischen Gesichtspunkte berücksichtigt.

*W. Kertz.*

**Bullard, Sir Edward and H. Gellman: Homogeneous dynamos and terrestrial magnetism.** Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A **247**, 213—278 (1954).

Diese Arbeit ist das Ergebnis mehrjähriger Bemühungen der Verf. um die Erklärung der Ursache des permanenten Magnetfeldes der Erde. Als „homogenen Dynamo“ bezeichnen sie eine einfach zusammenhängende, homogene, leitfähige Flüssigkeitsmasse, die durch ihre Bewegung ein stationäres Magnetfeld erzeugt (Selbsterregung). Bei der mathematischen Behandlung handelt es sich um die Lösung der Maxwell-Gleichungen für eine elektrisch leitfähige Flüssigkeitskugel (Erdkern). Um das Problem zu vereinfachen, wird für die Flüssigkeit eine bestimmte (verhältnismäßig einfache) Geschwindigkeitsverteilung angenommen. — In einem besonderen Abschnitt wird später gezeigt, daß solch eine Verteilung bei der Wärmeturbulenz im Erdkern unter Einwirkung der Erdrotation durchaus auftreten könnte. — Es bleibt ein lineares Eigenwertproblem für den magnetischen Feldvektor zu lösen. Als Eigenwerte treten bestimmte Geschwindigkeitswerte für die Flüssigkeitsströmung auf. Bei der Lösung in Kugelkoordinaten wird die Winkelabhängigkeit durch Entwicklung der Magnetfeldkomponenten nach einem aus Kugelflächenfunktionen abgeleiteten

Vektorsystem berücksichtigt. Dabei gehören zu jeder Kugelflächenfunktion 2 verschiedene Vektorfunktionen, eine mit verschwindender Radialkomponente (toroidal) und eine andere dazu orthogonale (poloidal). Durch die Maxwell-Gleichungen ergeben sich Beziehungen zwischen den Koeffizienten verschiedener Kugelflächenfunktionen. Ähnlich wie in der Quantenmechanik führt dies zu „Auswahlregeln“ für die Parameter dieser Funktionen. Das einfachste System, in dem ein Dipolfeld entsprechendes poloidales Glied vorkommt, enthält außerdem die toroidalen Felder zu der zonalen und den sektoriellen Kugelflächenfunktionen zweiter Ordnung. Als erste Näherung wird dieses System von 4 Funktionen behandelt. Man hat ein System von 4 Differentialgleichungen für die Abhängigkeit der 4 Vektorfunktionen vom Radius  $r$  zu lösen. Die Lösung wurde nach Algebraisierung mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine berechnet. Man erhält Lösungen, die zur Erklärung des Erdfeldes herangezogen werden können. Die toroidalen Magnetfelder sind im Erdkern mehr als hundertmal so groß wie das poloidale. Sie verschwinden aber an der Kerngrenze, während sich das poloidale Feld nach außen als Dipolfeld fortsetzt und den Hauptbestandteil des Permanentfeldes der Erde darstellen könnte. Diese Lösung bleibt auch bei der Berücksichtigung der nächsten Kugelfunktionsterme bestehen (2. Näherung, 12 Differentialgleichungen). Konvergenzfragen werden untersucht, und es wird ein Ausblick auf die noch zu behandelnden Probleme gegeben.

W. Kertz.

**Priestley, C. H. B.: Vertical heat transfer from impressed temperature fluctuations.** Austral. J. Phys. **7**, 202—209 (1954).

Die Abhandlung gibt eine theoretische Untersuchung über die Fähigkeit suspendierter Luftquanten, Wärme durch eine stabil aufgebaute Atmosphäre aufwärts zu verfrachten. Diese Fähigkeit hängt von der Stärke der Vermischung und so von der Größe der Luftquanten ab. Die größten und kleinsten Quanten sind beide relativ unwirksam und es existiert eine optimale mittlere Größe, die einen maximalen Wert des Wärmeflusses für eine gegebene Intensität der Temperaturstörungen ergibt. Für eine Schicht gleichförmig instabilen Aufbaus nimmt der Wärmefluß stetig mit der Größe der Elemente zu und es gibt keine obere Grenze außer jener, die durch die Mächtigkeit der unstabilen Schicht gegeben ist. Die Verteilung der Intensität der Temperaturschwankungen, erzwungen durch äußere Einflüsse, in bezug auf die Größe der Elemente wird beeinflußt durch die Wirkungen des Schwimmens und Vermischens. A. Defant.

**Priestley, C. H. B.: Convection from a large horizontal surface.** Austral. J. Phys. **7**, 176—201 (1954).

Eine außerordentlich wichtige Untersuchung über die Konvektion über einer weitausgedehnten Oberfläche. Die Theorie befaßt sich mit der Konvektion von einer weit ausgedehnten erwärmten Oberfläche aus durch Luftquanten, die einer kontinuierlichen Vermischung mit der Umgebung durch kleinräumige Turbulenz unterworfen ist. Das Medium erstreckt sich nach einer Seite ins Unendliche. Es wird angenommen (aus Ähnlichkeitsüberlegungen wird dies nahegelegt), daß die potentielle Temperatur  $\theta$  in einer angemessenen Höhe über der Oberfläche der Beziehung  $(-g/\theta)(\partial\theta/\partial z) = C z^{-\delta}$  folgt, wobei  $\delta$  und  $C$  positive Konstante sind. Es wird gezeigt, daß: 1.  $\delta$  praktisch nahe bei  $4/3$  bleibt und diesem Werte gleich ist bei stationären Verhältnissen. Ausgenommen sind die Schichten, in denen die Erwärmung durch Strahlung groß ist, wo  $\delta$  kleiner ist. 2. der Betrag des Wärmeverlustes wie  $C^{3/2}$  variiert und 3. die Temperaturschwankungen proportional  $C z^{-1/3}$  sind. Experimentelle Untersuchungen von Oberflächenschichten der Atmosphäre bestätigen ganz gut diese Ergebnisse. Diese Hauptergebnisse wurden für die freie Konvektion durch dimensionale sowie Ähnlichkeitsbetrachtungen nahegelegt, aber sie erfuhren eine unabhängige Bestätigung durch eine mechanische Theorie, auf die hier besonders hingewiesen sei. Das Verhalten der aufsteigenden Quanten und jenes der absteigenden ist vollständig verschieden, was besonders bemerkt sein soll.

A. Defant.



## Autorenregister

Besteht eine Arbeit aus mehreren Mitteilungen, so wird hinter dem Stichwort die Mitteilungsnummer mit römischen Ziffern angegeben.

- Abelson, Robert M. and Ralph Allan Bradley** ( $2 \times 2$  factorial) 358.
- Abramowitz, Milton** (Practical evaluation of integrals) 338.
- Achiezer, A. I. und I. Ja. Pomerancuk** (Ausstrahlung eines Photons) 441.
- Ackeret, Jakob** (Temperaturverteilung hinter angeströmten Zylindern) 402.
- Aczél, János** (Theorie der Mittelwerte) 288.
- Adachi, Ryuzo** (Refraction method of geophysical prospecting) 239.
- Adam, P. Puig s. Puig Adam, P. 70.**
- Adams, J. F.** (Decompositions of the sphere) 282.
- Adem, José** (Algebraische Operationen in der Topologie) 388.
- Adkins, J. E., A. E. Green and G. C. Nicholas** (Elasticity for finite deformations) 396.
- — — — — and **R. T. Shield** (Finite plane strain) 396.
- Aeschlimann, F.** (Représentation fonctionnelle des corpuscules) 229.
- Afriat, S. N.** (Quadratic forms and linear constraints) 11.
- Agnew, Ralph Palmer** (Abel and Riesz transforms of Tauberian series) 51.
- Agostinelli, Cataldo** (Sistemi di equazioni differenziali normali) 178; (Problema dei tre corpi) 179; (Soluzioni stazionarie) 309; (Equazioni della magneto idrodinamica) 424.
- Ahmavaara, Yrjö** (Factorial invariance) 130.
- Aitchison, J. s. S. J. Prais** 132.
- Ajzerman, M. A. s. F. R. Gantmacher** 12.
- Akaike, Hirotugu** (Density function) 123.
- Akiba, Tomoya s. Kazu Hasegawa** 435.
- Albertoni, Sergio** (Problema di Neumann) 328.
- Aldinio, Giorgio** (Traino aereo di resistenza minima) 201.
- Aleksandrov (Alexandroff), P.** (Kombinatorische Topologie nicht-abgeschlossener Mengen) 387.
- Alexander, L. E. s. H. P. Klug** 236.
- Allen, A. C. and E. Kerr** (Harmonic functions. I.) 89.
- Almeida Costa, A.** (Allgemeine Theorie der Ringe) 261.
- Almond, Joyce** ( $\chi^2$  test applied to epidemic chains) 133.
- Amako, Yoshito** (Electronic structure of water molecule) 446.
- Amato, Vittorio** (Indice di co-gradiazione  $\rho$  di Spearman) 132.
- Ambrosanio, Aldo s. Aldo Raitchel** 393.
- Amemiya, Ichiro** (Modulars of  $L_p$  type) 101.
- Anastassiadis, Jean** (Séries de fonctions continues) 48.
- Andersen, Erik Sparre s. Sparre Andersen, Erik** 121.
- Anderson, Alan Ross** (Modal system of Łukasiewicz) 246.
- Anderson, James L.** (Green's functions) 434.
- Andô, Tsuyoshi** (Linear topological spaces) 334.
- Andreoli, Giulio** (Aritmetiche non peaniane) 7; (Operazioni binarie) 24.
- Anis, A. A.** (Partial sums of independent random variables) 121.
- Ankeny, N. C.** (Quadratic residues) 273.
- Ansbacher, F. and P. T. Landsberg** (Quantum statistics) 211.
- Anscombe, F. J.** (Fixed-sample-size analysis of sequential observations) 129.
- — — s. **Ronald Fisher** 128.
- Aoki, Kiyoshi** (Symbolic representation) 373; (Topological transitivity) 373.
- Aoyama, Hirojiro** (Interviewing bias) 127; (Stratified random sampling) 128.
- Aquaro, Giovanni** (Criterio di Arzelà) 286.
- Aragnol, André** (Classes caractéristiques et formes différentielles) 378.
- Araújo, J. M.** (Nuclear compressibility) 442.
- Arens, R. F. and A. P. Calderón** (Analytic functions of Fourier transforms) 332.
- **Richard** (Homeomorphisms) 23.
- Arfwedson, G.** (Collective risk theory. I.) 361.
- Argence, Émile et Karl Rawer** (Absorption des ondes courtes) 422.
- Armstrong, James W.** (Lagrange interpolation) 290.
- Aronszajn, N. and W. F. Donoghue** (Variational approximation methods. I.) 329.
- Arrighi, Gino** (Funzioni polidrome di matrici) 66.
- Artmann, Kurt** (Amplitudenverlauf einer Welle) 221.
- Aruffo, Giulio** (Formula di Green-Stokes) 47.
- Arżanych, I. S.** (Verschiebungsvektor) 183; (Rotation eines starren Körpers) 391.
- Aslanov, S. K.** (Strömung eines idealen Gases um einen Keil) 204.
- Atkinson, F. V.** (Orthogonal polynomials) 55.
- Avramescu, Aurel** (Refroidissement des blocs en béton) 214.
- Azbel, M. Ja. s. V. L. German** 195.
- Azumaya, Gorô** (Strongly  $\pi$ -regular rings) 25.
- Babakova, O. I.** (Torsion von Stäben) 185.
- Babić-Gjalski, Ivo s. Ivan Suppek** 232.
- Badaljan, G. V.** (Taylorsche Reihe) 289.
- Bădescu, Radu** (Équation fonctionnelle) 329.
- Bagchi, S. N. s. R. Hosemann** 176.
- Bagemihl, F. and W. Seidel** (Analytic functions) 61.

- Bagley, R. W. (Lattice of topologies) 165.
- Bagley, Robert and David Ellis (Topolattice and permutation group of an infinite set) 165.
- Bailey, Norman T. J. (Continuous time treatment of a simple queue) 348.
- Bailey, V. A. (Reflection by an inhomogeneous medium) 230.
- Bajraktarević, Mahmud (Suites itérées) 336.
- Bakel'man, I. Ja. (Glatte Flächen) 163; (Bestimmung einer glatten Fläche) 372.
- Bakst, Aaron (Puzzles and Pastimes) 1.
- Bal, Lascu et Ioan Rusu (Groupement de variables) 339.
- Ball, R. W. s. R. A. Beaumont 251.
- Ballabh, R. (Equations reducible to Laplace's equation) 326.
- Balsimelli, Pio (Trasformazione birazionale dell' $S_5$  complesso) 147; (Trasformazione quadratica biduale) 147.
- Bancroft, T. A. s. O. Kempthorne 359.
- Bangen, Gerd und Richard Stender (Wahrscheinlichkeitsrechnung) 342.
- Baratta, Maria Antonietta (Ripartizione del calore) 420.
- Barbălat, I. (Trajectoires d'équations différentielles) 317.
- Barberi, Benedetto (Statistics and probability) 126.
- Barrar, R. B. and C. L. Dolph (Transmission problem) 423.
- Barrett, J. H. (Differential equations) 107.
- Barros Neto, José de (Konstruktion einer vollständig additiven Klasse) 281.
- Barsotti, Iacopo (Varietà abeliane) 371.
- Leo (Numerische Teilbarkeit) 273; (Sternpolygone) 369.
- Bartholomay, A. F. (Type-invariance and  $h$ -retraction) 388.
- Bartlett, M. S. (Processus stochastiques ponctuels) 123; (Analyse spectrale des séries temporelles stationnaires) 357.
- — s. Ronald Fisher 128.
- Barua, S. N. (Secondary flow in a rotating pipe) 199.
- Bastin, H., P. Hontoy et P. Janssens (Méthodes topologiques de Poincaré) 217.
- Basu, D. and R. G. Laha (Normal distribution) 350; (Addendum) 351.
- Bateman, Harry s. A. Erdélyi 341.
- Battig, A. (Photon in materiellem Medium) 226; (Photonen in Materie) 423.
- Baudoux, Pierre (Guides d'ondes à conductivité finie) 422; (Guides d'ondes de section circulaire) 422.
- Baule, Bernhard (Mathematik. I.) 282.
- Baum, John D. (Asymptoticity in topological dynamics) 386.
- Beardslee, David s. C. H. Coombs 139.
- Beatty, S. (Area of a triangle) 368.
- Beaumont, R. A. and R. W. Ball (Modern algebra and matrix theory) 251.
- Beck, Guido (Momentum of a phonon) 454.
- Beckerley, J. G., M. D. Kamen and L. I. Schiff (Nuclear science. 4.) 439.
- Beckert, Herbert (Probleme partieller Differentialgleichungen) 319.
- Behari, Ram s. P. B. Bhattacharya 374.
- — s. Shanti Narain 144.
- Beharrell, Jack L. and Hans R. Friedrich (Transfer function of a missile) 182.
- Behnke, Heinrich (Mathematischer Unterricht) 243.
- — — Walter Lietzmann und Wilhelm Süss (Mathematisch-physikalische Semesterberichte. 4. Heft 1/2) 242.
- Behrbohm, Hermann (Brachystochrone Flugbahnen) 179; (Wenig gestörte homogene Überschallfelder) 203.
- Belatini, Paul de (Elektromagnetische Grundgrößen) 215.
- Belinfante, F. J. and C. Moller (Time-dependent and stationary treatments of collision processes) 430.
- Beljutina, L. N. (Existenz eines Wirbelpunktes) 313.
- Bell, Dorothy G. (Group theory and crystal lattices) 236.
- Bell, P. O. (Projective Frenet formulas) 154.
- Bellman, Richard (Dynamic programming) 363; (Approximation in dynamic programming) 363.
- Bellman, Richard, Irving Glicksberg and Oliver Gross (Variational problems in dynamic programming) 139; (Theory of dynamic programming) 359.
- — and Oliver Gross (Combinatorial problems) 364.
- — and Sherman Lehman (On gold-mining equation) 363.
- Belov, N. V. (Röntgenstrukturanalyse) 236; (Raumgruppen) 453.
- Benedetti, S. De s. DeBenedetti, S. 445.
- Beneš, Václav Edvard (Model for Quine's „New foundations“) 7.
- Bennet, Carl A. and Norman L. Franklin (Statistical analysis in chemistry) 349.
- Benton, Thomas C. s. Samuel I. Plotnick 65.
- Berezin, F. A. und I. I. Pjateckij-Šapiro (Erweiterungen des komplexen Raumes) 308.
- Berge, Claude (Convexité régulière) 100.
- Bergmann, O. s. H. S. Green 444.
- Berikašvili, N. A. (Spektren topologischer Gruppen) 260; (Dualitätssätze für Mengen) 387.
- Berio, Angelo (Fenomeni elastoplasto-viscosi nei solidi) 190.
- Berkson, J. s. Ronald Fisher 128.
- Berra, A. E. Sagastume s. Sagastume Berra, A. E. 34.
- Bers, Lipman (Subsonic flow past a profile) 406; (Subsonic and transonic gas flows) 413.
- Bertolini, Fernando (Problema di Cauchy per l'equazioni di Laplace. II.) 89.
- Besson, Pierre s. E. Roubine 422.
- Beth, E. W. (Structures simplement ordonnées) 246.
- Bettermann, Rudolf (Riemannsche Gebiete) 67.
- Bhatnagar, K. P. (Self-reciprocal functions) 95; (General theorem) 95.
- Bhattacharya, P. B. and Ram Behari (Congruences of Guichard) 374.
- Bhattacharyya, R. K. (Bremsstrahlung in the nonrelativistic region) 434.
- Bieri, H. (Konvexe Rotationskörper) 385.
- Biernacki, Mieczysław (Pro-

- blème de M. Leja) 143; (Ovales) 384.
- Biggiogero, Giuseppina Masotti s. Masotti Biggiogero, Giuseppina 145.
- Bilinski, Stanko (Satz von Ptolemaios) 368.
- Bilo, J. (Schläfli sets of lines) 369.
- Birjuk, G. I. (Fastperiodische Lösungen von nicht-linearen Differentialgleichungen) 79.
- Birman, S. E. (Einsinken eines Stempels auf Bodenschicht) 395.
- Bizley, M. T. L. and A. E. Lacey (Life assurance and annuity contracts) 135.
- Blachman, Nelson M. (Minimum-cost encoding of information) 365.
- Blanchard, André (Cohomologie réelle d'un espace fibre) 172.
- Blanuša, D. (Plongement isométrique de l'espace de Hilbert) 99; (Immersion du cylindre) 142; (Plongement isométrique de l'espace hyperbolique dans l'espace de Hilbert) 367; (Plongement isométrique de la bande de Möbius dans un espace  $R_3$ ) 372; (Plongement isométrique de la bande de Möbius dans un espace sphérique) 372.
- Blechman, I. I. (Vibrierende Einrammung von Pfählen) 191.
- Bliss, C. I. and D. W. Calhoun (Biometry and statistics) 133.
- Bloch, É. L. (Besselsche Funktionen) 58; (Stoß eines Rotationseleipsoids) 200.
- Block, H. D. (Integral invariants) 84.
- Bludman, S. and P. B. Daitch (Born-Oppenheimer approximation) 429.
- Boas jr., Ralph Philip (Entire functions) 302.
- Bochner, S. (Positive zonal functions on spheres) 291.
- Bodiu, G. (Utilisation du formalisme quantique à la topologie du treillis) 428.
- Bögel, Karl (Stetige Funktionen) 49.
- Bohm, D. and J. P. Vigier (Model of causal interpretation of quantum theory) 229.
- Bohnert, Herbert G. (Utility concept) 139.
- Boll, L. s. Sowjetische Arbeiten zur Funktionalanalysis 98.
- Bolotin, V. V. (Biegungsschwingungen von Wellen) 191.
- Bondar, N. G. (Dynamische Stabilität von Stabsystemen) 184.
- Bonder, J. s. S. Turski 278.
- Borel, Armand (Kählerian coset spaces) 160.
- Borwein, D. (Summability factors) 52; (Cesàro summable integrals) 52.
- Bose, B. N. (Self-reciprocal relation-ship in operational calculus. II.) 333.
- S. K. (Laplace transform and self-reciprocal functions) 333.
- Boseck, Helmut (Automorphismen algebraischer Funktionkörper) 271.
- Bott, Raoul (Nondegenerate critical manifolds) 91; (Manifolds all of whose geodesics are closed) 156.
- Bowers jr., F. A. I. s. Universal Mathematics 277.
- Box, G. E. P. and J. S. Hunter (Confidence region for simultaneous equations) 358.
- Brachman, Malcolm K. (Space-time representation) 230.
- — — and J. Ross MacDonald (Relaxation-time distribution functions) 96.
- Bradley, Ralph Allan (Incomplete block rank analysis) 358.
- — — s. Robert M. Abelson 358.
- Bradt, R. N. s. Universal Mathematics 277.
- Brauer, Alfred (Least primitive root) 34.
- Bremmer, H. (Sommerfeld's formula for the radio waves over a flat earth) 218.
- Brenner, J. L. (Bound for a determinant) 9; (Bounds for determinants) 9; (Orthogonal matrices of modular polynomials) 254.
- Brisdall, T. G. s. D. Middleton 126.
- Brjunelli, B. E. (Variation des erdmagnetischen Feldes) 240.
- Brogden, Hubert E. (Personnel classification theorem) 364.
- Brogie, L. de (Particules à spin) 231.
- Bross, Irwin (Misclassification in  $2 \times 2$  tables) 131.
- Brownell, F. H. and W. K. Ergen (Theorem on rearrangements) 94.
- Buchdahl, H. A. (Integrability conditions) 210; (Reciprocal static solutions of  $G_{\mu\nu} = 0$ ) 227.
- Buckens, F. (Flambage d'une plaque circulaire) 395.
- Budden, K. G. (Propagation of radio waves) 218.
- Buerger, M. J. (Diffraction symmetry of twins) 452.
- Bullard, Sir Edward and H. Gellman (Terrestrial magnetism) 457.
- Bullen, K. E. (Seismology) 457.
- Buneman, O. (Self-consistent electrodynamics) 420.
- Buras, B. (Elektronentheorie des Festkörpers) 456.
- Burgers, J. M. (Statistical problems) 124; (Statistical problems. Continuation. I.—III.) 124; (Wave like solutions of a partial differential equation. I.—III.) 348.
- Burks, Arthur W., Don W. Warren and Jesse B. Wright (Analysis of a logical machine) 4.
- Burniat, Pol (Superficie algebriche ottuple canoniche) 147.
- Bush, Robert R., Frederick Mosteller and Gerald L. Thompson (Multiple-choice situations) 137.
- Bushaw, D. W. s. R. W. Clower 361.
- Čachtauri, A. J. (Innere Geometrien ebener Netze) 374.
- Caianiello, E. R. (Quantum field theory. II.) 431.
- Calderón, A. P. (Singuläre Integrale) 330.
- — — s. R. F. Arens 332.
- Calhoun, D. W. s. C. I. Bliss 133.
- Calleja, Pedro Pi s. Pi Calleja, Pedro 336.
- Călugăreanu, G. (Fonctions univalentes. II.) 64.
- Calvin, Lyle D. (Block designs for experiments) 131.
- Calvo Carbonell, Carlos (Reihendarstellung für die Wurzel einer Gleichung) 113.
- Cap, F. (Spinorrechnung) 438.
- Capel, C. E. s. Universal Mathematics 277.
- Carafoli, Elie (Tragflügeltheorie) 194.
- Caranti, Elio (Mortalità infantile) 134.
- Carathéodory, Constantin (Mathematische Schriften. I.—III.) 241.
- Carbonell, Carlos Calvo s. Calvo Carbonell, Carlos 113.



- Čarin, V. S. (Automorphismen-gruppen nilpotenter Gruppen) 16.
- Carini, Giovanni (Onde magneto-idrodinamiche di Alfvén) 425; (Onde magneto-idrodinamiche) 425; (Onde magneto-idrodinamiche in un liquido conduttore) 425.
- Carleson, Lennart (Generators of normed rings) 335.
- Carlitz, L. ( $q$ -Bernoulli and Eulerian numbers) 12; (Partition formulas) 34; (Irregular primes) 37; (Special elliptic functions) 273; (Multiplication formulas for Jacobi elliptic functions) 273.
- Carrier, G. F. (Boundary layer problems) 337.
- Cartan, E. (Oeuvres complètes. Part. II, vol. 1. 2.) 83.
- Cartwright, M. L. and J. E. Littlewood (Fixed point theorems) 386.
- Castelluccio, Domenico (Fenomeni di propagazione per onde) 86.
- Castoldi, Luigi (Alternativa cinematografica) 199.
- Castro, Gustavo de (Wahrscheinlichkeitsrechnung) 2.
- Castrucci, Benedito (Grundpostulate der projektiven Geometrie) 366; (Grundlagen projektiver Geometrie) 366.
- Čech, E. (Géométrie différentielle projective) 150; (Correspondances entre deux espaces. IV.—VIII.) 151.
- Čelidze, V. G. (Summation von Doppelintegralen) 53.
- Centro Internazionale Matematico Estivo (Equazioni differenziali non lineari) 308; (Analisi funzionale) 333.
- Černov, L. A. (Fluktuationen der Amplitude und der Phase) 423.
- Cesari, Lamberto and Jack K. Hale (Linear differential systems) 315.
- Chak, A. M. (Operational calculus. I. II.) 95.
- — — s. A. Sharma 12.
- Chakrabarty, Nirmal Baran (Synthesis of a network) 217.
- Chakravarty, N. K. (Inequalities in operational calculus) 97; (Theorems in operational calculus) 97.
- Chalatnikov, I. M. s. L. D. Landau 448.
- Chamberlin, E. and J. Wolfe (Converse of Lucas's theorem) 255.
- Chambers, L. G. (Propagation constants) 221.
- Champion, W. R. s. F. E. Senftle 443.
- Chandrasekhar, S. (Fluid motion in presence of a magnetic field) 225.
- Chang, Chen-Chung (Direct products and theory of models) 248.
- Chang, Shih-Hsun (Integral equations) 91.
- Chatterji, P. P. s. S. D. Nigam 400.
- Chaundy, T. W. (Appell's hypergeometric function  $F^{(4)}$ ) 296.
- Chejn, A. L. (Strömung einer Flüssigkeit und eines Gases zu einer Senke) 400.
- Chen, Kuo-Tsai (Iterated integrals) 256.
- Cherubino, Salvatore (Modelli di equilibrio economico) 136.
- Chester, G. V. (Quantum-mechanical partition function) 212; (Liquid helium) 213.
- Chevalier, Alfred et Erseo Polacco (Ondes électromagnétique du type électrique transversal) 221.
- Chiba, Shin (Pion-nucleon scattering) 436.
- Chochlov, Ju. K. (Wechselwirkung eines Systems von Teilchen mit elektromagnetischem Feld) 231; (Dipolübergänge beim Kern-Photoeffekt) 442.
- R. V. (Synchronisation auf Untertönen) 181.
- Chocholle, René (Analyse et synthèse harmoniques d'ondes périodiques) 338.
- Chovanskij, A. N. (Druck am Stoß des Bohrlochs) 210.
- — — s. G. S. Salechov 210.
- Chow, Tse-sun (Energy spectral intensity) 203.
- Christescu, Romulus (Espaces partiellement ordonnés pseudo-normés) 100.
- Chung, K. L. (Markov chains. II.) 346.
- Church, B. M. (Problems of sample allocation) 360.
- Chvedelidze, B. V. (Singuläre Integralgleichungen) 92.
- — — s. I. N. Karcivadze 300.
- Čibrikova, L. I. s. F. D. Gachov 92.
- Ciliberto, Carlo (Equazioni non lineari di tipo parabolico) 86.
- Claesson, Arne (Salpeter-Bethe equation) 432.
- Clarkson, M. H. (Wings in supersonic flow) 413.
- Clauser, Emilio (Fronti d'onda nella teoria unitaria einsteiniana) 228.
- Clemmow, P. C. and J. Heading (Radio propagation in the ionosphere) 219.
- Clippinger, R. F., B. Dimsdale and J. H. Levin (Automatic digital computers. III.—V.) 340.
- Clover, R. W. and D. W. Bushaw (Price determination) 361.
- Chochran W. G., s. Ronald Fisher 128.
- Coester, F. (Angular correlations) 442.
- Cohen, Haskell (Dimension for Hausdorff spaces) 166.
- Coles, Donald (Turbulent boundary layer) 201.
- Combe, René (Bande passante et dispersion des guides d'ondes) 220.
- Conti, Roberto (Sistema piano autonomo) 317.
- Convegno internazionale di geometria differenziale, Italia, 20—26 Settembre 1953. 372.
- Coombs, C. H. (Social choice and strength of preference) 137.
- — — and David Beardslee (Decision-making under uncertainty) 139.
- — —, H. Raiffa and R. M. Thrall (Mathematical models and measurement theory) 14.
- Copal, Sofia (Congruences de sphères) 376.
- Copson, E. T. (Reflexion of sound waves) 414.
- Corben, H. C. s. S. DeBenedetti 445.
- Costa, A. Almeida s. Almeida Costa, A. 261.
- Cotlar, Mischa (Momentenproblem und hermitesche Operatoren) 335.
- Coxeter, H. S. M. (Arrangements of spheres) 143.
- Craig, Homer V. (Linear extensor equations) 90.
- Cramér, Harald (Probability theory) 116.
- Crelles Rechentafeln 342.
- Crommelin, C. A. et W. van der Woude (Quelle courbe est égale à sa développée ?) 372.
- Crosara, Aldo (Distribuzione dei redditi) 136.
- Cseke, V. et Z. Csendes (Construction de nomogrammes) 339.

- Csendes, Z. s. V. Cseke 339.
- Csonka, P. (Lining of shells) 187.
- Cuesta, N. (Skalen von Ordinalzahlen) 40.
- Cukker, M. S. (Aus einem Diffusor austretender Strahl) 195.
- Daiovitch, V. (Fonction analytique) 63.
- Daitch, P. B. s. S. Bludman 429.
- Dalla Volta, Vittorio (Spazio delle matrici simmetriche) 158.
- Dällenbach, Walter (Fokussierung bei Beschleunigern) 424.
- Daniels, H. E. (Saddlepoint approximations) 354.
- Danilov, V. L. (Ergiebigkeit von Erdöl-Bohrlöchern) 209.
- — — s. G. S. Salechov 210.
- Dantzig, T. (H. Poincaré) 245.
- Darbo, Gabriele (Convergenza in variazione) 48.
- David, S. T. (Parameters in Markov schemes) 133.
- Davies, E. T. s. K. Yano 161.
- R. O. (Thermodynamics of volume flow) 395.
- Davis, Chandler (Positive linear dependence) 252.
- R. C. (Detectability of random signals) 419.
- Robert L. („Decision processes“) 136.
- Dean, W. R. (Motion of viscous liquid) 402.
- DeBenedetti, S. and H. C. Corben (Positronium) 445.
- Debreu, Gerard (Preference ordering) 138.
- Dedecker, Paul (Systèmes différentiels extérieurs) 84; (Jets locaux) 390.
- Degrazia, Joseph (Math is fun) 242.
- Delange, Hubert (Questions posées par M. Karamata) 285.
- Delcourte, M. s. R. V. Iyer 33.
- Demidovič, B. P. (Mittelbildung für gewöhnliche Differentialgleichungen) 74.
- Demkov, Ju. N. (Prinzip des mikroskopischen Gleichgewichts) 430.
- Dénes, Péter (Grundeinheitssysteme irregulärer Körper) 269.
- Denisjuk, I. N. (M.) (Polynome, die Laguerreschen Polynomen analog sind) 293; (Integrale, die normierte Laguerresche Polynome enthalten) 293; (Integrale, die mit Laguerreschen Polynomen zusammenhängen) 294; (Beziehungen, die normierte Laguerresche Polynome enthalten) 294; (Neue Polynome) 294.
- Deppermann, Karl (Beugung von Planwellen an einer Kugel) 423.
- Derman, C. (Fundamental equations in Markov chains) 345.
- Destouches, Jean-Louis (Logique et les théories physiques) 245.
- Destouches-Février, P. (Logique des propositions expérimentales) 245.
- Deuker, E. A. (Verteilungsfunktionen von Vektorsummen) 120.
- Deuring, Max (Transformationstheorie elliptischer Funktionen) 32.
- Deutsch, Ralph (Detection of modulated noise-like signals) 419.
- Devinatz, A. (Positive definite functions. II.) 332.
- Diamantopoulos, Th. (Relations réciproques) 304.
- Dieulefait, Carlos E. (Zeri dei polinomi ortogonali classici) 13.
- Dimsdale, B. s. R. F. Clippinger 340.
- Dingman, Harvey F. (Point biserial correlation coefficient) 131.
- Dobryšman, E. M. (Problem der Wärmeleitung für zwei Medien) 214.
- Doetsch, Gustav (Sviluppi asintotici) 94.
- Dolapčiev, Bl. (Zweiparametrische Wirbelstraßen) 401.
- Dolidze, D. E. (Durch rotierende Scheibe hervorgerufene Bewegung zäher Flüssigkeit) 196.
- Dolph, C. L., J. E. McLaughlin and I. Marx (Linear transformations and quadratic forms) 11.
- — — s. R. B. Barrar 423.
- Domenicali, Charles A. (Temperature distribution in a heated conductor) 418.
- Dominguez, Alberto Gonzalez s. Gonzalez Dominguez, Alberto 434.
- Donder, Th. de (Multiplicateurs d'Euler-Lagrange) 90; (Calcul des variations. X.— XIII.) 360.
- Donoghue, W. F. s. N. Aronszajn 329.
- Dore, Frank J. s. William H. Dorrance 408.
- Dorrance, William H. and Frank J. Dore (Effect of mass transfer) 408.
- Doss, Shafik (Moyenne d'une variable aléatoire) 345; (Théorème limite central pour des variables aléatoires) 345.
- Douglis, A. (Linear hyperbolic equations) 86.
- Drachmann, A. G. (Plane astrolabe) 2.
- Dressel, F. G. s. J. J. Gergen 84.
- Drobot, S. (Dimensional analysis) 176.
- — and M. Warmus (Sampling inspection of merchandise) 365.
- — s. S. Turski 278.
- Duan' I-Si (Einsteinsche Gravitationsgleichungen) 427.
- Dugué, D. (Éléments limites stochastiques) 122; (Moyennes de variables aléatoires) 345.
- Duhem, Pierre (Physical theory) 175.
- Duijvestijn, A. J. W. (Differentialgleichungen zweiter Ordnung) 314.
- Dulmage, Lloyd (Tangents to ovals) 164.
- Dumitrescu, D. (Mouvement d'un fluide pesant) 199.
- Dungey, J. W. and R. E. Loughhead (Twisted magnetic fields in conducting fluids) 425.
- Duparc, H. J. A. s. G. W. Veltkamp 9.
- Durbin, J. (Errors in variables) 132.
- Duren jr., W. L. s. Universal Mathematics 277.
- Dwyer, Paul S. (Personnel classification problem) 364.
- Dyson, F. J. (Rate of growth of functions) 62.
- Ebersold, Johannes M. (Whiteheadsches Homotopieprodukt) 167.
- Éggle, I. Ju. s. A. D. Myškins 111.
- Ehrenfeucht, A. (Problem of K. Kuratowski and A. Mostowski) 18.
- Eilenberg, Samuel (Algebras) 28.
- Eisenstadt, B. J. (Point homo-

- topic maps into the circle) 167.
- Éjdel'man, S. D. (Cauchysches Problem für parabolische Systeme) 88; (Fundamentalmatrizen von parabolischen und elliptischen Systemen) 322.
- Elcock, E. W. (Antiferromagnetismus) 237.
- Elliott, Joanne (Boundary value problems) 106.
- Ellis, D. (IPIC representation of lattice automorphisms) 165; (Topolattice and permutation group. II.) 165.
- s. Robert Bagley 165.
- El'sin, M. I. (System von linearen Gleichungen) 76.
- Enatsu, Hiroshi (Mass spectrum. I. II.) 233.
- Eppler, R. (Unstetige Strömungen) 402.
- Epstein, Benjamin (Truncated life tests) 351.
- Erdélyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi (Tables of integral transforms. II.) 341.
- Erdős, P. (Set theory. IV.) 45.
- and A. J. Macintyre (Integral functions) 63.
- Ergen, W. K. s. F. H. Brownell 94.
- Ertel, Hans (Kausalität, Teleologie und Willensfreiheit) 1.
- Est, W. T. van (Gruppenerweiterungen und Flächeninhalt) 367.
- Estes, W. K. (Individual behavior in uncertain situations) 138.
- Estrugo y Estrugo, José Antonio (Aufzinsung des Reservefonds) 136.
- Evans, Robert L. (Linear ordinary differential equations) 70.
- Evgrafov, M. A. (Abel-Gončarovsches Interpolationsproblem) 59; (Interpolationsaufgabe von Abel-Gončarov) 298.
- Eyraud, Henri (Fonctionnelles spéciales et théorème du continu) 280; (Récurrence transfinie) 281.
- Fadini, Angelo (Trasformazione cremoniana dell' $S_8$ ) 148; (Equazioni di secondo grado nell'algebra dei numeri tri-duali) 265; (Geometrie affini e geometrie metriche) 366.
- Fage, M. K. (Spektraltheorie linearer Operatoren) 73; (Einpunktige Randwertaufgabe) 73; (Cauchysches Problem) 74.
- Faleschini, Luigi (Problema delle prove ripetute) 119.
- Fan, Ky (Eigenvalues of Hermitian matrices) 11.
- and A. J. Hoffman (Eigenvalues of a matrix) 10.
- Fano, U. (Quantum theory of irreversible processes) 214.
- Farahat, H. (Representations of symmetric group) 259.
- Fateev, A. V. (Automatische Regulierung) 82.
- Federer, Herbert (Integralgeometric theorems) 164.
- Federhofer, Karl (Belasteter Kreisträger) 189; (Aufgaben aus der Hydromechanik) 193; (Gedrückte Kreiszylinderschale) 399.
- Fejes Tóth, L. (Annäherung von Kurven durch Kurvenbogenzüge) 163.
- Fempl, Stanimir (Mantelflächen spezieller Kreiskegel) 144.
- Fényes, I. (Divergenzproblem) 230.
- Ferguson, George A. (Parsimony in factor analysis) 130.
- Feriet, J. Kampé de s. Kampé de Feriet, J. 410, 411.
- Ferra, Claudio de (Tavola di mortalità) 134.
- Ferrar, W. L. (Höhere Algebra) 8.
- Ferrer, S. s. J. Royo 126.
- Feščenko, S. F. (Asymptotische Lösung von Differentialgleichungen) 80.
- Festinger, Leon s. Paul J. Hoffman 139.
- Feynman, R. P. (Atomic theory of liquid helium) 448; (Model of liquid helium) 448.
- Fichera, G. (Classe di trasformazioni lineari) 108; (Funzioni additive d'insieme) 283.
- s. M. Picone 38.
- Filimonov, V. A. s. L. P. Rapoport 440.
- Filin, A. P. (Variationsmethoden in der Baumechanik) 187.
- Filonenko-Borodič, M. M. (Festigkeit von Materialien) 397.
- Finikov, S. P. (Stratifizierung eines Paares von Komplexen) 155.
- Finn, Robert (Equations of minimal surface type) 325.
- Finoult, J. (Merkwürdige Identitäten) 368.
- Finzel, Lothar (Lage der Wurzeln) 254.
- Finzi, B. (Teoria dei campi) 176.
- Fisher, Ronald (Analysis of variance) 127; (Discussion) 128.
- Flejšman, N. P. (Verstärkung des Randes von krummlinigen Öffnungen dünner Platten) 186.
- Flejšman, N. P. und V. N. Gnatykiv (Spannungskonzentration um Hohlraum) 189.
- Fleming, W. H. (Games over function space) 103.
- — — and L. C. Young (Boundary) 46.
- Flood, Merrill M. (Sequential decision-making experiment) 137; (Game-learning theory) 138.
- Fock, W. (Bewegung von Körpern in der Einsteinschen Relativitätstheorie) 427; (Ansichten Bohrs über Quantenmechanik) 429.
- Fodor, G. (Problem in set theory) 45.
- Fogel, Karl-Gustav ( $p$ - and  $d$ -phase of the Yukawa potential) 231.
- Foldy, Leslie L. (Operators and observables) 229.
- Folner, Erling (Theorem of Bogoliouboff) 23.
- Föppl, L. (Auswerteverfahren der ebenen Spannungsoptik) 394.
- Ford jr., Lester R. (Homeomorphism groups and coset spaces) 173.
- Forsythe, A. I. and G. E. Forsythe (Punched-card experiments) 110.
- G. E. s. A. I. Forsythe 110.
- Fourès, Y. (Problème de Cauchy pour des équations hyperboliques) 321.
- Fox, J. L. and G. W. Morgan (Stability of flows of an ideal fluid) 196.
- L. (Linear equations) 109; (Table for Bessel functions) 114.
- Frahn, W. E. s. H. L. Jordan 433.
- Franchetta, Alfredo (Forme algebriche di  $S_4$ ) 371.
- Franciosi, Vincenzo (Teoria delle linee d'influenza) 183; (Carico di punta critico) 190; (Strutture monodimensio-



- nali) 190; (Procedimento del „limit design“) 190.
- Franke, Herbert W. (Strömungsmodell) 229.
- Frankl, F. I. (Quantenmechanik) 230.
- — — and E. A. Karpovich (Gas dynamics of thin bodies) 412.
- Franklin, Norman L. s. Carl A. Bennet 349.
- Franz, Wolfgang (Koinzidenzpunkte) 174.
- Fraser, P. A. (Ionization in a gas before a source of ionizing particles) 447.
- Fréchet, Maurice (Paraanalytische Funktionen) 66.
- Freud, G. (Orthogonale Polynome) 55; (Funktionenklassen  $Lip\ \alpha$  und  $Lip(\beta, p)$ ) 292.
- Freudenthal, Hans (Beziehungen der  $E_7$  und  $E_8$  zur Oktaebene. II.) 261.
- Fried, B. D. s. R. J. Riddell jr. 436.
- Friedman, Bernard and Joy Russek (Addition theorems for spherical waves) 58.
- M. D. s. F. I. Frankl 412.
- Friedrich, Hans R. s. Jack L. Beharrell 182.
- Froda, Alexandru (Ensembles de distances) 99.
- Fröhlich, A. (Theorem of L. Rédei's) 269; (Class field tower) 271.
- Fruchter, B. (Factor analysis) 129.
- Fujita, Shigeichi (Quasistationary process. I.) 213.
- Fukuda, Yoshiichi and Yukio Osaka (Order-Disorder transition) 450.
- Fulton, Thomas and Robert Karplus (Two-body systems) 432.
- G.-Rodeja F., E. (Determinants of hyperbolic sines and cosines) 14; (Area of the ellipse) 144.
- Gachov, F. D. und L. I. Čibrikova (Singuläre Integralgleichungen) 92.
- Gagliardo, Emilio (Compattezza per insiemi di funzioni di due variabili) 49; (Equazione del calore) 87; (Unicità per gli integrali di un'equazione differenziale ordinaria) 311.
- Gaier, D. s. J. L. Walsh 304.
- Galanin, A. D. (Entwicklungsparameter in pseudoskalarer Mesonentheorie) 435; (Divergenzen in der Theorie des pseudoskalaren Mesons) 435.
- Galburà, Gh. (Variété algébrique) 146.
- Gallarati, Dionisio (Spazi lineari di una ipersuperficie algebrica) 146.
- Galli, Mario (Paradosso degli orologi) 226.
- Gambill, Robert A. (Stability criteria for linear differential systems) 314.
- Gandy, R. O. (Out-of-focus diffraction patterns) 222.
- Gantmacher, F. R. und M. A. Ajzerman (Automatische Regelung) 12.
- Garabedian, P. R. and Max Schiffman (Partial differential equations) 89.
- García, Godofredo (Eigenschaften einer Differentialgleichung) 70; (Gyroskopische Bewegung von Geschossen) 179; (Transformation der Gleichungen der Dynamik in einem gekrümmten Raum) 390.
- Garcia, Mariano (Numbers with integral harmonic mean) 275.
- García, R. Vázquez s. Vázquez García, R. 387.
- Gårding, Lars (Spectral function belonging to an extension of a differential operator) 88.
- Gáspár, J. (Determinanten) 9.
- Gautschi, Walter (Integrationsverfahren von Meißner-Ludwig) 112; (Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten) 335.
- Gavurin, M. K. (Eigenwerte von Integraloperatoren) 108.
- Geglija, T. G. (Hilbertsche Randwertaufgabe) 92.
- Gejlikman, B. T. (Superflüssigkeit) 235.
- Gelfand, I. M. und R. A. Minlos (Quantisierte Felder) 232.
- Gell-Mann, Murray and Kenneth M. Watson (Interactions between  $\pi$ -mesons and nucleons) 436.
- Gellman, H. s. Sir Edward Bullard 457.
- Georgescu-Roegen, Nicholas (Economic equilibrium) 363.
- Georgievskaja, V. V. s. G. N. Savin 184.
- Gercenštejn, M. E. (Dielektrische Permeabilität des Plasmas) 447.
- Gere, J. M. (Vibrations of beams) 192.
- Gerecke, Eduard (Beispiele aus Elektroservotechnik) 182.
- Gergely, E. (Classification des surfaces) 384.
- Gergen, J. J. and F. G. Dressel (Mapping for elliptic equations) 84.
- Gericke, H. (Mathematik in der Kulturgeschichte) 2.
- Gerjuoy, E. and David S. Saxton (Acoustic field) 414.
- German, V. L. und M. Ja. Azbel' (Hydrodynamik der Kavitationsflüssigkeit) 195.
- German, V. L. und M. I. Lomonosov (Kavitation in der Nähe vibrierender Teile von Wasserkraftmaschinen) 195.
- Geronimus, Ja. (J.) L. (A. M. Ljapunow) 82; (I. A. Wyschnegradski, W. G. Imschenetzki) 83; (P. L. Tschebyschew) 149; (S. W. Kowalewskaja, I. W. Meschtscherski) 177; (N. J. Shukowski) 193; (S. A. Tschaplygin) 193; (Asymptotische Eigenschaften der Polynome) 255; (W. A. Steklov) 318.
- Gevers, Rudolf (Rayons X diffractés par des cristaux) 451.
- Ghaffari, Abolghassem (Mathematical aspects of compressible flow) 198.
- Gheorghitǎ, Șt. I. (Mouvements en milieux poreux) 208.
- Gheorghiu, Octavian Em. (Équations fonctionnelles) 109.
- Gillman, Leonard and Melvin Henriksen (Rings of continuous functions) 100.
- Gilvary, J. J. (Thomas-Fermi atom) 233; (Temperature-perturbed Thomas-Fermi equation) 233.
- Ginsburg, Seymour (Order types) 278; (Order types and decompositions of sets) 279.
- Ginzburg, M. A. (Gyrotrope Wellenleiter) 221.
- V. L. (Optische Eigenschaften der Metalle) 237.
- Gispert, Hans-Günter (Formeln von Plemelj) 301.
- Glaser, Walter (Licht und Materie) 438.
- Glembokij, I. I. s. A. P. Jucis 234.
- Glicksberg, Irving s. Richard Bellman 139, 359.
- Glikli, L. V. (Koeffizienten der Hubkraft für Flügelprofile) 200.

- Gnatykyv, V. N. s. N. P. Flejšman 189.
- Gnedenko, B. (Wahrscheinlichkeitsverteilung von Stichprobenreihen) 343.
- Godeaux, Lucien (Punto di diramazione) 147.
- Godfrey, G. H. (Optical diffraction effects) 423.
- Golab, S. (Formule simpsonienne) 54.
- et C. Olech (Formule simpsonienne) 54.
- Gold, B. and G. O. Young (Response of linear systems to non-Gaussian noise) 419.
- Go'dberg, A. A. (Verteilung der Werte meromorpher Funktionen) 62.
- Goluzin, G. M. (Schlichte Funktionen) 64.
- Gomes, Ruy Luís (Relativitätstheorie) 226; (Begriff des starren Körpers) 226.
- González, M. O. (Reihenentwicklungen nach Legendreschen Polynomen) 295.
- Gonzalez Dominguez, Alberto (Divergente Integrale der Quantenelektrodynamik) 434.
- Goodman, Leo A. (Methods of amalgamation) 137.
- Goodstein, R. L. (Recursive arithmetic) 249; (Recursive irrationality of  $\pi$ ) 249; (Recursive function theory) 250.
- Gorbunov, A. D. (Koordinaten der Lösungen von Systemen gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen) 77; (Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen) 77.
- Gordon, Alan N. (Dual integral equations) 93.
- W. L. (Coefficient group in cohomology) 387.
- Gorn, Saul (Computing errors) 342.
- Gorowara, K. K. (Ruled surfaces) 373.
- Gotó, Ken-iti (Relativistic wave equations) 429.
- Goto, Shigeo (Cut-off method) 441.
- Gourary, Barry S. and Robert W. Hart (Model of an anti-ferromagnet) 236.
- Gowen, J. W. s. O. Kempthorne 359.
- Graffi, Dario (Legge di minimo della magnetostatica) 216; (Oscillazioni non lineari) 317.
- Graiff, Franca (Spazi di Einstein) 161.
- Gramatzki, H. J. (Konstruktive Optik) 224.
- Grammel, Richard (Giroscopio asimmetrico) 392.
- Granat, Ju. L. (Iterationsschema zur Berechnung algebraischer Gleichungen) 336.
- Grass, Günther (Drudesche Theorie) 237.
- Gray, C. A. M. (Water hammer) 405.
- Greco, Donato (Criteri di compattezza per funzioni in  $n$  variabili) 287.
- Green, A. E. s. J. E. Adkins 396.
- H. S. (Quantized field theory) 232.
- — — and O. Bergmann (Component showers) 444.
- — — and H. Messel (Expansion of functions in terms of their moments) 56.
- L. W. (Surfaces without conjugate points) 373.
- Robert B. (Laws of thermodynamics) 210.
- Grenander, U. (Stochastic processes) 355.
- Grenville-Wells, H. J. (Trigonometric functions in crystal structure analysis. I. II.) 452.
- Griffin, Harriet (Theory of numbers) 32.
- Grigofev, A. S. (Verbiegung von Platten) 398.
- I. N. (Transformation von  $p$ -orthogonal-konjugierten Systemen) 367.
- Grilickij, D. V. (Druck eines starren Zylinders) 189.
- Grinfel'd, U. K. s. A. D. Myškis 70.
- Grioli, G. (Equazioni dinamiche del solido pesante) 392.
- Grodzovskij, G. L. (Geschwindigkeitsfeld bei turbulenter Strömung) 406.
- Groot, S. R. de and P. Mazur (Reciprocal relations. I.) 213; — — — s. P. Mazur 213.
- — — s. J. Vlieger 418.
- Gross, B. (Linear viscoelasticity) 398.
- Oliver s. Richard Bellman 139, 359, 364.
- Grothendieck, A. (Espaces  $(F)$  et  $(DF)$ ) 98; (Espaces vectoriels topologiques) 334; (Produits tensoriels topologiques) 334.
- Gruenberg, H. s. R. A. Hurd 220.
- Gruenberger, Fred (Diagrams in punched card computing) 114.
- Grün, F. und K.-F. Moppert (Brownische Bewegung) 419.
- Grundy, P. M. (Method of sampling) 353.
- Gruško, G. S. (Verbiegung einer Schiene) 185; (Verbiegung eines Balkens) 185.
- Gubař, N. A. (Singuläre Punkte von zwei Differentialgleichungen) 312.
- Guitel, G. (Processus logique d'une démonstration) 4; (Étude métrique des familles de tétraèdres) 368.
- Gulliksen, Harold (Successive intervals assuming unequal standard deviations) 134.
- Gulotta, Beniamino (Eventi compatibili) 117; (Deviazioni angolari locali del geoide dall'ellissoide) 239.
- Gundlach, Karl-Bernhard (Spitzenformen zu Idealstufen der Hilbertschen Modulgruppen) 273.
- Gurevič, A. V. (Supraleitung von Häutchen) 449.
- M. I. (Wellengleichung) 177; (Adjungierte Masse eines Doppelgitters) 196.
- Gurland, John (Maximum likelihood estimators) 352.
- Gürsey, Feza (Maxwell's tensor) 215; (Motion of electron) 231.
- Gut, Max (Relativquadratische Zahlkörper) 31.
- Gutman, A. S. (Modified Luneberg lens) 220.
- Guttman, Louis (Common-factor analysis) 130.
- Gyires, Béla (Grenzwert von Matrizen) 252.
- Haar, D. ter (Lambda transition of liquid helium) 449.
- Hadamard, J. (Géométrie non-euclidienne) 141; (Théorème de A. Harnack) 322.
- Hagedorn, Rolf (Kernverdampfung) 443.
- Halanay, A. (Méthode du petit paramètre) 317.
- Hale, Jack K. (Non-linear systems of differential equations) 78; (Boundedness of solutions of linear differential systems) 314; (Products of exponential and periodic functions) 315.
- — — s. Lamberto Cesari 315.
- Hamilton, O. H. (Cartwright-Littlewood fixed point theorem) 386.



- Hardy, G. H. and E. M. Wright (Theory of numbers) 33.
- Harman, Harry H. (Square root method of factor analysis) 130.
- Harrison, V. G. W. (Proceedings of the second international congress on rheology) 397.
- Hart, Robert W. s. Barry S. Gourary 236.
- Hartman, Philip and Aurel Wintner (Conformal maps defined by Lagrange's series) 304; (Binary Pfaffians) 320.
- Hasegawa, Kazu, Sadahiko Matsuyama and Tomoya Akiba (Magnetic moment of nucleon) 435.
- Hashimoto, Hiroshi (Generalization of groups) 14.
- Hasimoto, Keizo, Sadao Kato and Syozo Matuura (Second principal theorem) 62.
- Hasse, Helmut (Zerlegungssatz für Funktionalprimdivisor) 271.
- Hattori, Akira s. Goro Toyoda 25.
- Haupt, Otto (Bogen mit gleichartigen Schmiegebilden) 162.
- Hausner, Melvin (Multidimensional utilities) 138.
- Hayes, R. M. (Linear problems on Hilbert space) 107.
- Heading, J. s. P. C. Clemmow 219.
- Heer, W. J. C. de und J. Sattler (Versicherungsmathematik) 360.
- Heins, Maurice (Blaschke product) 63.
- Heller, Alex (Homological resolutions of complexes with operators) 387.
- Hély, Jean (Théorème des trois courbes) 371.
- Hemmi, Denzaburo (Minimum area of convex curves) 164.
- Hemphill, F. M. (Desk calculator operations) 127.
- Henriksen, Melvin s. Leonard Gillman 100.
- Hermann, Robert (Automorphismes infinitésimaux d'une G-structure) 160.
- Herring, Conyers (Low-energy phonons) 237.
- Herstein, I. N. (Lie ring of a division ring) 262.
- Hervé, Michel (Transformations dans le bicercle-unité) 67.
- Herz, Jean-Claude (Théorie algébrique des équations aux dérivées partielles) 268.
- Herzog, Fritz (Power series) 60.
- Heywood, Philip (Asymptotic distribution of eigenvalues) 73.
- Higman, D. G. (Splitting extensions) 15.
- Higuchi, Isao (Simultaneous equations) 352.
- Hill, G. W. s. T. Pearcey 339.
- Hinkelmann, Karl und Rudolf Schwarzenberger (Wettervorhersage) 240.
- Hiramatu, Hitosi (Groups of homothetic transformations) 159.
- Hirasawa, Yoshikazu, s. Taro Ura 312.
- Hirokawa, Hiroshi (Uniform convergence of trigonometrical series) 56.
- Hirsch, Guy (Groupes d'homologie des espaces fibrés) 389.
- Hjelmstev, Johannes (Kongruenzlehre) 367.
- Hoel, Paul G. (Test for Markoff chains) 356.
- Hoffman, A. J. s. Ky Fan 10.
- Paul J., Leon Festinger and Douglas H. Lawrence (Group comparability in competitive bargaining) 139.
- Hofmann, J. E. (Zyklometrische Funktionen und Logarithmen) 244.
- Hölder, Ernst (Extremalfläche hyperbolischen Typs) 86.
- Holt, M. (Vortical singularity in conical flow) 204.
- Homilius, Joachim (Innere Feldemission in Einkristallen) 238.
- Hontoy, P. s. H. Bastin 217.
- Horie, Chûji and Yukio Osaka (Ziman's quantum hydrodynamics) 448.
- Hörmander, Lars (Theorem of Grace) 255.
- Horst, Paul (Expected correlation between multiple-choice tests) 131.
- Horton, G. K. and E. Phibbs (Effect of nuclear charge) 435.
- Horváth, J. (Approximation polynomiale sur un ensemble) 290; (Hilberttransformierte von Distributionen) 335.
- Horvay, G. and F. N. Spiess (Orthogonal edge polynomials) 338.
- Hosemann, R. und S. N. Bagchi (Greensche Grundlösung der allgemeinen Wellengleichung) 176.
- Hosszú, M. (Functional equations related with associative law) 108.
- Householder, A. S. s. A. W. Kimball 133.
- Hoyle, M. G. s. W. T. Sharp 350.
- Hsu, L. C. (Inversion principle) 21.
- Hua, Loo-Keng (Riemann curvature of non-Euclidean space) 157.
- Hudimoto, Hiroshi s. Kameo Matusita 128.
- Hukuhara, Masuo (Fonction convexe) 289.
- Hunter, J. S. s. G. E. P. Box 358.
- Huppert, Bertram (Produkte endlicher Gruppen) 258.
- Hurd, R. A. (Propagation of a wave along infinite corrugated surface) 219.
- — — and H. Gruenberg (H-plane bifurcation of waveguides) 220.
- Huybrechts, M. (Variance d'une estimation) 352.
- Hyman, M. A. (Correlation function) 202.
- Iacob, Caius (Effort exercé sur une paroi) 402.
- Ibadur Rahman, Qazi s. Rahman, Qazi Ibadur 304.
- Ichimura, Hiroshi (Method in quantum statistical mechanics. I.—III.) 212.
- Igusa, Jun-ichi (Kähler varieties) 379.
- Ikeda, Kazuyoshi (Condensing systems) 448.
- Masatoshi, Hiroshi Nagao und Tadashi Nakayama (Algebras) 27.
- Il'in, V. A. (Aufgaben der Elektrodynamik) 421.
- Il'jušin, A. A. (Spannungen und kleine Deformationen) 183; (Spannungen bei der Biegung von Balken) 397.
- Illingworth, C. R. (Heat transfer) 407.
- Imamura, Tsutomu s. Sigenobu Sunakawa 434.
- Inada, Ken-ichi (Theorems about social welfare function) 136.
- Inagaki, Takeshi (Topologie. III.) 385.
- Infeld, L. (Über klassische Elektrodynamik) 420.
- — — gemeinsam mit R. Ingarden, M. Krzyżński, J. Rayski, W. Rubinowicz und W. Wrona (Bedeutung der



- modernen Physik für die Mathematik) 176.
- Infeld, L. und L. Sosnowski (Materiebegriff in der Physik) 428.
- Ingarden, R. (Fünfdimensionale Feldtheorie) 427; (Féneysche Interpretation der Quantenmechanik) 428.
- — s. L. Infeld 176.
- Ingelstam, Erik (Optical uncertainty principle) 221.
- Ingersoll, Alfred C. s. Leonard R. Ingersoll 419.
- Leonard R., Otto J. Zobel und Alfred C. Ingersoll (Heat conduction) 419.
- Inglis, D. R. (Particle derivation of nuclear rotation properties) 440.
- Ionescu, D. V. (Méthode de Runge-Kutta) 337.
- Dan Gh. (Vecteur de Galerkin) 177; (Mouvements des fluides visqueux incompressibles) 401.
- Tulcea, C. T. (Fonctions d'ensembles) 45; (Théorèmes ergodiques) 335.
- Iséki, Kiyoshi (Metrization problem) 166; (Hyperspaces) 166; (Hypocompact spaces) 386.
- Ishiguro, Eiichi and Shoichiro Koide (Hydrogen molecules) 234.
- Ishihara, Shigeru (Isometrics of pseudo-hermitian spaces. I.) 159; (Fibred Riemannian spaces) 378.
- Itabashi, Kiyomi (Tamm-Dancoff approximation. I. II.) 431.
- Ivanenko, D. D. und D. F. Kurdgelaidze (Grundgleichungen der Mesodynamik) 437.
- Ivanov, N. F., G. S. Salechov und I. V. Svirskij (Ausbeutung von Erdöl-Bohrlöchern) 210.
- — — s. G. S. Salechov 210.
- Ivanovitch, Branislav V. (Discrimination des ensembles statistiques) 354.
- Ivković, M. (Axially symmetrical stress) 185.
- Iyer, R. V. (Nombres triangulaires) 33.
- — — et M. Delcourte (Nombres triangulaires) 33.
- Izmailov, V. D. (System von Pseudotensoren) 156.
- Izumi, Shin-ichi and Masako Sato (Integrability of trigonometrical series. I.) 56.
- Jaglom, A. M. (Lineare Approximationsaufgaben) 123.
- — — und I. M. Jaglom (Aufgaben in elementarer Darstellung) 1.
- I. M. s. A. M. Jaglom 1.
- Jahn, H. A. (Fractional parentage coefficients) 442.
- Jahrreiss, Heribert (Elektro-  
nenbeugungsuntersuchungen) 453.
- Jain, Mahendra Kumar (Maximum real part of an integral function) 304.
- Jakubović, V. A. (Methode von Ljapunov) 71; (Charakteristische Exponenten von linearen Differentialgleichungen) 77.
- James, I. M. (Homotopy groups of pairs and triads) 389.
- Jancovici, B. G. (Coulomb energy) 439.
- Janenko, N. N. (Einbettung von Flächen) 156.
- Janik, J. (Chemische Bindung, Molekül-Polarisation) 446.
- Janossy (Janoši), L. (Kaskadentheorie. I.) 444.
- Jans, James P. (Indecomposable representation of algebras) 264.
- Janssens, P. s. H. Bastin 217.
- Jarden, Dov (Nullifying coefficients) 273.
- Järnefelt, G. (Endliches Weltbild) 428.
- Jauho, Pekka (Entropy in Bose-Einstein statistics) 212; (Theorem of statistical mechanics) 212.
- Jean, J. H. (Dynamical theory of gases) 234.
- Jehne, Wolfram (Klassenkörpertheorie) 29.
- Jenkins, James A. (Coefficient theorem) 305.
- Jennings, S. A. (Substitution groups of formal power series) 22.
- Jifina, Miloslav (Conditional probabilities on  $\sigma$ -algebras) 118.
- Johansson, Ingebrigt (Symboles logiques) 4.
- Johnson, N. L. (Frequency curves) 351.
- Johnston, J. (Test for systematic oscillation) 357.
- Jonckheere, A. R. ( $k$ -sample test) 353.
- Jordan, H. L. und W. E. Frahn (Nichtlokale Feldtheorie. II.) 433.
- Joshi, D. D. (Processus stochastiques en démographie) 359.
- Jouvet, Bernard (Électromagnétisme électroneutrinien) 439.
- Jucis, A. P., V. V. Kibartas und I. I. Glembockij (Vereinfachte Focksche Gleichungen) 234.
- Juškov, P. P. (Konvergenz von Reihen) 338.
- Kahana, Sidney s. James R. Wait 220.
- Kakehashi, Tetsujiro (Interpolation in the real axis) 289; (Divergence of interpolations. I. II.) 297.
- Kalicki, Jan (Undecidable problem) 246.
- Kalisch, G. K., J. W. Milnor, J. F. Nash and E. D. Nering ( $n$ -person games) 139.
- Kalitzin, Nikola St. (Relativistische Mechanik des materiellen Punktes) 426.
- Källén, G. (Coupling constant) 430.
- Kalmár, J. (Géométrie de Bolyai-Lobatchevsky) 141.
- Kalugina, E. P. (Die Klassen  $H_\phi(r_1, \dots, r_n)$ ) 287.
- Kamen, M. D. s. J. G. Beckerley 439.
- Kamenkov, G. V. und A. A. Lebedev (Stabilität in endlichem Zeitintervall) 313.
- Kampé de Fériet, J. (Statistical theory of turbulence. I.—III.) 410.
- Kampen, N. G. van (Symmetry relation of the  $S$ -matrix) 430.
- Kanellos, S. G. (Construction of sample) 351.
- Kanno, Kōsi (Riemannsum-mability) 51.
- Kaplan, S. A. (Gasmagnetische isotrope Turbulenz) 425.
- Kaplansky, Irving (Ring isomorphisms of Banach algebras) 105.
- Karcivadze, I. N. und B. V. Chvedelidze (Cauchysches Integral) 300.
- Karl, Herbert (Wesen des Unendlichen) 40.
- Karlson, Paul (Zauber der Zahlen) 241.
- Karmazina, L. N. (Jacobische Polynome) 114.
- Karplus, Robert and J. M. Luttinger (Hall effect) 456.
- — s. Thomas Fulton 432.
- Karpovich, E. A. s. F. I. Frankl 412.
- Kartvelišvili, N. A. (Stationäre

- Zustände in Wasserkraftwerken) 209.
- Karunes, B. (Core in a plate under tensions) 188.
- Kasahara, Shouro (Hilbert space) 99.
- Kasparjanc, A. A. (Schallwellen in einem zähen Gase) 207.
- Kato, Sadao s. Keizo Hasimoto 62.
- Katō, Tizuko (Points singuliers des équations différentielles ordinaires. I.—III.) 312.
- Kato, Tosio (Semigroups generated by Kolmogoroff's differential equations) 107.
- Katz, Donald L. s. James G. Knudsen 404.
- Kawada, Yukiyosi (Analytic line bundles) 173.
- Kawaguchi, Akitsugu (Non-linear connections) 383.
- Kayan, Ilhan (Plastic torsion problem for prismatical bars) 398.
- Keane, A. (Finite strain in an isotropic material) 397.
- Keeping, E. S. s. J. F. Kenney 349.
- Keller, Herbert B. and Joseph B. Keller (Eigenvalues of nearly circular regions) 328.
- Joseph B. s. Herbert B. Keller 328.
- Kemperman, J. H. B. and Peter Scherk (Sums of sets of integers) 19.
- — — s. Peter Scherk 18.
- Kemphorne, O., T. A. Bancroft, J. W. Gowen and J. L. Lush (edited by): (Statistics in biology) 359.
- Kennedy, J. M. s. W. T. Sharp 350.
- Kenney, J. F. and E. S. Keeping (Mathematics of statistics. I.) 349.
- Kerimov, B. K. s. A. A. Sokolov 440.
- Kerr, E. s. A. C. Allen 89.
- Kertész, A. (Modules and semi-simple rings. I.) 263; (Characterization of semi-simple rings) 263.
- Khan, Nisar A. (Incidence matrices) 250.
- Khare, R. C. (Expansion of a gas-cloud) 413.
- Kibartas, V. V. s. A. P. Jucis 234.
- Kimball, A. W. and A. S. Housholder (Selection of macro-nuclear units in paramagnetic growth) 133.
- Kimura, Naoki (Maximal subgroups) 14; (Examples of semigroups) 15.
- Kimura, Naoki s. Takayuki Tamura 15.
- Kinohara, Akira (Cohomology group in complete fields) 27.
- Kinukawa, Masakichi (Strong summability of derived Fourier series) 293; (Cesàro summability of Fourier series) 56.
- Kirchenmayer, A. (Diffusion length and age in nuclear reactor) 443.
- Kirkor, A. (Antoine phenomena) 383.
- Kiržnic, D. A. (Meson-Nukleon-Wechselwirkungen) 233.
- Kiss, I. (Newtonsches Näherungsverfahren) 337.
- Kita, Tōru (Limit ordinals) 278.
- Kitajgorodskij, A. I. (Vorzeichen der Strukturamplituden) 236.
- Klein, Abraham (Tamm-Dancoff formalism) 432; (Single-time formalisms) 432.
- Klimontovič, Ju. L. (Zweite Quantelung im Phasenraum) 417.
- Klimovskij, Gregorio (Definition von „logische Wahrheit“) 246.
- Kline, Morris (Hyperbolic partial differential equations) 321.
- Klinger, M. I. (Energiespektrum eines Elektrons) 236; (Polaron-Halbleiter) 236.
- Klug, H. P. and L. E. Alexander (X-ray diffraction) 236.
- Knudsen, James G. and Donald L. Katz (Fluid dynamics) 404.
- Kobayashi, Shōshichi (Groupes linéaires irréductibles) 160.
- Koehler, Fulton (Moduli of zeros of a polynomial) 254.
- Köhler, Hilding (Meteorological turbulence) 240.
- Kohn, Walter (Born expansions) 231.
- Koide, Shōichirō s. Eiichi Ishiguro 234.
- Kojima, Takashi (Japanese abacus) 115.
- Koksmā, J. F. (Fonctions à l'aide d'intégrales de Lebesgue) 49.
- Kolden, K. (Prime divisors of homogeneous polynomials) 28.
- Kolesnikov, K. S. (Experimentelle Kurven von gedämpften Schwingungen) 182.
- Kołodziejski, R. (Stöße und Kernkräfte) 439.
- Komatu, Yūsaku (Genotypes after a panmixia) 133; (Mother-child combinations) 133.
- Kondō, Motokiti (Énumération transfinie. I. II.) 41.
- Kontorovič, P. G. and B. I. Plotkin (Verbände mit additiver Basis) 261.
- Kopeč, Z. (Kritik der Kopenhagener Schule) 429.
- Koreik, Antoni (History of propositional calculus) 245.
- Korenblit, L. L. s. A. G. Samojlovič 455.
- Korst, H. (Auflösung eines Freistrahlandes) 409.
- Košarev, V. P. (System endlicher Massen in Einsteinscher Gravitationstheorie) 227.
- Kostjukov, A. A. (Körper in einer Flüssigkeit) 406.
- Kostovskij, A. N. (Quadrierbarkeit stetiger Flächen) 284.
- Köthe, Gottfried (Lokal konvexe Räume) 334.
- Kovancov, N. I. (Anwendung anholonomer Geometrie auf einen Linienkomplex) 374; (Indikatrix geodätischer Torsionen) 383.
- Kowalsky, Hans-Joachim (Topologische Algebra) 267.
- Kozlov, V. Ja. (Lokale Charakteristik eines Funktionensystems) 290.
- Kranjc, Katarina (Collimation error of circular apertures in X-ray scattering) 235.
- Krasner, Marc (Prolongement analytique) 306, 307.
- Krasnosel'skij, M. A. (Zerspaltung linearer Integraloperatoren) 102.
- — — und Ja. B. Rutickij (Lineare Funktionale in Orliczschen Räumen) 101.
- Krasovskij, N. N. (Sätze von A. M. Ljapunov und N. G. Četaev) 80; (Nicht-lineares Differentialgleichungssystem) 80.
- Krejn, M. (Inverse Randwertaufgabe) 399.
- Krjučin, A. F. (Strömung um ein Profil) 200.
- Kroll, Norman M. and Malvin A. Ruderman (Photomeson production) 437.
- Krull, Wolfgang (Hauptreihen endlicher Gruppen) 258.
- Krzywoblocki, M. Z. v. (Boundary layer) 406.
- Krzyżański, M. s. L. Infeld 176.
- Kuchtenko, A. I. (Dynamische Systeme) 178.



- Kuhn, P. (Viggo Brunsche Siebmethode) 275.
- Kuiper, N. H. (Locally projective spaces) 161; (Ebene Geometrie) 366.
- Kumar, Ram (Self-reciprocal function) 333.
- Jain, Mahendra s. Jain, Mahendra Kumar 304.
- Kuniyoshi, Hideo (Purely-transcendence of a field) 266.
- Kunugi, Kinjirō (Espaces complets. II. III.) 166.
- Kuramochi, Zenjiro (Dirichlet problem on Riemann surfaces. I.—V.) 305.
- Kurdgelaidze, D. F. (Nicht-lineare Streuung in Elektrodynamik) 437.
- — — s. D. D. Ivanenko 437.
- Kurepa, G. (Binomialzahlen) 33; (Relation d'inclusion) 40; (Symmetrical binary relations) 40; (Fonctions croissantes) 43; (Fonctions réelles) 43; (Abstract spaces) 43; (Faktorielle endlicher und unendlicher Zahlen) 44.
- Kurita, Minoru (Projectively flat space) 383.
- Kurnosova (Kurnossowa), L. V. (L. W.) (Streuung von Photonen) 446.
- Kuroš (Kurosch), A. G. (Algebraische Gleichungen) 8.
- Kušer, I. (Diffusion of radiation) 224.
- Kustaanheimo, P. und B. Qvist (Endliche Geometrien) 140.
- Kuznecov, P. I., R. L. Stratonovič und V. I. Tichonov (Korrelationsfunktionen) 418.
- Labra, Manuel (Medianen des Sehnenvierecks) 143.
- Lacey, A. E. s. M. T. L. Bizley 135.
- Lacombe, Daniel (Semi-réseau) 7.
- Lafleur, Ch. (Fonction impulsive de Dirac) 335.
- Laha, R. G. s. D. Basu 350, 351.
- Lammel, Ernesto  
 $\left( \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) U(x, y, z) = 0 \right)$  89; (Funktionen komplexer Variabler) 307.
- Lancaster, H. O. (Traces and cumulants of quadratic forms) 120.
- Landahl, Mårten T. (Flow around wings at transonic speeds) 413.
- Landau, L. D. und I. M. Chalatnikov (Absorption des Schalles) 448.
- Landkof, N. S. (Approximation stetiger Funktionen durch harmonische) 326.
- Landsberg, P. T. (Most probable distributions) 210; (Bose-Einstein condensation) 211; (Spectrum approximation) 211.
- — — s. F. Ansbacher 211.
- Lang, Serge (Local uniformization theorem) 272.
- — and André Weil (Points of varieties in finite fields) 272.
- Lange, Heinrich (Grundlagen der Physik. I.) 3.
- Lapidus, Leo s. E. A. Nordhaus 366.
- Laporte, O. s. Arnold Sommerfeld 221.
- Lapteŭ, B. L. (Liesche Ableitung) 382.
- Laskar, Williams et Marcos Moshinsky (Matrices  $R$  et  $S$ . I. II.) 430.
- Latyševa, K. Ja. (Resultat von N. S. Košljakov) 58.
- Laue, M. v. s. Max Planck 416.
- Lauwerier, H. A. (Randwertaufgaben mit Winkelderivierten) 327.
- Laval, J. (Diffusion des rayons  $X$  par les cristaux. I. II.) 450.
- Lavendhomme, R. (Algèbres de Lie) 262.
- Lawden, Derek F. (Mathematics of engineering systems) 69.
- Lawrence, Douglas H. s. Paul J. Hoffman 139.
- Lax, P. D. and A. N. Milgram (Parabolic equations) 87.
- Lebedev, A. A. s. G. V. Kamenkov 313.
- LeCam, Lucien (Theorem of Lionel Weiss) 354.
- Lechnickij, S. G. (Spannungen in anisotroper Platte) 394.
- Ledger, A. J. (Harmonic homogeneous spaces) 157.
- Lee, T. D. (Renormalizable field theory) 232.
- Legras, J. (Approximation de l'aile élanée en écoulement subsonique) 199; (Équations différentielles) 309.
- Lehman, Sherman s. Richard Bellman 363.
- Leibfried, Günther und Ernst Schlömann (Wärmeleitung in Kristallen) 237.
- Lense, Josef (Einbettungssatz der Differentialgeometrie) 377.
- Leont'ev, A. F. (Dirichletsche Polynome) 61.
- Leslie, D. C. M. and J. D. Perry (Wings at supersonic speeds) 205.
- Leti, Giuseppe (Gruppi aggiunti del gruppo di Galilei) 261.
- Levi, Beppo (Partielle Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung) 85; (Verbiegungen dünner Platten. I. II.) 185.
- Levin, E. (Circle theorem of hydrodynamics) 194.
- J. H. s. R. F. Clippinger 340.
- Levinger, J. S. (Photonuclear reactions) 442.
- Levitzki, Jakob ( $p$ -soluble rings) 25.
- Li, C. C. and Louis Sacks (Joint distribution and correlation between relatives) 133.
- Liao, S. D. (Cyclic products of spheres) 171.
- Lichnerowicz, André (Geometria differenziale in grande) 376.
- Lidskij, V. B. (Differentialgleichungssystem  $-y'' + P(t)y = \lambda y$ ) 314.
- Lietzmann, W. (Sonderlinge im Reich der Zahlen) 250.
- — s. Heinrich Behnke 242.
- Lifšic, E. M. (Molekulare Anziehungskräfte) 447.
- Lighthill, M. J. (Laminar skin friction and heat transfer) 407.
- Lilić, Borislav (Forces d'inertie) 427.
- Línek, Allan (Temperature factor) 450.
- Lipmanov, É. M. (Elektrodynamik) 215.
- Littlewood, J. E. (Theorem of Paley) 55.
- — — s. M. L. Cartwright 386.
- Liu, Meng-Hui (Non-differentiable continuous function) 285.
- Ta-Chung s. J. J. Polak 362.
- Lluís R., E. s. F. Recillas J. 266.
- Lochs, Gustav (Konvergenzradien einiger Potenzreihen) 299.
- Lodge, A. S. (Boltzmann's equations) 399.
- Lomadze, G. A. (Summation einer singulären Reihe. II.) 36; (Darstellung der Zahlen durch Summen von Quadraten) 36.



- Lombardo-Radice, Lucio (In-  
versione) 141.
- Lomonosov, M. I. s. V. L. Ger-  
man 195.
- London, Fritz (Superfluids. II.)  
234.
- Lopšić, A. M. (Eigenwerte und  
Eigenebenen eines linearen  
Operators) 337.
- Lorch, Edgar R. (Anelli nor-  
mati) 334.
- Lorent, H. (Courbes associées à  
des faisceaux de courbes) 369.
- Lorenz, Paul (Mathematisch-  
statistische Arbeiten) 350.
- Lorenzen, Paul (Modallogik)  
246.
- Loś, J. (Direct sum of count-  
able Abelian groups) 18.
- Losada y Puga, Cristobal de  
(Lehrbuch der Analysis. Bd.  
I—III) 276.
- Lösch, Friedrich (Tafeln ele-  
mentarer transzendenter  
Funktionen) 341.
- Loughhead, R. E. s. J. W. Dun-  
gey 425.
- Lücke, Kurt s. Wolfgang Pitsch  
449.
- Luckey, P. (Nomographie) 113.
- Ludwig, G. (Quantenmechanik)  
228.
- Lukacs, Eugène (Distribution  
de Poisson) 342.
- s. I. Richard Savage 10.
- Lush, J. L. s. O. Kempthorne  
359.
- Luttinger, J. M. s. Robert Kar-  
plus 456.
- Lyndon, R. C. (Burnside's  
problem) 17.
- Ma, S. T. (Coulomb and Hul-  
thén potentials) 445.
- MacDonald, J. Ross s. Malcolm  
K. Brachman 96.
- Macintyre, A. J. (Series for inte-  
gral functions) 297.
- — — s. P. Erdős 63.
- Sheila Scott (Transform  
theory) 298.
- Mackie, A. G. (Unsteady motion  
of a gas) 206.
- MacLane, Saunders (Allge-  
meine Topologie) 165.
- Magnus, W. (Infinite matrices  
associated with diffraction  
problem) 222.
- — — s. A. Erdélyi 341.
- Makinson, R. E. B. and D. M.  
Slade (Dipole resonant modes  
of an ionized gas column) 446.
- Malecot, G. (Modèles stochas-  
tiques linéaires) 123.
- Malesani, Paolo (Varietà uni-  
secanti) 146.
- Malić, D. (Second law of ther-  
modynamics) 210.
- Malkin, I. G. (Fastperiodische  
Schwingungen) 181.
- Malkus, W. V. R. (Heat trans-  
port and thermal turbulence)  
202.
- Mallinckrodt, A. J. and T. E.  
Sollenberger (Optimum pul-  
se-time determination) 419.
- Mambriani, Antonio (Prodotti  
delle derivazioni definite)  
286.
- Mammana, Carmelo (Problema  
algebrico dei momenti) 10.
- Manacorda, T. (Trasformazioni  
reversibili adiabatiche) 396.
- Manara, Carlo Felice (Trasfor-  
mazioni di Jonquière) 147;  
(Curve algebriche piane) 371.
- Mandel, John (Chain block  
designs) 130.
- Mandelbrojt, S. (Série de Dirich-  
let) 61.
- Mann, H. B. (Quadratic exten-  
sions) 29.
- Manukjan, M. M. (Spannungen  
in Eisenbeton-Elementen)  
191.
- Marathe, C. R. ( $\mu$ -matrices)  
253.
- Marcus, F. (Surfaces isother-  
mes-asymptotiques) 155.
- S. (Fonctions de Pompeiu)  
48; (Fonctions à variation  
bornée) 48.
- Marinescu, G. (La différentielle  
et la dérivée) 102.
- Mariot, Louis (Champ électro-  
magnétique) 215.
- Markov, A. A. (Algorithmen)  
5.
- Marris, A. W. (Nusselt modu-  
lus) 202; (Turbulent heat  
transfer) 202.
- Marschak, Jacob (Organization  
and information) 138.
- — s. Roy Radner 137.
- Martin, Ch. N. (Tables de phy-  
sique nucléaire) 439.
- Colette (État des périodi-  
ques figurant à la bibliothè-  
que) 245.
- Martinelli, Enzo (Teoremi inte-  
grali) 307.
- Marussi, Antonio (Curvatura  
tangenziale) 150.
- Marx, I. s. C. L. Dolph 11.
- Marziani, Marziano (Principio  
di minimo dell'elettrodina-  
mica) 235.
- Masotti, Arnaldo (Questioni iso-  
perimetriche) 90; (Moti cen-  
trali di un punto vincolato)  
178.
- Masotti Biggiogero, Giuseppina  
(Rami ciclici di curve piane)  
145.
- Massera, J. L. (Stabilité) 313.
- Mastrogiacono, Pasquale (Tras-  
formazioni puntuali tra spazi  
proiettivi) 375.
- Masuda, K. (Hasse factor sys-  
tems) 29.
- Masuyama, Motosaburo (Sta-  
tistical inference) 126.
- Matsumura, Sōji (Differential  
equations) 313; (Pythagorei-  
scher Lehrsatz) 368; (Geo-  
metrie der Kreise und Kugeln.  
LXII.) 376; (Geometrie der Kreise und Kugeln)  
376; (Theorie der Kurven)  
385.
- Matsumura, Yoshimi (Summa-  
bility of Fourier series. II.)  
293.
- Matsushita, Shin-ichi (Théorè-  
mes de dualité. I. II.) 23.
- Matsuyama, Sadahiko s. Kazu  
Hasegawa 435.
- Matusita, Kameo (Decision  
rule) 129.
- — — Yukio Suzuki and Hiroshi  
Hudimoto (Testing statistical  
hypotheses) 128.
- Matuura, Syozo s. Keizo Hasi-  
moto 62.
- Mazur, P. and S. R. de Groot  
(Reciprocal relations. II.)  
213.
- — — s. S. R. de Groot 213.
- Mazzarella, Franco (Analogia  
di Mohr) 184.
- McGill, William J. (Informa-  
tion transmission) 357.
- McLaughlin, J. E. s. C. L. Dolph  
11.
- Mehring, Johannes (Kernfunk-  
tion und Regularitätsgebiete)  
307.
- Meier, Paul (Simple lattice de-  
signs) 131.
- Meixner, Josef und Friedrich  
Wilhelm Schäfke (Mathie-  
sche Funktionen) 295.
- Mel, H. C. s. I. Prigogine 418.
- Menger, K. (Variables) 39;  
(Analytic functions and mul-  
tifunctions) 40.
- Meňšov, D. E. (Trigonometric  
series) 56; (Fourierreihen)  
292.
- Mertens, R. (Vielfachstreuung  
von Teilchen) 445.
- Mertveceva, M. A. s. G. S. Sa-  
lechochov 111.
- Messel, H. s. H. S. Green 56.
- Meulenbeld, B. (Approxima-  
ting decimal fractions of de-  
cimals) 276.

- Meyer, J. A. (Gross-transformation) 333.
- Meyer-König, W. und K. Zeller (Taylorsche Summierungsverfahren) 51.
- Michael, William B. s. Norman C. Perry 131.
- Michajlov, G. K. (Filtration im homogen-anisotropen Grund) 209.
- Mickevici, N. V. (Wärmeleitung anisotroper Körper) 214.
- Middleton, David (Signal detection) 357.
- , W. W. Peterson and T. G. Brisdall (Discussion of „Detection of pulsed carriers in noise. I. II.“) 126.
- Migdal, A. B. (Einfluß der Vielfachstreuung auf Bremsstrahlung) 445.
- Mihăileanu, N. (Géométrie de Lobatchevsky) 142.
- Mihoc, G. (Loi de Poisson) 122.
- Mikhail, M. N. s. P. Vermes 296.
- Mikulik, Miloslav (Metric lattices) 98.
- Mikusinski, J. G. s. S. Turski 278.
- Miles, John W. (Equation of unsteady supersonic flow) 205.
- Milgram, A. N. s. P. D. Lax 87.
- Milne, A. A. (Grease lubrication of a slider bearing) 400.
- Milnor, J. W. s. G. K. Kalisch 139.
- John (Games against nature) 137.
- Min, Szu-Hoa (Bestimmung eines Grenzwertes) 96.
- Minlos, R. A. s. I. M. Gel'fand 232.
- Miranda, Carlo (Gli integrali principali) 89.
- Miroljubov, A. A. (Differenzen-Differentialgleichungen) 315.
- Mirzadzandade, A. Ch. (Eintauchen einer dünnen Röhre in zäh-plastische Flüssigkeit) 191.
- Mişicu, H. (Problème de la torsion) 185.
- Mitropol'skij, Ju. A. (Instationäre Schwingungen) 393.
- Mitsudo, Fujio (Commutativity of certain rings) 266.
- Miyadera, Isao (Strongly ergodic semi-group of operators) 106.
- Mizoguti, Yukitoyo (Path structures. I.) 162, 383.
- Mizuno, Katuhiko (Theorem of M. Nakaoka) 171.
- Mjamlin, V. A. (Zerfall des Deuterons) 443.
- Mjasnikov, P. V. (Rotation eines schweren festen Körpers um Fixpunkt) 179; \* (Integrierbare Fälle für das Kreiselproblem) 391.
- Mohan, P. (Advanced trigonometry) 143.
- Moiseev, N. N. (Schwingungen von Gefäßen mit Flüssigkeit) 193.
- Moisil, Gr. C. (Algebra. I. Vol. II.) 261; (Théorème de Zolotarev) 266; (Algèbre des schémas à valves) 340; (Imaginaires de Galois. I. II.) 340; (Schémas à contacts) 340.
- Moldauer, P. A. s. Arnold Sommerfeld 221.
- Møller, C. s. F. J. Belinfante 430.
- Montaldo, Oscar (Equazioni differenziali ordinarie nelle derivate prime) 317.
- Monteiro, António A. (Arithmétique des filtres) 385.
- Moore, Marian A. (Approximations of  $\Phi$ -integrals) 283.
- P. G. (Truncated Poisson distributions) 127.
- Moppert, K.-F. s. F. Grün 419.
- Moran, P. A. P. (Translations of linear sets) 45.
- Mordell, L. J. (Intervals containing integers mod  $k$ ) 35; (Integer solutions of  $z^2 - k^2 = ax^3 + by^3$ ) 274.
- Morgan, G. W. (Motions of a rigid body in fluid) 196.
- — s. J. L. Fox 196.
- Morgenstern, Dietrich (Unendlich oft differenzierbare nichtanalytische Funktionen) 289.
- Morita, Akira (Hydrodynamics of He II) 448.
- Masato, Atsushi Sugie and Shiro Yoshida (Angular distribution of photoreaction) 442.
- and Tarō Tamura (Binding energy of  $\text{Li}^9$ ) 441.
- Moriya, Mikao (Fortsetzung der 2-Cozyklen) 27; (2-Cohomologiegruppen) 267.
- Moser, Leo and Max Wyman (Array of Aitkin) 38.
- Moshinsky, Marcos s. Williams Laskar 430.
- Mossakovskij, V. I. (Druck eines Stempels) 188; (Aufgabe der Elastizitätstheorie) 189.
- — und P. A. Zagubiženko (Kompression einer elastischen isotropen Ebene) 188.
- Mosteller, Frederick s. Robert R. Bush 137.
- Mukminov, B. R. (Entwicklung nach Eigenfunktionen dissipativer Kerne) 331.
- Muracchini, Luigi (Trasformazioni puntuali) 153.
- Murgulescu, Elena (Mouvement supersonique autour d'une aile) 204.
- Musgrave, M. J. P. (Elastic waves in aeolotropic media. I. II.) 400.
- Myller-Lebedev, Vera (Algebra) 251.
- Myškis, A. D. und I. Ju. Égle (Methode der sukzessiven Approximationen) 111.
- — und U. K. Grinfel'd (Cauchysches Problem) 70.
- Nagabhushanam, K. (Smoothing relation) 355.
- Nagao, H. ( $l$ -relative cohomology groups) 28.
- — s. Masatoshi Ikeda 27.
- Nagata, Masayoshi (Local rings. II.) 26; (Integral closures of Noetherian domains) 266.
- Nahrgang, Günther (Brunnen) 415.
- Nakai, Shinzo (Bound states and  $S$ -matrix) 430; (Green-functions of many-electron problem) 432.
- Yoshikazu (Chow points of algebraic varieties) 370.
- Nakamura, Masahiro and Takasi Turumaru (Expectations in an operator algebra) 105.
- Mikio s. Yoshikatsu Watanabe 57.
- Nakano, Shigeo (Analytic fiber bundles) 172.
- Nakaoka, Minoru (Theorem of Eilenberg-MacLane) 170; (Transgression and the invariant  $k_n^{q+1}$ ) 171.
- Nakayama, Tadashi s. Masatoshi Ikeda 27.
- Narain, Shanti and Ram Behari (Classification of quadrics) 144.
- Nardini, Renato (Problema al contorno della magneto-idrodinamica. I. II.) 424.
- Nash, J. F. s. G. K. Kalisch 139.
- John ( $C^1$  isometric imbeddings) 377.
- Nassif, M. (Bessel polynomials) 60.
- Nasu, Yasuo (Spaces with non-positive curvature) 163; (Normality in Minkowskian spaces) 381.



- Neculcea, Mihail (Algorithmes de la division) 264.
- Nelson, David (Recursive functions) 249.
- Nemyckij, V. V. (Qualitative Theorie der Differentialgleichungen) 74.
- Nenart, B. V. s. Ju. T. Stručkov 236.
- Nering, E. D. s. G. K. Kalisch 139.
- Netanyahu, S. (Coefficient problem for schlicht functions) 305.
- Neto, José de Barros s. Barros Neto, José de 281.
- Neumann, J. v. s. E. P. Wigner 300.
- Maria (Géométrie de Lobatchewski) 142.
- Neumark, M. A. (Involutive Algebren) 105; (Operatorenalgebren) 105.
- Nevanlinna, Rolf (Konforme Selbstabbildungen des euklidischen Raumes) 149.
- Niçe, V. (Propriétés focales des courbes bicirculaires) 145; (Plücker'sches Konoid) 145.
- Nicholas, G. C. s. J. E. Adkins 396.
- Nickel, Karl (Auftrieb von Tragflügeln) 200.
- Nicolau, Edmond (Système différentiel non linéaire) 181.
- Niculescu, Alexandru (Invariant projectif) 154.
- Lilly-Jeanne (Intégrales Perron-Stieltjes) 47.
- Miron (Décomposition des fonctions de plus variables réelles) 326.
- Nigam, S. D. and P. P. Chatterji (Motion of bodies in non-viscous rotating liquid) 400.
- Nikaidô, Hukukane (Economic equilibrium) 362.
- Nikolai, B. L. (Spannungen in dünnwandigen Stäben) 395.
- Nikol'skij, A. A. (Ausströmen eines Gases) 405.
- S. M. (Funktionen mehrerer Veränderlicher auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten) 48.
- Niordson, Frithiof I. N. (Vibrations of a cylindrical tube) 192.
- Nitsche, Johannes (Randwertprobleme eines elliptischen Differentialgleichungssystems) 324.
- Nöbauer, Wilfried (Gruppe der Zahlentheorie) 259; (Restpolynomideale Restklassen) 259; (Lineare Gruppe mod  $n$ ) 259.
- Noguchi, Hiroshi (Homotopically labil points) 388; (Homotopical stability of points) 388.
- Nomizu, Katsumi (Cohomology of compact homogeneous spaces) 22.
- Nordhaus, E. A. and Leo Lapidus (Brouwerian geometry) 366.
- Novožilov, Ju. V. (Kausale Operatoren) 431.
- Nowacki, W. s. S. Turski 278.
- Nowiński, J. (Cross-sections of thin walled tubes) 394.
- s. S. Turski 278.
- Numakura, Katsumi (Commutative semigroups) 15.
- Obherettinger, F. s. A. Erdélyi 341.
- Obrechhoff, N. (Zéros de fonctions rationnelles) 256; (Développement suivant des polynômes orthogonaux) 299.
- O'Brien, George G. (Queueing problems) 347.
- Ogibalov, P. M. (Deformation eines Rohres) 185.
- Okada, Shôzô (Electronic states in crystal lattice) 454.
- Okhuma, Tadashi (Ensembles ordonnés linéairement) 24.
- Okiljević, Plažo (Théorie de Lie sur les transformations infinitésimales) 309.
- Ôkubo, H. (Torsion and stretching of spiral rods. II.) 393.
- Ôkubo, Susumu (Hamiltonian and Tamm-Dancoff equation) 431.
- Okuyama, Zen-iti s. Tosi-yuki Tugué 42.
- Olech, C. s. S. Golab 54.
- Olejnik, O. A. (Cauchysches Problem) 321.
- Olszak, W. s. S. Turski 278.
- Onicescu, O. (Chânes continues) 346.
- Ono, Syu (Transport phenomena. III.) 211.
- Orts, J. Ma. (Analytische Fortsetzung Legendrescher Reihen) 60.
- Osaka, Yukio s. Yoshiichi Fukuda 450.
- s. Chûji Horie 448.
- Osima, Masaru (Representations of symmetric group) 21; (Characters of the symmetric group. II.) 260.
- Ostle, Bernhard (Statistics in Research) 349.
- Ostrowski, A. (Differential- und Integralrechnung. III.) 282.
- M. (Family of matrices) 253.
- Alexander (Mathematische Miscellen. XXII.) 39.
- Oswatitsch, K. und L. Sjödin (Überschallströmung) 204.
- Otsuki, Tominosuke (Imbedding of Riemann manifolds) 377.
- Ottaviani, Giuseppe (Metodi di stima) 127.
- Pack, D. C. and S. I. Pai (Similarity laws for supersonic flows) 203.
- Padmavally, K. (Ordertype of rational numbers) 41.
- Paechter, G. F. (Invariant factors of  $F(A)$ ) 167.
- Pagano, Michele (Volte a vela) 394.
- Page, E. S. (Improvement to Wald's approximation) 354.
- Pai, S. (Fluid dynamics of jets) 199.
- I. s. D. C. Pack 203.
- Palman, Dominik (Räumliche kubische Inversion) 144.
- Palo, Raffaele di (Problema di Dirichlet) 326.
- Panasjuk, V. V. (Druck eines Stempels) 188.
- Panovko, Ja. G. (Kritische Kraft eines zusammenge-drückten Stabes) 398.
- Papadopoulos, V. M. (Propagation of electromagnetic waves) 220.
- Papapetrou, Achilles (Gravitationsfeld. I. II.) 426.
- Papić, Pavle (Séparation des ensembles) 386.
- Papy, Georges (Formes différentielles extérieures) 83.
- Pâravu, A. (Déformations élastiques) 395.
- Pastor, Julio Rey s. Rey Pastor, Julio 241.
- Payne, L. E. s. G. Weiss 185.
- Pchakadze, Š. S. (Mehrfache Integrale) 46.
- Pearcey, T. and G. W. Hill (Programme design for the C. S. I. R. O. Mark I computer. III.) 339.
- G. W. Hill and R. D. Ryan (Functional design of computers) 339.
- Pearson, Carl E. (Hot-wire correlation measurements) 202.
- J. R. A. s. F. C. Roesler 446.
- Pekar, S. I. (Teilchen mit Spin  $1/2$  in pseudoskalarem Poten-



- tialfeld) 429; (Elektronentheorie der Kristalle) 455.
- Peremans, W. s. G. W. Veltkamp 9.
- Perry, J. D. s. D. C. M. Leslie 205.
- Norman C. and William B. Michael (Point biserial coefficient of correlation) 131.
- Péter, Rózsa (Rekursive Definitionen) 6.
- Peterson, W. W. s. D. Middleton 126.
- Petersson, Hans (Automorphe Orthogonalfunktionen) 68.
- Petrescu, Șt. (Invariants de l'équation différentielle du troisième ordre. I.) 309.
- Peyovitch, T. (Théorème des équations différentielles algébriques) 70; (Application de mathématique à la biologie) 359.
- Phibbs, E. s. G. K. Horton 435.
- Phillips, R. S. (Cauchy problem) 106.
- Pi Calleja, Pedro (Funktionalgleichungen der Theorie der Größen) 336.
- Piccone, Piero (Integrali di Stieltjes) 113.
- Picone, M. (Funzioni olomorfe) 301.
- — e G. Fichera (Analisi matematica. I.) 38.
- Piefke, Gerhard (Elektromagnetische Wellen in Pyramiden-Trichter) 219.
- Pierce, R. S. (Coverings of a topological space) 166.
- Pipes, Louis A. (Matrix analysis of time-varying circuits) 218.
- Piškin, B. A. (Schraubenbewegung in Flüssigkeitsstrom) 195.
- Pistoia, Angelo (Prodotto di composizione) 97.
- Pitcher, Tom („Positive“ functions in  $H$ -systems) 103.
- Pitsch, Wolfgang und Kurt Lücke (Elastische Nachwirkung) 449.
- Pjatekij-Šapiro, I. I. s. F. A. Berezin 308.
- Planck, Max (Thermodynamik) 416.
- Plaskowski, Zbigniew (Schubvermehrung durch Strahlmischung) 402.
- Platrier, Ch. (Mécanique rationnelle. I.) 390.
- Plattner, P. Anton (Charakteristische Funktion von Hilbert) 145.
- Plebański, J. (Vortrag von L. Infeld) 420; (Elementares Gesetz und nichtlineare Elektrodynamik) 421; (Bohmsche Arbeit über Interpretation der Quantentheorie) 429.
- Plotkin, B. I. (Lokal nilpotente Gruppen) 257; (Nilradikal einer Gruppe) 258.
- — — s. P. G. Kontorovič 261.
- Plotnick, Samuel I. and Thomas C. Benton (Constants in conformal representation) 65.
- Plumlee, Lynnette B. (Effect of chance success on multiple-choice test validity) 130.
- Pniewski, J. (Modellhypthesen über den Atomkern) 440.
- Podgoreckij, M. I. und I. L. Rozenal' (Zerfall von Mesonen) 438.
- Podstrigač, Ja. S. (Konzentrierte Kraft auf Rand einer Halbebene) 188.
- Poenaru, Valentin (Théorèmes de la topologie plane) 174.
- Poincelot, Paul (Vitesse de groupe) 218.
- Pol, B. van der (Gamma function) 57.
- Polacco, Erseo s. Alfred Chevalier 221.
- Polak, J. J. and Ta-Chung Liu (Exchange rate mechanism) 362.
- Polkinghorne, J. C. (Transformation operators of quantum electrodynamics) 434.
- Položij, G. N. (Filtration in homogenen und inhomogenen Medien) 415.
- Pomerančuk, I. Ja. s. A. I. Achiezer 441.
- Pontrjagin, L. S. (Topologische Gruppen) 260.
- Popov, E. P. (Automatische Regelungssysteme) 80.
- Popovici, Constantin P. (Base des entiers du corps relativement quadratique) 269.
- Poraj-Košić, M. A. (Strukturamplituden) 236.
- Postelnicu, Tiberiu (Espaces  $A_2$  à connexion affine linéaire) 382.
- Postnikov (Postnikow) V. S. (W. S.) (Relaxationserscheinungen in deformierten Metallen) 450.
- Pöttker, Werner (Formel zum Zinsfußproblem) 135.
- Povolockij, A. I. (Nicht-lineare Integralgleichungen) 93.
- Prais, S. J. and J. Aitchison (Grouping of observations) 132.
- Prakash, Prem (Flow superposable on radial flow) 401.
- Pratje, Ilse (Joukowski-Abbildung) 65.
- Price, G. B. s. Universal Mathematics 277.
- Pristley, C. H. B. (Vertical heat transfer) 458; (Convection) 458.
- Prigogine, I. et H. C. Mel (Stabilité thermodynamique) 418.
- Prochorov, Ju. V. (Grenzwertsatz für gitterförmige Verteilungen) 122.
- Prokof'ev, V. A. (Emission bei Bewegung eines einatomigen Gases) 238.
- Pucci, Carlo (Funzioni reali) 286; (Compattezza di successioni di funzioni) 286.
- Puga, Cristobal de Losada y s. Losada y Puga, Cristobal de 276.
- Puig Adam, P. (Näherungsbrüche beim Kettenbruchalgorithmus) 70.
- Pustynnikov, V. G. (Apparat für Lösung von Gleichungen der Deformationsellipse) 184.
- Quilghini, D. (Approssimazione delle funzioni continue) 55.
- Quine, W. V. (Sets of conditions) 246.
- Qvist, B. s. P. Kustaanheimo 140.
- Rachajsky, B. (Intégrales de S. Lie) 320.
- Rachmatulin, Ch. A. (Reflexion von Schallwellen von rauher Ebene) 208.
- Radner, Roy and Jacob Marschak (Proposed decision criteria) 137.
- Radojčić, M. (Séries de fonctions algébriques) 299.
- Rädström, Hans (Generalized differential) 284.
- Rahman, Qazi Ibadur (Maximum modulus and the zeros of an entire function) 304.
- Raiffa, H. s. C. H. Coombs 4.
- Rainich, G. Y. (Involution and equivalence) 40.
- Raisbeck, G. (Passive linear networks) 421.
- Raithel, Aldo e Aldo Ambrosanio (Sollecitazioni massime nei sistemi) 393.
- Raj, Des (Sampling with probabilities proportionate to

- size) 353; (Sampling with varying probabilities) 358.
- Rajalakshman, D. V. and M. Madhusudana Rao (Stochastic model) 124.
- Ram, Siya (Moments of hypergeometric distribution) 343.
- Ramachandran, G. N. (X-ray anti-reflections. II.) 452.
- Ramakrishnan, Alladi and S. K. Srinivasan (Cascade multiplication) 444.
- Rao, K. Subba (Fibonacci numbers. I.) 33.
- M. Madhusudana s. D. V. Rajalakshman 124.
- Rapesák, András (Normalkoordinaten im Finslerschen Raum) 381.
- Rapoport, L. P. und V. A. Filimonov (Dichteverteilung der Nukleonen) 440.
- Ravetz, J. (Denjoy theorem) 285.
- Rawer, Karl s. Émile Argence 422.
- Ray, Daniel (Spectra of differential operators) 329.
- M. (Turbulent flow in a plane wake) 410.
- Raymond, F. H. (Calcul analogique) 113.
- Ravski, J. (Quantenfeldtheorie) 431; (Nichtlokale Feldtheorien) 433.
- s. L. Infeld 176.
- Rebollo, J. M. (Rekursionsskala einer Reihe) 60.
- Recillas J., F. and E. Lluís R. (Hilbertfunktion in semilokal Ringen) 266.
- Rédei, L. (Holomorphentheorie) 262.
- und O. Steinfeld (Gruppenerweiterungen) 256.
- Redheffer, R. M. (Even entire functions) 303.
- Ree, Rimhak (Solvable groups) 17.
- Reichenbach, Hans (Théorie des quanta) 3.
- Reiner, Irving (Symplectic modular complements) 21.
- Reißig, Rolf (Erzwungene Schwingungen mit zäher Dämpfung. I. II.) 72; (Schwingungen mit zäher Reibung) 72; (Periodische Erregung eines einfachen Schwingers) 317.
- Reissner, Eric (Twisting and bending of plates and shells) 186.
- Rembs, Édouard (Déformabilités des calottes convexes) 150.
- Rényi, Alfréd (Wahrscheinlichkeitsrechnung) 116.
- Renzulli, Tullio (Origine termica di un ponte Maillart) 189; (Strutture monodimensionali in regime elastoplastico) 397.
- Rešetnjak, Ju. G. (Isotherme Koordinaten) 384.
- Rey Pastor, Julio (Mathematik in Lateinamerika) 241.
- Reza, F. M. (Brune cycle) 217.
- Ricci, Giovanni (Funzioni aritmetiche) 37; (Resto delle serie di potenze) 59; (Differenza di numeri primi consecutivi) 276.
- Rice, H. G. (Recursive real numbers) 6.
- Riddell jr., R. J. and B. D. Fried (Meson-nucleon scattering. I.) 436.
- Reichenbach, Hans (Dreiwertige Logik in der Quantenmechanik) 245.
- Riekstys, Ē. Ja. (Polynom zur Lösung von Telegraphengleichungen) 95.
- Riguet, J. (Applications des relations binaires) 4.
- Ringel, Gerhard (Farbensatz) 175.
- Rinow, W. (Innere Geometrie der Flächen) 161.
- Riordan, John (Discordant permutations) 250.
- Rios, S. (Bemerkung zu „Konvergenz von Verteilungen“) 123.
- (Methoden der Statistik. II.) 126.
- Ritus, V. I. (Bildung von  $\pi$ -Mesonen) 437.
- Robinson, G. s. Sir Edmund Whittaker 336.
- Raphael M. (Mersenne and Fermat numbers) 275.
- Rodeja F., E. G.- s. G.-Rodeja F., E. 14, 144.
- Roederer, Juan G. (Nukleonenkaskade) 444.
- Roesler, F. C. and J. R.-A. Pearson (Relaxation spectra) 446.
- Röntgen, W. C. (X-Strahlen) 423.
- Roşculeţ, Marcel N. (Algèbres non associatives) 25; (Dérivées partielles polydimensionnelles orientées) 47; (Fonctions d'une variable hypercomplexe) 66; (Équations aux dérivées partielles) 85.
- Rose, Alan (Théorie des treillis) 245; (Fonctions) 245.
- Rosenberg, Alex and Daniel Zelinsky ( $x^n$  theorems) 26.
- Rosenblatt, Murray (Inventory problem) 364.
- Rosenbloom, P. C. (Equations of parabolic type) 87.
- Rosenlicht, Maxwell (Jacobian varieties) 370.
- Rosenstock, Herbert B. (Nonlinear field theory) 434.
- Roth, U. s. Sowjetische Arbeiten zur Funktionalanalysis 98.
- Roubine, E. (Lignes et antennes. I.) 422.
- Royden, H. L. (Interpolation problem) 65.
- Royo, J. and S. Ferrer (Statistische Tafeln) 126; (Aus Nationallotterie erhaltene Tafeln aleatorischer Zahlen) 126.
- Rozenblum, V. I. (Kriechen von Turbinendiaphragmen) 191.
- Rozental', I. L. (Schauer von kosmischen Strahlen) 445.
- — s. M. I. Podgoreckij 438.
- — s. G. T. Zacepin 444.
- Rubin, Herman and Patrick Suppes (Systems of relativistic particle mechanics) 425.
- Rubinowicz, W. s. L. Infeld 176.
- Ruderman, Malvin A. s. Norman M. Kroll 437.
- Rühs, Fritz (Umkehrformel zur Laplace-Transformation) 332; (Laguerresche Polynome) 332.
- Rumanova, I. M. (Vorzeichen der „Anhalts“-Strukturamplituden) 236.
- Rumjancev, V. V. (Bewegungsgleichungen eines starren Körpers) 390.
- Rumsey, V. H. (Kinetics of piles) 443.
- Russek, Joy s. Bernard Friedman 58.
- Rusu, Ioan s. Lascu Bal 339.
- Rutickij, Ja. B. (Vollstetiger Integraloperator) 102.
- — s. M. A. Krasnosel'skij 101.
- Ryan, R. D. s. T. Pearcey 339.
- Rževkin, S. N. (Strahler von Schall) 208.
- Saban, G. (Fonctions duales) 150; (Congruences cylindriques) 373.
- Sacks, Louis s. C. C. Li 133.
- Sagastume Berra, A. E. (Problem von Schönberg) 34.



- Sagawa, Takasi (Electronic states in crystal lattice) 454.
- Šaichin, A. (Températures dans les plaques de béton) 215.
- Saito, Atsushi s. Tsuyoshi Sekiya 394.
- Sakoda, James M. (Osgood and Suci's measure of pattern similarity) 130.
- Salechov, G. S. (Wasser-Erdölkontakt) 210.
- — —, V. L. Danilov, N. F. Ivanov und A. N. Chovanskij (Bewässerung von Erdöl-Bohrlöchern) 210.
- — — und M. A. Mertvecova (Konvergenz gewisser Iterationsprozesse) 111.
- — — s. N. F. Ivanov 210.
- Salié, Hans (Verteilung natürlicher Zahlen auf elementfremde Klassen) 274.
- Salvadori, Luigi (Moti di sistemi anonomi) 178; (Criterio di stabilità del Routh) 393.
- Salveti, Carlo (Orientamenti attuali sui modelli nucleari) 439.
- Samarskij, A. A. s. A. N. Tichonov 320.
- Samojlovič, A. G. (Statistik der Elektronen in Halbleitern) 211; (Magnetische Suszeptibilität) 236.
- — — und L. L. Korenblit (Thermoelektrische Erscheinungen in Halbleitern) 455.
- Sampford, M. R. (Response time distribution. III.) 134.
- Sänger, E. (Überschall-Gerastobdiffusor) 205.
- Santaló, L. A. (Ungleichung von Feller) 164; (Affine Differentialgeometrie der Flächen) 374.
- Santen, G. W. van (Mechanische Schwingungen) 180.
- Saran, Shanti (Hypergeometric functions) 296; (Functions contiguous to hypergeometric functions) 296.
- Sarantopoulos, Spyridon (Intégrales holomorphes des équations différentielles) 311.
- Sardi, Umberto (Equazioni di secondo grado nell'algebra di Study) 265.
- Sarkar, G. K. (Integral representations of generalised  $k$ -function of Bateman) 58.
- Sarpkaya, Turgut (Deflection of a jet) 195.
- Sasaki, Shigeo (Topological structure of Riemannian manifolds) 159.
- Sasayama, Hiroyoshi (Cohomology of higher order) 380; (Space of line-elements of fractional order) 380; (Spaces with metric of fractional order) 380; (Extended harmonic and invariant multiple integrals) 381.
- Sasiada, E. (Abelian groups) 18.
- Sathe, L. G. (Problem of Hardy. IV.) 276.
- Satô, Masako (Uniform convergence of Fourier series. III.) 56.
- — — s. Shin-ichi Izumi 56.
- Sattler, J. s. W. J. C. de Heer 360.
- Savage, I. Richard and Eugene Lukacs (Hilbert matrix) 10.
- Savin, G. N. (Dynamische Kräfte im Aufzugseil) 184.
- — — und V. V. Georgievskaja (Dynamische Kräfte im Förderseil) 184.
- — — und V. N. Ševelo (Dynamische Kräfte in Aufzugseilen) 184.
- Saxon, David S. s. E. Gerjuoy 414.
- Scarfiello, R. (Changement de variables) 103.
- Schäpfke, Friedrich Wilhelm s. Josef Meixner 295.
- Scherk, Peter and J. H. B. Kemperman (Complexes in Abelian groups) 18.
- — — s. J. H. B. Kemperman 19.
- Schiff, L. I. (Nuclear multipole transitions) 443.
- — — s. J. G. Beckerley 439.
- Schiffman, Max s. P. R. Garabedian 89.
- Schinzl, A. (Nombre de diviseurs) 38; (Theorem of Somayajulu on Euler's function) 275.
- Schlichting, H. (Grenzschicht-Theorie) 201.
- Schlömann, Ernst s. Günther Leibfried 237.
- Schmidt, F. J. (Premium reserve) 135.
- — — Helmut (Lichtabsorption) 237.
- — — Rudolf und Richard Stender (Welt der Zahlen) 244.
- Schönberg, M. (Schrödinger and Dirac equations. I. II.) 230; (Generalized Schrödinger equations) 230.
- Schottky, W. (Halbleiterprobleme) 454.
- Schubert, Horst (Knoteninvariante) 174.
- Schulz, Werner (Bewegungs- und Störungsgleichungen) 198.
- Schützenberger, M. P. (Théorie de l'information) 357.
- Schwarzenberger, Rudolf s. Karl Hinkelmann 240.
- Schwinger, Julian (Quantum correction) 434.
- Scisłowski, W. M. ( $F$ -Zentren-theorie) 456.
- Scott, W. R. s. Universal Mathematics 277.
- Seal, Hilary L. (Estimation of mortality) 360.
- Sears, B. J. s. W. T. Sharp 350.
- Seeliger, O. s. Crelle's Rechentafeln 342.
- Seidel, W. s. F. Bagemihl 61.
- Sekino, Kaoru (Zerlegung der Gruppencharaktere) 259.
- Sekiya, Tsuyoshi, Atsushi Saito and Shigeo Yamada (Bending of a plate under load) 394.
- Semin, F. (Dérivées invariantes) 149; (Surfaces à courbure moyenne constante) 150.
- Sen, K. K. (Softening of radiation by multiple Compton scattering) 238.
- Senftle, F. E. and W. R. Champion (Activities produced by thermal neutrons) 443.
- Sengupta, H. M. (Semi-independent functions) 284.
- — — S. (Nuclear moments and shell structure) 440.
- Serbin, H. (Numerical quadrature of improper integrals) 112.
- Šestakov, V. I. (Synthese von Mehrtakt-Relaissystemen) 216.
- Sestini, Giorgio (Criterio di stabilità in un problema non lineare) 79.
- Seth, B. R. (Singular points) 195; (Equations of compressible flow) 405.
- Ševelo, V. N. s. G. N. Savin 184.
- Ševljakov, Ju. A. und F. S. Zigel' (Torsion eines Hohlzylinders) 185.
- Shapiro, Ascher H. (Compressible fluid flow. I. II.) 197.
- — — Victor L. (Double trigonometric integrals) 57.
- Sharma, A. and A. M. Chak (Basic analogue of a class of polynomials) 13.
- Sharp, W. T., J. M. Kennedy, B. J. Sears and M. G. Hoyle



- (Tables for angular distribution analysis) 350.
- Sherman, S. (Correction to „stochastic matrices“) 11.
- Shield, R. T. s. J. E. Adkins 396.
- Shimura, Goro (Normalization-theorem) 32.
- Shirota, Taira (Operators on locally convex vector spaces) 105.
- Sibuya, Yasutaka (Équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients périodiques) 78; (Solutions périodiques des équations différentielles ordinaires) 78.
- Siebert, A. J. F. (Passage of stationary processes) 347.
- Sierpinski, W. (Nombres naturels) 275; (Propriété de la droite) 282.
- Sigua, F. D. (Randwertaufgaben der sphärischen Schale) 187.
- Šil'krut, D. I. (Transformation von Efros) 96.
- Sion, Maurice (Functions having given partial derivatives on a curve) 48.
- Siotani, Minoru (Standard deviation of normal population) 127.
- Siraždinov, S. Ch. (Grenzwertsätze für Markovsche Ketten) 347.
- Širokov, Ju. M. (Wechselwirkung von Teilchen neuen Typs mit äußerem Felde) 433.
- M. F. (Trägheitszentrum) 227.
- Sjödén, L. s. K. Oswatitsch 204.
- Sjölander, Alf (Scattering of slow neutrons by crystals) 453.
- Skobelkin, V. I. (Doppelbrechung von Strahlen) 421.
- Skolem, Th. (Arithmetic functions) 5.
- Skyrme, T. H. R. (Model for nuclear matter) 439.
- Slade, D. M. s. R. E. B. Makinson 446.
- Slepian, D. (Estimation of signal parameters) 357.
- Slezkin, N. A. (Bemerkung zu Noten von Ju. V. Rumer und L. G. Lojčanskij) 195.
- Slobodjanskij, M. G. (Randwertaufgabe für gewöhnliche Differentialgleichung) 111.
- Smirnov, A. A. (Elektrowiderstand einer Legierung) 236.
- Smirnow, M. M. (Aufgaben zur mathematischen Physik) 319.
- Smith, John W. (Effect of diffusion fields) 406, 407.
- Šmul'jan, Ju. L. (Riemannsches Problem mit Hermite-scher Matrix) 63.
- Snow, Chester (Capacitance and inductance) 216.
- Sobociński, Bolesław (Conjunctive-negative calculus of propositions) 7.
- Sobolev, V. A. (Deformationsstabilität einer Schiene) 394.
- Socio, Marialuisa de (Propagazione nelle guide) 422.
- Sodnomov, B. S. ( $G_\delta$ -Mengen) 45.
- Sokolov, A. A. und B. K. Kerimov (Atomkern. II.) 440.
- Ju. D. (Funktionen einer komplexen Veränderlichen) 59; (Strömung des Grundwassers) 415; (Filtration des Grundwassers) 415; (Bewegungen des Grundwassers) 415.
- N. P. (Kubische ternäre Formen) 12.
- Sollenberger, T. E. s. A. J. Malinckrodt 419.
- Solodovnikov, V. V. (Automatische Regulierung) 81.
- Sommerfeld, Arnold (Optics) 221.
- Sonntag, G. (Integralsatz der Elastizitätstheorie) 188.
- Sorokin, V. S. (Stationäre Bewegungen in einer erwärmten Flüssigkeit) 197.
- Sosnowski, L. (Probleme der Festkörperphysik) 449.
- s. L. Infeld 428.
- Šostak, R. Ja. (Bedingte Definiertheit einer quadratischen Form) 253.
- Sowjetische Arbeiten zur Funktionalanalysis) 98.
- Spalding, D. B. (Mass transfer) 408.
- Spampinato, Nicolò (Singolarità degli zeri di una funzione supercomplessa) 66; (Varietà determinata da una coppia di ipersuperficie) 148; (Falde di un  $S_n$ ) 148; (Varietà dell' $S_{23}$  complesso) 148; (Modello proiettivo dell'ente algebrico  $\infty^{\sigma-1}$ ) 148; (Varietà  $V_{23}$  dell' $S_{39}$  complesso) 149; ( $V_5$  dell' $S_{11}$ ) 371.
- Sparre Andersen, Erik (Sums of random variables) 121; (Fluctuations of sums of random variables. I. II.) 121.
- Spiess, F. N. s. G. Horvay 338.
- Spirin, G. M. (Iterationsmethode der Lösung der biharmonischen Gleichung) 112.
- Spoerel, Johannes (Mathematik von Schule zur Hochschule) 1.
- Sprenger, Herbert (Thermische Effekte in Resonanzrohren) 402.
- Squire, L. C. (Boundary layer growth) 201.
- Srinivasan, S. K. s. Alladi Ramakrishnan 444.
- Srivastava, H. M. (Relations involving generalised  $K$ -function of Bateman) 295.
- Stakgold, Ivar ( $(\nabla^2 u + k^2 u = 0)$ ) 328.
- Stamatis, E. (Irrationalzahlen bei den Alten) 2.
- Stanisić, Milomir M. (Schwingungsrichtung bei Dampfturbinenschaufeln) 186.
- Stark, Louis (Lower modes of a concentric line) 220.
- Staržinskij, V. M. (Stabilität einer elastischen Welle) 399.
- Staverman, A. J. (Thermodynamics of viscoelastic behaviour) 398.
- Steinfeld, O. s. L. Rédei 256.
- Stender, Richard s. Gerd Bange 342.
- s. Rudolf Schmidt 244.
- Stephanides, N. K. (Fußpunkt-kurven) 369.
- Sternberg, Shlomo (Legendre transformations of curves) 50.
- Stewartson, K. (Falkner-Skan equation) 201.
- Stojaković, Mirko (Matrices quasiinverses) 252.
- Stoker, J. J. (Radiation conditions) 414.
- Stoll, Wilhelm (Wertverteilungstheorie. I. II.) 307.
- Stolt, Bengt (Quadratischer Nichtrest) 35.
- Stoppelli, Francesco (Teorema di Da Silva) 391; (Equazioni dell'elastostatica isoterma per deformazioni finite) 397.
- Storlazzi, Rosetta (Moto di un punto in un piano) 178.
- Straškevič, A. M. (Elektronenoptische Systeme) 224.
- Stratonovič, R. L. s. P. I. Kuznecov 418.
- Strubecker, Karl (Spazio isotropo) 149.
- Stručkov, Ju. T. und B. V. Nenart (Nomograph zur Berechnung der Strukturamplituden) 236.



- Strutt, M. J. O. (Transistoren) 454.
- Stuart, Alan (Optimum sampling results) 353.
- Stubban, John Olav (Géométrie de direction) 144.
- Stumpff, K. (Bahnberechnung) 457.
- Subba Rao, K. s. Rao, K. Subba 33.
- Šubnikov, A. V. (Asymmetrie endlicher Figuren) 260; (Homologie der Kristalle) 453.
- Sucharevskij, I. V. (Torsion eines Balkens) 393.
- Suchy, Kurt (Gekoppelte Wellengleichungen) 222; (Von der Wellenoptik zur Strahlenoptik. III.) 223.
- Suffezynski, M. (Hamiltonfunktion) 420; (Nichtlineare Elektrodynamik) 420; (Paramagnetische Kernresonanz) 441.
- Sugawara, Masahiro (Homotopy groups of rotation groups) 389.
- Sugie, Atsushi s. Masato Morita 442.
- Sugiyama, Shohei (Singularities of differential equations) 312.
- Šulejkin, V. V. (Entwicklung von Wellen im Meer) 208.
- Šulikovskij, V. I. (Liouvillesche Flächen) 372.
- Sun, Peng-Wang (Differential geometry) 156.
- Sunakawa, Sigenobu, Tsutomu Imamura and Ryōyū Utiyama (Two-electron Green-function) 434.
- Supek, Ivan et Ivo Babić-Gjalski (L'électrodynamique classique et quantique) 232.
- Suppes, Patrick s. Herman Rubin 425.
- Süss, Wilhelm s. Heinrich Behnke 242.
- Suura, Hiroshi (Many-particle systems) 431.
- Suzuki, Haruo (Product in homotopy theory) 169.
- Yukio s. Kameo Matusita 128.
- Sved, G. (Redundant structures) 393.
- Svirskij, I. V. s. N. F. Ivanov 210.
- Symanzik, K. (Bethe-Salpeter-Gleichung) 432.
- Synge, J. L. (Relativistically rigid surfaces) 226.
- Sz.-Nagy, Gyula (Konvexes Polyeder) 143.
- Szász, Paul (Widerspruchsfreiheit der hyperbolischen Raumgeometrie) 142.
- Szele, T. (Finiteness criterion for modules) 264.
- Szendrei, J. (Holomorph der Gruppe) 263.
- Szulkin, P. s. S. Turski 278.
- Szűsz, P. (Verteilung der Vielfachen einer komplexen Zahl) 35.
- Table of salvo kill probabilities for square targets** 114.
- Table of sine and cosine integrals** 340.
- Table of the gamma function for complex arguments** 341.
- Takabayasi, Takehiko (Formulation of quantum mechanics) 229.
- Takano, Kinsaku (Limit theorems of probability distributions) 122.
- Takasu, Tsurusaburo (Function theory on a „Supracorpus“. II.) 66; (Connection spaces. X.) 381.
- Takebe, Hisao (Beta-ray spectra. I.—III.) 443.
- Takizawa, Seizi (Stiefel classes of a Riemannian manifold) 378; (Difference of frame functions) 378; (Characteristic classes of a submanifold) 378.
- Taliev, V. N. (Ringförmige turbulente Quelle) 410.
- Tal'janskij, I. I. (Positiv-Definitheit der Energie) 435.
- Tamura, Shō (Theorem of Jordan-Brouwer-Alexander) 174.
- Takayuki (Monoid whose submonoids form a chain) 14; (Finite semigroups) 14; (Inversible semigroups) 15.
- — and Naoki Kimura (Commutative semigroup) 15.
- Tarō s. Masato Morita 441.
- Tandai, Kwoichi (Areal spaces. VII.) 161.
- Tandori, Károly (Divergenz der Fourierreihen) 292.
- Tannaka, Tadao (Cohomology groups) 16.
- Tárczy-Hornoch, A. (Fortpflanzungsgeschwindigkeit bei seismischer Reflexionsmethode) 239.
- Tarski, Alfred (Theory of models. I.—III.) 247.
- Tatarkiewicz, Krzysztof (Équation différentielle du second ordre) 71.
- Taussky, Olga (Commutators of matrices) 11; (Systems of linear equations and eigenvalues) 109.
- Taylor, J. C. (Tamm-Dancoff method) 431.
- N. W. (Field tensor in unified field theory) 427.
- Robert L. (Covering groups) 21.
- Temple, W. B. (Convex functions) 50.
- Templeton, H. (Aircraft control surfaces) 207.
- Terada, Fumiaki (Complex multiplication) 31; (Principal ideal theorem) 31.
- Terol, Procopio Zoroa s. Zoroa Terol, Procopio 344, 358.
- Tewordt, Ludwig (Stoßionisation in isolierenden Kristallen) 455.
- Thébault, Victor (Produits de nombres entiers consécutifs) 33; (Suites de carrés parfaits) 33; (Nombres qui terminent carrés parfaits) 33.
- Thompson, Gerald L. s. Robert R. Bush 137.
- Thrall, R. M. (Multidimensional utility theory) 138.
- — s. C. H. Coombs 4.
- Thurstone, L. L. (Simple structure) 130.
- Tichonov, A. N. und A. A. Samarskij (Quasilineare Gleichung) 320.
- V. I. s. P. I. Kuznecov 418.
- Tipei, N. (Lubrification aux gaz) 198; (Équations hydrodynamiques de la lubrification) 400.
- Tits, Jacques (R-espaces) 365.
- Todd, John (Hilbert matrix) 10.
- Todeschini, B. s. B. Finzi 176.
- Tolokonnikov, L. A. (Endliche Deformationen eines Streifens) 189.
- Tolstov, G. P. (Analysis. I.) 38.
- Tompson, Robert N. (Areas of  $k$ -dimensional surfaces in  $k + 1$  space) 46.
- Toscano, Letterio (Polinomi associati a quelli di Hermite) 58.
- Tóth, L. Fejes s. Fejes Tóth, L. 163.
- Toyoda, Goro and Akira Hattori (Multiplicative group of simple algebras) 25.
- Treusch, W. s. P. Luckey 113.
- Tricomi, F. G. (Konfluente hypergeometrische Funktionen) 58; (Equazioni integrali) 91.

- Tricomi, F. G. s. A. Erdélyi 341.
- Truckenbrodt, E. (Turbulente Strömung an rotierender Scheibe) 409; (Reibungsschicht an Drehkörpern) 409.
- Tsang, N. F. (Electrical network determinants) 216.
- Tsao, Chia Kuei (Massey's distribution) 352.
- Tsuji, Masatsugu (Neumann's problem) 327.
- Tugué, Tosiuyuki (Famille monotone d'ensembles décomposables) 43.
- et Zen-iti Okuyama (Famille monotone d'ensembles) 42.
- Tulcea, C. T. Ionescu s. Ionescu 341.
- Turán, P. (Lindelöf's conjecture) 62.
- Turski, S. unter Mitarbeit v. J. Bonder, S. Drobot, J. G. Mikusiński, W. Nowacki, J. Nowinski, W. Olszak und P. Szulkin (Mathematische Methoden der Technik) 278.
- Turumaru, Takasi s. Masahiro Nakamura 105.
- Uchiyama, Saburô (Valeurs distinctes d'un polynôme) 12.
- Ueno, Yoshio (Wave theory of light. II.) 228.
- Ulčar, Jože (Geometrische Konstruktion) 143.
- Umegaki, Hisaharu (Expectation in an operator algebra) 105.
- Ungar, Peter (Freak theorem) 284.
- Universal Mathematics. I. 277.
- Ura, Taro et Yoshikazu Hirasawa (Points singuliers des équations différentielles) 312.
- Urabe, Minoru (Infinitesimal deformation of periodic solution of second kind) 79.
- Urz, W. R. (Diophantine cubics) 34.
- Utiyama, Ryôyû s. Sigenobu Sunakawa 434.
- Uzgören, Nakibe T. (Extreme values of a sample) 351.
- Vaart, H. R. van der (Laplacian  $\Delta_c$ ) 325.
- Vail, Stefan (Subjective probabilities) 137.
- Vajda, S. (Problem of encounters) 119.
- Valatin, J. G. (Propagation functions of quantum electrodynamics) 434.
- Vaona, Guido (Sistemi di curve) 154.
- Varga, Ottó (Géométrie de Bolyai-Lobatchevsky) 2; (Finslersche Räume mit absolutem Parallelismus) 383.
- Vaught, Robert L. (Relational systems) 247.
- Vázquez García, R. ( $i$ -Produkte von Koketten) 387.
- Vekua, I. N. (Gleichungen vom elliptischen Typus) 84.
- Veltkamp, G. W., H. J. A. Duparc and W. Peremans (Minimum problem on matrices) 9.
- Vermes, P. and M. N. Mikhail (Basic sets of polynomials) 296.
- Vidav, Ivan (Théorème de Mandelbrojt-MacLane) 327.
- Vigier, J. P. s. D. Bohm 229.
- Viktorovskij, E. E. (Integralkurven für unstetiges Richtungsfeld) 310.
- Villa, Mario (Problemi integrali sulle trasformazioni puntuali) 153.
- Villari, Gaetano (Comportamento asintotico degli equazioni differenziali non lineari) 318.
- Višik, M. I. (Gemischte Randwertaufgaben) 322; (Gleichungen, die die erste Ableitung nach der Zeit enthalten) 323.
- Visscher, William M. (Self-energy effects on meson-nucleon scattering) 436.
- Vlieger, J. and S. R. de Groot (Irreversible processes) 418.
- Volpato, Mario (Soluzioni periodiche per equazioni differenziali ordinarie) 72.
- Volta, Vittorio Dalla s. Dalla Volta, Vittorio 158.
- Volterra, E. (Experiments on plastics and rubberlike materials) 397.
- Vorob'ev, L. N. (Ebenes Problem für rechteckige orthotrope Platte) 186.
- N. N. (Addition zufälliger Größen) 120.
- Vouk, B. (Extinction cross-section coefficient) 222.
- Vrănceanu, G. (Espaces  $A_n$  non projectivement euclidiens) 382.
- Waerden, B. L. v. d. (Einfall und Überlegung) 241.
- Wait, James R. and Sidney Kahana (Radiation from a slot) 220.
- Wakakuwa, Hidekiyo ( $n$ -dimensional Riemannian spaces) 158.
- Walfisz (Val'fiš), A. Z. (Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. XVI.) 35.
- Walls, Nancy (Space-tableau) 8.
- Walsh, J. L. und D. Gaier (Randverzerrung) 304.
- Ward, Morgan (Prime divisors recurring sequences) 37.
- Warmus, M. s. S. Drobot 365.
- Warren, Don W. s. Arthur W. Burks 4.
- Watanabe, Mitukuni s. Jiro Yamashita 454.
- Yoshikatsu (Bimodal distributions) 118.
- and Mikio Nakamura (Modified cosine functions) 57.
- Watson, Kenneth M. s. Murray Gell-Mann 436.
- Weil, André s. Serge Lang 272.
- Weinberg, Franz (Termin-Grobplanung) 140.
- Weiss, G. and L. E. Payne (Torsion of a shaft) 185.
- Werle, J. (Theorie der Kernkräfte) 435; (Kernpotentiale) 439.
- Weyssenhoff, J. (Problem der Elementarlänge) 429.
- Whaples, G. (Local class field theory. II.—IV.) 30.
- Wheelon, Albert D. (Summation of infinite series) 53.
- Whipple, R. T. P. (Concentration contours in diffusion) 450.
- Whitehead, George W. (Mappings into group-like spaces) 168.
- Whittaker, Sir Edmund and G. Robinson (Calculus of observations) 336.
- Whittle, P. (Stationary processes) 356.
- Wiener, Philip P. s. Pierre Duhamel 175.
- Wigner, E. P. and J. v. Neumann (Loewner's theorem) 300.
- Wilets, Lawrence (Nuclear rotational states) 438.
- Wilhoit jr., J. C. (Poritsky's solutions) 395.
- Willmore, Thomas J. (Espaces riemanniens harmoniques) 157.
- Wilson, Neil Y. (Factor of  $2^p \pm 1$ ) 34.
- R. (Meromorphic functions) 299.



- Winkler, Wilhelm (Index numbers problem) 136.
- Winter, Jacques (Théorie des liquides) 234.
- Wintner, A. (Bound of regularity of analytic differential equations) 312.
- s. Philip Hartman 304, 320.
- Wise, M. E. (Ratio of two factorials) 343; (Hypergeometric probabilities) 343; (Number distribution of particle size) 344.
- Witten, Louis (Yang and Lee's theory of condensation) 447.
- Wolfe, J. s. E. Chamberlin 255.
- Wolfenden, H. H. (Population statistics) 359.
- Woodger, J.-H. (Application of logic to biology) 3.
- Wooyenaka, Yuki (Newman algebra. I.—III.) 265.
- Woude, W. van der s. C. A. Crommelin 372.
- Wright, E. M. s. G. H. Hardy 33.
- Jesse (Quasi-projective geometry) 141.
- B. s. Arthur W. Burks 4.
- Wrona, W. s. L. Infeld 176.
- Wunderlich, W. (Irregular curves and functional equations) 383.
- Wundheiler, Alexander W. (Irreversible systems) 417.
- Wyman, Max s. Leo Moser 38.
- Yadavalli, S. V. (Velocity distribution in electron streams) 424.
- Yagyu, Toshikazu (Whitney classes of normal bundle) 378.
- Yalin, Selim (Sickerströmung) 209.
- Yamada, Shigeo s. Tsuyoshi Sekiya 394.
- Yamaguti, Masaya (Non-linear differential equations) 71.
- Yamamuro, Sadayuki (Modulated sequence spaces) 100; (Finite modulars) 101.
- Yamashita, Jiro and Mitukuni Watanabe (Conductivity of non-polar crystals. I.) 454.
- Yano, K. (Trasformazioni in spazi geometrici differenziali) 376; (Pseudo-kählerian spaces) 380.
- and E. T. Davies (Connection in Finsler space) 161.
- Yoneda, Nobuo (Homology theory of modules) 19.
- Yoshida, Shiro s. Masato Morita 442.
- Youla, Dante C. (Method of maximum likelihood in estimating continuous-modulated intelligence) 357.
- Young, G. O. s. B. Gold 419.
- L. C. s. W. H. Fleming 46.
- Zacepin, G. T. und I. L. Rozen-tal' (Kern-Kaskaden-Prozeß) 444.
- Zadiraka, K. V. (Eigenwerte eines Randwertproblems) 73.
- Zagubiženko, P. A. s. V. I. Mos-sakovskij 188.
- Zaidman, S. (Classe de congruences) 163.
- Zambó, J. (Erreur moyenne des coordonnées d'un cheminement polygonal intercalé) 175.
- Zanella, Angelo (Successive linearizzazioni) 427.
- Zarantonello, Eduardo H. (Parallel cavity flows) 406.
- Zeise, H. (Thermodynamik. I.) 417.
- Zel'donovič, Ja. B. (Zerfall geladener  $\pi$ -Mesonen) 437.
- Zelen, Marvin (Analysis for partially balanced incomplete block designs) 131.
- Zelinsky, Daniel s. Alex Rosenberg 26.
- Zeller, K. (Matrixtransformationen von Folgenräumen) 51.
- s. W. Meyer-König 51.
- Zeuli, Tino (Formule di trigonometria) 143.
- Ziegler, James (Item analysis with electronic computer) 129.
- Zigel', F. S. s. Ju. A. Ševljakov 195.
- Zil'berman, G. E. (Schwach-nichtideales Elektronengas) 448.
- Zobel, Otto J. s. Leonard R. Ingersoll 419.
- Zorua Terol, Procopio (Wahrscheinlichkeit innerhalb eines Bereichs) 344; (Superposition of random variables) 344; (Independence of random variables) 358.
- Zubrzycki, S. (Inequalities between moments) 118.
- Žuchovickij, E. M. (Stabilität einer ungleichmäßig erwärmten Flüssigkeit) 197.
- Zweites Symposium über einige mathematische Probleme, die in Südamerika bearbeitet werden 241.